

STATIQUE
EXPÉRIMENTALE ET THÉORIQUE
DES LIQUIDES
SOU MIS
AUX SEULES FORCES MOLÉCULAIRES,

PAR

J. PLATEAU

Professeur à l'Université de Gand,
Membre de L'Académie de Belgique, Correspondent de l'Institute de France,
de la Société Royale de Londres, de l'Académie de Berlin, etc.

TOME PREMIER.

PARIS, GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustine, 55.	LONDRES, TRÜBNER ET Cie, Ludgate Hill, 57 et 59.
--	--

GAND ET LEIPZIG: F. CLEMM.

1873.

A MONSIEUR A. QUETELET

DIRECTEUR DE L'OBSERVATOIRE DE BRUXELLES , ETC.

Vous, qui avez été l'un des actifs promoteurs de la regeneration intellectuelle de la Belgique, et dont les travaux ont tant contribué à l'illustration de ce pays ; vous, qui avez guidé mes premiers pas dans la carrière des sciences, et qui m'avez appris, par votre exemple, recherches; à exciter chez les jeunes gens l'amour des vous enfin, qui n'avez cessé d'être pour moi un ami dévoué, permettez moi de vous dédier cet ouvrage, témoignage de reconnaissance et de constante affection.

J. PLATEAU.

Cet ouvrage est formé essentiellement du contenu des onze Séries que Mémoires de j'ai publiées, de 1843 à 1868, dans les Mémoires de l'Académie de Belgique, sous le titre : Recherches expérimental et théoriques sur les figures d'équilibre d'une masse liquide sans pesanteur¹. Mais la révision de l'ensemble de ces Séries m'a permis de suivre, dans l'ouvrage actuel, un ordre un peu plus méthodique, de rectifier quelques passages, et de combler des lacunes, surtout dans les historiques; jusqu'à la fin de 1869, j'ai pu étendre j'en ai fait deux ceux-ci nouveaux, l'un relatif à la viscosité superficielle des liquides, l'autre à la constitution des veines liquides; j'ai introduit plusieurs additions qui me paraissent dignes d'intérêt, telles que la théorie de l'explosion des bulles laminaires ; d'un autre côté, j'ai supprimé , comme concernant des phénomènes purement dynamiques, la plupart des résultats de ma première Série ; enfin j'ai indiqué, dans un dernier paragraphe, les titres des articles qui ont paru après 1869 sur des sujets en rapport avec ceux que je traite.

¹ La première Série porte le titre un peu différent: phénomènes que présente une masse liquide libre et soustraite à l'action de la pesanteur, première partie.

STATIQUE DES LIQUIDES

SOUMIS AUX SEULES FORCES MOLÉCULAIRES

CHAPITRE PREMIER.

Notions préliminaires. Condition générale à laquelle doit satisfaire, dans l'état d'équilibre, la surface libre d'une masse liquide supposée sans pesanteur. — Procédés pour soustraire un liquide à l'action, de la pesanteur, en le laissant libre, soit sur toute sa surface, soit sur une partie de cette d'obéir à ses propres attractions moléculaires. Emploi du premier procédé: sphère liquide; vérifications expérimentales des principes de la théorie de l'action capillaire. — Figures terminées par des surfaces planes: polyèdres liquides.

§ 1. On sait que, dans les circonstances ordinaires, la surface libre d'un liquide, en repos, quand elle a une étendue assez grande, est plane et horizontale, excepté vers ses bords; mais on sait, en même temps, que cette forme plane et horizontale est un effet de la pesanteur, et que, entre des limites resserrées, la surface libre peut affecter des formes très-différentes, parce qu'alors l'action de la pesanteur devient du même ordre que les actions moléculaires c'est ce qui a lieu, par exemple, au sommet de la colonne liquide soulevée ou abaissée dans un tube capillaire. On comprend, d'après cela, que si les liquides étaient dépourvus de pesanteur, leur surface libre pourrait avoir, à l'état de repos, et sur une étendue quelconque, des formes tout autres que la forme plané horizontale, et c'est, en effet, à quoi l'on arrive par le calcul, comme nous allons le voir.

Il résulte du travail de Laplace sur l'action capillaire, que les liquides exercent sur eux-mêmes, en vertu de l'attraction mutuelle de leurs molécules, une pression normale à la surface en chaque point; que cette pression peut être regardée comme émanant d'une couche superficielle ayant une épaisseur égale au rayon d'activité sensible de l'attraction moléculaire et, par suite, extrêmement petite; enfin que cette même pression dépend des courbures de la surface au point considéré, et que si l'on désigne par P la pression, rapport à l'unité de surface, qu'exerce une surface plane, par A une constante, et par R et R' les rayons de courbure principaux, c'est-à-dire ceux de la plus forte et de la plus faible courbure de la surface en un même point, la pression correspondante à ce point a pour valeur, toujours rapportée à l'unité de surface,

$$P + \frac{A}{2} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) \quad (1)$$

Dans cette formule, les rayons R et R' sont positifs lorsqu'ils appartiennent à des courbures convexes, ou, en d'autres termes, lorsqu'ils sont dirigés à l'intérieur de la masse, et ils sont négatifs lorsqu'ils appartiennent à des courbures concaves, c'est lorsqu'ils sont dirigés à l'extérieur; quant aux quantités P et A , elles ne changent qu'avec la nature du liquide.

Cela étant, concevons une masse liquide dépourvue de pesanteur; les pressions émanées des différents points (le sa couche superficielle se transmettant des uns aux autres par le liquide intérieur, il faudra nécessairement, pour qu'il y ait équilibre, que toutes ces pressions soient égales entre elles; il faudra donc que l'expression ci-dessus ait une valeur constante à l'égard de toute la surface; et comme les quantités P et A sont elles-mêmes constantes, on exprimera la condition générale de l'équilibre en posant simplement:

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = C, \quad (2)$$

la quantité C étant constante, et pouvant d'ailleurs être positive, négative ou nulle.

Précisons davantage pour les personnes auxquelles la théorie des surfaces est peu familière. En un point pris arbitrairement sur une surface quelconque, imaginons une normale à celle-ci, et par cette normale i passer un plan; il coupera la surface suivant une certaine ligne, et le rayon de courbure de cette dernière, au pied de la normale, sera l'un de ceux de la surface en ce point. Faisons maintenant tourner le plan autour de la normale; dans chacune de ses positions, il déterminera une nouvelle ligne, et, par suite, un nouveau rayon de courbure; or, parmi tous ces rayons, il y en aura, en général, un qui appartiendra à une courbure plus forte, et un à une courbure plus faible que toutes les autres; ce sont nos deux rayons principaux R et R' , et les quotients $1/R$ et $1/R'$ sont les deux courbures principales au point considéré. Ajoutons que, d'après un résultat curieux de l'analyse, les deux sections aux quelles appartiennent ces courbures principales sont toujours à angle droit l'une sur l'autre.

Ainsi, en vertu de la formule [2] une masse liquide supposée sans pesanteur doit affecter une figure telle que la somme algébrique des deux courbures principales ait la même valeur en tous les points de sa surface. Chacune de ces courbures principales est d'ailleurs, d'après ce qui précède, positive ou négative suivant qu'elle est convexe ou concave.

Remarquons encore que lorsqu'il y a, en un même point de la surface, des courbures convexes et des courbures concaves, la courbure principale de cette dernière espèce est la plus faible algébriquement; c'est donc celle qui a la plus grande valeur négative, et conséquemment le plus petit rayon négatif.

Citons enfin un second résultat curieux de l'analyse: Si l'on considère deux sections quelconques à angle droit passant par une même normale, les rayons de courbure qui leur correspondent, rayons que nous nommeront ρ et ρ' , seront tels que la quantité $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}$ sera égale à la quantité $\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}$. Il en résulte que l'on peut substituer la première de ces quantités à la seconde, et que, par conséquent, l'équation de l'équilibre dans sa plus grande généralité sera $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = C$.

Si toutes ces notions laissent encore quelque obscurité dans l'esprit du lecteur, elles s'éclairciront par les nombreuses applications que nous aurons à en faire.

Poisson, le seul, je pense, qui, avant mes recherches, ait toucha directement à la question générale des figures d'équilibre d'une masse liquide sans pesanteur, était parvenu² en 1828, à la formule [2]: après avoir traité dans toute sa généralité le problème de l'équilibre intérieur d'un fluide sous l'action de ses propres forces moléculaires et de forces étrangères données, il cherche les équations d'équilibre relatives à la surface commune de deux fluides en contact; puis il suppose que l'un d'eux est un liquide, et l'autre un gaz exerçant une pression uniforme; enfin il supprime les forces étrangères, sauf cette pression, et trouve ainsi, à l'égard de la surface de la masse liquide, la formule dont il s'agit.

Il démontre ensuite qu'il n'existe qu'une seule figure d'équilibre possible parmi les sphéroïdes de révolution très-peu différents d'une sphère, et que cette figure est celle de la sphère elle-même.

§ 2. Il est évident, en effet, qu'une surface sphérique satisfait à la formule [2] puisque tous ses rayons de courbure sont égaux. Il est de même évident que le plan, dont tous les rayons de courbure sont infinis, ce qui rend le premier membre de la formule partout égal à zéro, y satisfait aussi, seulement, dans ce cas, la constante C , est nulle. Je cite ces deux surfaces parce qu'elles se présentent immédiatement; mais, comme nous l'apprendrons, ci-après, elles sont loin d'être les seules.

² Mémoire sur l'équilibre des fluides. (Mém. de l'Acad. des Sciences de Paris, t. IX, année 1830, p. 1)

La constance de la somme algebrique des deux courbures principales n'est pas l'unique interprétation que reçoive la formule [2]:

En premier lieu, les géomètres savent que la quantité $\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}$ est proportionnelle à la courbure moyenne, c'est-à-dire à la moyenne entre toutes les courbures de la surface au point considéré; la formule [2] indique donc aussi que nos surfaces d'équilibre sont celles qui ont la même courbure moyenne en tous leurs points.

L'invariabilité de la courbure moyenne se comprend d'ailleurs aisément: puisque la pression en chaque point dépend des courbures, il est clair que si la moyenne entre toutes celles-ci ne varie pas d'un point à un autre, l'effet de leur ensemble ne variera pas non plus, et qu'ainsi la pression sera la même en tous les points.

Maintenant, les géomètres savent également que les surfaces à courbure moyenne constante sont en nombre illimité; un liquide supposé sans pesanteur est donc susceptible d'une infinité de figures d'équilibre.

En second lieu, dans le cas où la constante C est égale à zéro, et où conséquemment la courbure moyenne est nulle, la formule [2] donne

$$R = -R'$$

ainsi les surfaces à courbure moyenne nulle sont telles qu'en chacun de leurs points les deux rayons de courbure principaux sont égaux et de signes contraires; en d'autres termes, si, en un point quelconque d'une semblable surface, on conçoit les deux sections normales qui présentent en ce point les courbures principales, sections qui, nous le savons, font entre elles des angles droits, l'une de ces deux courbures sera convexe, et l'autre lui sera égale, mais concave. Le plan seul fait une sorte d'exception, parce que toutes ses courbures sont nulles.

Il suit, d'ailleurs, de ce qui a été dit dans le paragraphe précédent, que, ρ et ρ' désignant les rayons de courbure de deux sections quelconques à angle droit passant par une même normale en un point d'une surface à courbure moyenne nulle, on aura toujours aussi $\rho = -\rho'$, et que, par conséquent, si, en un point d'une surface de ce genre, la courbure est convexe dans une certaine direction, elle est nécessairement concave, et au même degré, dans la direction rectangulaire.

En troisième lieu, partant d'un résultat du calcul des variations, les géomètres ont admis que les surfaces satisfaisant à la formule [2] ont une étendue minima. Suivant ce principe, sur lequel nous aurons à revenir, lorsque la constante C a une valeur finie, la surface de la figure serait toujours moindre que toutes les surfaces très-voisines comprenant le même volume et terminées aux mêmes limites, et lorsque la constante C est nulle, la surface serait toujours, d'une manière absolue, c'est-à-dire sans tenir compte du volume compris, moindre que toutes les surfaces très-voisines terminées aux mêmes limites; dans ce dernier cas, les surfaces dont il s'agit sont souvent appelées *surfaces à aire minima*.

Envisagées au point de vue purement mathématique, les surfaces dont nous nous occupons ont été l'objet des recherches de plusieurs géomètres; nous profiterons plus loin des résultats qu'ils ont obtenus; seulement je dirai, dès à présent, que les rayons R et R' peuvent s'exprimer en fonction des coefficients différentiels, ce qui convertit la formule [2] en une équation différentielle du second ordre; en faisant $\frac{dz}{dx} = p$, $\frac{dz}{dy} = q$, $\frac{d^2z}{dx^2} = r$, $\frac{d^2z}{dy^2} = s$, et $\frac{d^2z}{dx dy} = t$, cette équation est:

$$(1 + p^2)t + (1 + q^2)r - 2pqs = C(1 + p^2 + q^2)^{3/2} \quad (3)$$

elle représente ainsi toutes les surfaces à courbure moyenne constante, et, par suite, toutes les figures d'équilibre qui conviendraient à un liquide sans pesanteur; mais elle

n'a pu, jusqu'ici, être intégrée que dans certains cas, et, parmi les surfaces en nombre infini qui y satisfont, il n'y en a qu'une vingtaine, à ma connaissance, dont on ait soit l'équation en coordonnées finies, soit la détermination par les fonctions elliptiques, soit la génération géométrique.

Disons cependant que les méthodes qu'on a trouvées permettraient certainement, si l'on effectuait les calculs, de dépasser de beaucoup ce nombre.

Présentons encore une remarque: il est indifférent de concevoir le liquide placé d'un côté ou de l'autre d'une surface d'équilibre; en d'autres termes, toute figure d'équilibre en relief a sa correspondante identique en creux; par exemple; de même qu'une sphère pleine formée d'un liquide sans pesanteur serait à l'état d'équilibre, du moins dans le vide, de même une sphère en creux dans un liquide sans pesanteur serait également à l'état d'équilibre. En effet, en passant de la figure en relief à la figure en creux, les rayons de courbure R et R' ne font évidemment que prendre, en chaque point, des signes contraires, sans changer de valeurs absolues, ce qui donne simplement aussi un signe contraire à la constante C , et conséquemment ne détruit pas la condition de l'équilibre.

§ 3. Les résultats trouvés par les géomètres exigeant, pour s'appliquer aux liquides, la condition en apparence impossible d'une pesanteur nulle, semblaient devoir demeurer à l'état d'ingénieuses spéculations, sans signification physique réelle; mais j'ai fait connaître deux procédés au moyen desquels on peut placer un liquide dans des circonstances telles qu'il se comporte comme s'il ne pesait pas.

Le premier consiste à introduire une masse d'huile d'olive dans un mélange d'eau et d'alcool dont la densité soit exactement égale à celle de l'huile employée. Alors, en effet, l'action de la pesanteur sur la masse d'huile se trouve complètement neutralisée, et comme les deux liquides ne peuvent se mêler, la masse immergée demeure libre d'obéir aux pressions qui émanent de sa couche superficielle; aussi, quand elle n'est adhérente à aucun solide, elle se façonne, quel que soit son volume, en une sphère parfaite, qui reste suspendue au sein du liquide ambiant. J'ai réalisé de cette manière des sphères exactes ayant jusqu'à 14 centimètres de diamètre³

³ Depuis la publication de mes premières Séries, j'ai reconnu que deux savants déjà anciens avaient approché bien près de ce procédé.

En 1676, Boyle (Philos. Transact., vol. XI, pp. 775 et T partant du fait que les gouttes de pluie et de rosée ont une figure arrondie, et remarquant que ces gouttes, environnées d'air, sont formées d'un fluide dans un autre fluide, se propose d'essayer ce qui arrive à des gouttes d'un liquide immergées dans un autre liquide avec lequel elles ne se mêlent pas. A cet effet, il introduit dans un flacon une couche d'une solution concentrée de carbonate de potasse, et, par dessus, une quantité suffisante d'alcool également concentré; puis il laisse tomber dans ce dernier liquide des gouttes d'essence de térébenthine, et il voit ces gouttes, qui ne se dissolvent pas immédiatement dans le liquide ambiant, descendre à travers celui-ci et venir se poser, avec une figure sensiblement sphérique, sur la surface du liquide alcalin; il constate que la sphéricité commence à paraître altérée quand une goutte formée de la réunion de plusieurs autres atteint environ un tiers de pouce en diamètre. Il verse ensuite des gouttes d'eau dans de l'essence de girofle, liquide dont la densité est fort peu supérieure à celle de l'eau, et ces gouttes, qui gagnent le haut du liquide ambiant, lui montrent de même une forme très de la sphère quand elles sont petites, et légèrement aplatie quand elles atteignent à peu près le double de la grosseur d'un pois.

En second lieu, Segner, dans un Mémoire publié en 1751 (Commentar. Gotting., vol. I), et intitulé: *De figuris superficierum fluidarum* s'exprime ainsi:

“Si un liquide tombe librement dans un milieu non résistant, l'action due au poids des portions supérieures sur celles qui les précèdent est complètement nulle. Et si deux liquides sont donnés non susceptibles de se mêler et de densités parfaitement égales, et que l'on verse une petite quantité de l'un d'eux dans un vase contenant une quantité plus grande de l'autre, le poids du premier sera soutenu -par la pression du second de telle manière que celui-ci ne pourra exercer aucune action pour conserver ou pour changer la figure du liquide immergé. La goutte qui tombe, ou la goutte immergée comme nous venons de le dire, prendra donc identiquement la même figure qu'une goutte qui serait sans pesanteur.”

Segner se borne à énoncer ce principe, il n'en essaie pas l'application, et n'en tire aucun parti.

Le second procédé permet de produire les figures d'équilibre dans l'air; il repose sur un principe que nous démontrerons rigoureusement plus loin, mais que nous pouvons faire comprendre dès à présent: concevons une lame liquide très-mince, une lame d'eau de savon, par exemple; à cause de sa ténuité, cette lame n'a qu'une masse extrêmement petite, de sorte que l'action de la pesanteur y est négligeable en présence des pressions capillaires qui émanent des couches superficielles (§ 1) des deux faces; chacune de ces faces tend conséquemment à prendre une figure satisfaisant à la formule [2]; et comme l'une d'elles est en creux ce que l'autre est en relief, il suit de la remarque qui termine le paragraphe précédent que l'une de la seconde entraîne celui de la première, et qu'ainsi la forme d'équilibre d'une semblable lame est nécessairement, sans différence appréciable, l'une de celles qu'affecterait la surface libre d'une masse liquide pleine dépourvue de pesanteur. Les bulles de savon, par exemple, lorsqu'elles flottent isolées dans l'air, ont, chacun le sait, une figure sphérique, comme la masse d'huile immergée dans notre alcool dilué.

§ 4. Revenons au premier procédé. Avant de l'employer à la réalisation des figures d'équilibre, décrivons l'appareil et les préparations nécessaires aux expériences. Si l'on opérât dans un flacon, la réfraction altérerait l'aspect des figures produites, elle les montrerait élargies dans le sens horizontale; il faut donc se procurer un vase à parois planes en verre à glace. Ce qui m'a paru le plus convenable est de donner à ce vase la forme d'un cube de 20 centimètres de côté; les glaces qui en constituent les faces latérales et le fond sont mastiquées dans un châssis en fer. Quant au couvercle, il consiste en une autre plaque de verre de mêmes dimensions que les premières, et qu'on pose simplement sur le haut du vase. Cette plaque couvercle est percée, en son milieu, d'une large ouverture circulaire garnie d'un goulot en fer qu'on ferme au moyen d'un bouchon de même métal; celui-ci est traversé à frottement doux, suivant son axe, par une tige cylindrique en fer⁴ d'environ 15 centimètres de longueur et 5 à 6 millimètres d'épaisseur, tige dont l'extrémité supérieure porte un bouton qui permet de la saisir aisément, et dont l'extrémité inférieure est creusée en écrou dans le sens de l'axe, afin qu'on puisse y visser des pièces que nous indiquerons. Le bord supérieur du vase est usé à l'émeri; de cette façon, lorsque le couvercle est placé, l'alcool du mélange intérieur ne peut s'évaporer. Enfin l'appareil est muni de vis calantes, et d'un robinet pour laisser écouler les liquides.

Nous devons signaler, dès maintenant, deux causes qui tendent à apporter du trouble dans les expériences, et contre lesquelles il faut se mettre en garde autant que possible.

§ 5. Occupons-nous d'abord de la première. Supposons que, par une manoeuvre dont nous parlerons bientôt avec détail, on ait obtenu une belle sphère d'huile en équilibre parfait de densité dans le mélange alcoolique. Cet équilibre ne tarde pas à s'altérer: après quelques minutes, on voit la sphère quitter sa place, et monter avec une extrême lenteur. Si l'on ajoute alors au liquide ambiant un peu d'alcool pour rétablir l'équilibre, celui-ci est encore rompu de la même manière au bout d'un certain temps; il faudrait continuer pendant deux ou trois jours à le maintenir par l'addition successive de petites quantités d'alcool, pour le rendre enfin sensiblement permanent. C'est que l'huile absorbe en assez grande proportion l'alcool du mélange en contact avec elle, et devient moins dense, tandis que le mélange, qui perd ainsi de son alcool, augmente, au

Ajoutons que, dans le même travail, il est conduit, par une théorie dont nous parlerons plus loin, à la conséquence qu'une masse liquide finie et sans pesanteur devrait prendre la figure sphérique.

⁴ J'indique le fer et non le cuivre, pour toutes les parties métalliques de l'appareil, parce qu'il s'agit d'employer de l'huile, et que ce liquide n'enlève rien au fer, tandis que, dans un contact prolongé avec le cuivre, il attaque légèrement celui-ci, prend une couleur verte, et, ce qui est un grave inconvénient, augmente de densité.

contraire, de densité. Ajoutons que, de son côté, le mélange alcoolique dissout un peu d'huile, ou plutôt de l'oléine qui fait partie de l'huile.

§ 6. On conçoit, d'après cela, qu'il est indispensable de n'employer les deux liquides que rendus, par une saturation mutuelle, à peu près inertes l'un à l'égard de l'autre. Voici, pour atteindre ce but, le moyen que je crois le meilleur:

On commence par faire, dans un grand flacon, un mélange d'alcool et d'eau distillée marquant 22° à l'aréomètre de Beaumé; on y ajoute, si cela est nécessaire, une certaine quantité d'alcool, de façon qu'en introduisant dans le liquide, à l'aide d'un entonnoir, une petite masse d'huile, celle-ci descende lentement au fond. On verse alors, par le même entonnoir, une quantité d'huile telle qu'elle pourrait constituer une sphère de 7 à 8 centimètres de diamètre, puis, après avoir bouché le flacon, on le retourne assez rapidement un grand nombre de fois, mais sans le secouer, jusqu'à ce que l'huile ait été divisée en sphérules de quelques millimètres de diamètre, et on laisse ensuite reposer le tout. Après un temps plus ou moins long, les sphérules se trouvent, pour la plupart, réunies en une seule masse. Quand la réunion est partiellement produite, c'est quand le tout est réduit à un petit nombre de masses assez volumineuses, on peut activer l'opération: à cet effet, on introduit le bout d'un fil de fer dans l'une de ces masses, et l'adhérence qu'elle contracte avec le métal permet de la conduire ais contre une autre, si elle n'y était déjà; mais cela ne suffit pas pour que les deux se confondent; elles demeurent séparées par une mince pellicule de liquide alcoolique, qui semble opposer une certaine résistance⁵, et qu'on perce avec le fil de fer; on arrive bientôt ainsi à n'avoir plus qu'une masse unique, abstraction faite de très-petites sphérules disséminées dans le liquide ambiant.

Si alors la masse unique occupe le fond du flacon, on en opère de nouveau la subdivision par des retournements; si elle occupe le haut du liquide, on ajoute un peu d'alcool, puis on retourne de même plusieurs fois le flacon, mais avec grande précaution, afin de ne pas diviser la masse ou de ne la séparer qu'en un très-petit nombre de parties, et l'on s'arrange de manière qu'elle finisse encore par descendre lentement au fond, après quoi on la subdivise, comme précédemment, en petites sphérules qu'on laisse de nouveau se réunir; enfin on ajuste les densités de façon que la masse ne manifeste plus de tendance prononcée à monter ou à descendre.

Il peut se faire, par suite d'un défaut d'homogénéité de l'huile, qu'après une subdivision, une partie des sphérules se rassemblent au fond et une autre partie dans le haut du liquide; quand cela a lieu, et que chacun des deux groupes de sphérules s'est converti en une masse, on conduit la plus petite vers l'autre à l'aide du fil de fer, et on les oblige à n'en plus former qu'une.

Dans les opérations d'ajustement, quand la proportion d'alcool est trop forte, il ne faut pas ajouter de l'eau pure au mélange, car celui-ci ayant dissous de l'huile, l'eau précipiterait cette dernière, et le liquide deviendrait laiteux; on évite cet inconvénient en employant, au lieu d'eau pure, un mélange d'alcool et d'eau à 16° Beaumé. Disons ici que, lorsqu'on est très—près de l'équilibre des densités, les quantités d'alcool ou de liquide à 16° ajoutées doivent être extrêmement petites.

Quand, après ces opérations, l'huile se trouve, en presque totalité, constituer une masse unique sans tendance appréciable à monter ou à descendre, on la soutire au moyen d'un siphon amorcé par un tube latéral, et on la reçoit dans un autre flacon.

Comme on doit se procurer de la sorte une quantité de mélange alcoolique inerte plus que suffisante pour remplir le vase à parois planes, et une quantité d'huile

⁵(1) Boyle avait déjà observé ce phénomène en effectuant les expériences dont il a été question dans la note du § 3.

également inerte supérieure à celle qu'on juge nécessaire pour les expériences, il faut effectuer la préparation ci-dessus dans plusieurs grands flacons à la fois. Lorsqu'elle est terminée, on fait passer toutes les masses d'huile dans un même flacon que leur ensemble doit remplir presque entièrement et qu'on bouche ensuite avec soin, sans quoi l'huile perdrait graduellement l'alcool qu'elle a absorbé. Elle se montre d'abord parsemée de sphérules de mélange alcoolique; mais ces sphérules cèdent peu à peu à l'huile une portion de leur alcool, et, prenant conséquemment un excès de densité, finissent par se rassembler au fond du flacon en une ou plusieurs masses qu'on enlève avec une pipette. Enfin il arrive parfois que l'huile ainsi préparée a perdu de sa limpidité, quand cette circonstance se présente, on ne s'en inquiète pas, elle ne nuit point aux expériences.

Quant au mélange alcoolique resté dans les grands flacons, il se trouve, de son côté, parsemé d'une multitude de très-petites sphérules d'huile; mais on l'en débarrasse par une filtration, en maintenant les entonnoirs couverts pour éviter l'évaporation de l'alcool.

§ 7. La seconde cause perturbatrice réside dans les variations de la température, et l'on aurait peine à se figurer combien nos masses d'huile immergées y sont sensibles: par exemple, une grosse sphère d'huile étant bien en équilibre dans le liquide ambiant, si l'on transporte le vase dans une chambre quelque peu plus chaude ou plus froide que celle où il se trouvait d'abord, la sphère ne tarde pas, dans le premier cas, à descendre, et, dans le second, à monter; il suffit même d'appliquer les mains à l'extérieur du vase pour la voir, après quelques instants, commencer à descendre. On comprend, d'après cela, que lorsqu'on veut réaliser les figures d'équilibre, il faut opérer dans un lieu dont la température demeure sensiblement constante pendant la durée des expériences.

Cette condition est impossible à remplir quand il s'agit d'une leçon publique: si l'on a réglé les densités avant l'arrivée des auditeurs, la présence de ceux-ci élève nécessairement la température, et l'équilibre s'altère. Nous indiquerons cependant, plus loin, un moyen de parer à cet inconvénient.

§ 8. Maintenant que nous possédons de l'huile et du mélange alcoolique préparés, et que nous connaissons l'influence des variations de la température, nous pouvons aborder les expériences.

Mais auparavant, je crois nécessaire d'insister sur un point; je suis, depuis un grand nombre d'années, affligé d'une cécité complète; le lecteur pourrait donc concevoir quelques doutes sur l'entière exactitude des faits que j'expose, et je dois le rassurer à cet égard. Toutes les expériences de ce premier chapitre, ainsi qu'une partie de celles du reste de l'ouvrage, ont été effectuées par moi-même, alors que je jouissais encore de la plénitude de ma vue; les autres ont toujours été faites, sauf des exceptions très-rares, en ma présence, sous ma direction, avec toutes les précautions que j'ai pu imaginer pour éviter des erreurs, et par des personnes habituées à l'observation. Ces personnes, dont il me suffira de citer ici les noms pour dissiper toute incertitude, sont: M. Duprez professeur de physique à l'Athénée et à l'Ecole industrielle de Gand, M. Donny professeur de chimie, M. Lamarle professeur de construction, et M. Van der Mensbrugge chargé du cours de physique mathématique, à l'Université de la même ville; enfin mon fils Félix, bien connu comme naturaliste expérimentateur.

§ 9. Passons enfin à la description des expériences. Soit d'abord simplement à réaliser une grosse sphère librement suspendue dans le mélange alcoolique. On commence, pour une raison que l'on connaîtra bientôt, par couvrir d'un carré d'étoffe de coton le fond du vase à parois planes, puis on verse dans ce vase, par l'ouverture du couvercle, le mélange alcoolique jusqu'à une hauteur convenable, et on l'y agite avec

une spatule de verre pour en assurer l'homogénéité. L'huile qu'on doit introduire pouvant aussi ne pas être homogène, on la mêle également à l'aide d'une baguette de verre, en ayant soin de placer un tampon d'ouate dans le goulot du flacon, afin que l'huile ne perde pas sensiblement d'alcool. On pose alors dans le goulot du couvercle du vase un petit entonnoir dont le col pénètre de quelques centimètres dans le liquide alcoolique, et l'on y verse l'huile, après avoir pris la précaution d'entourer d'une étoffe épaisse le flacon qui la contient, pour que la chaleur de la main ne puisse en modifier la densité.

Comme, à moins d'un hasard particulier, la température à laquelle on opère n'est pas identiquement la même que lors de la préparation des liquides, l'huile versée par l'entonnoir monte à la surface du liquide ambiant, ou bien descend au fond du vase. Dans le premier cas, on s'arrête après en avoir introduit une masse de peu de volume, on enlève l'entonnoir et l'on absorbe, au moyen d'une petite seringue en verre à long bec, la masse flottante; on ajoute ensuite un peu d'alcool pur, dont on effectue soigneusement le mélange, et l'on répète, si cela est nécessaire, les mêmes opérations, jusqu'à ce que l'huile versée dans l'entonnoir descende avec lenteur, et aille se poser sur l'étoffe de coton. Je n'ai pas besoin d'avertir que si l'on avait ajouté trop d'alcool, on recourrait au mélange à 16° . Enfin on continue à verser de l'huile, pour donner à la masse le volume désiré.

Disons ici que le morceau d'étoffe est indispensable dans toutes les expériences: imprégné de liquide alcoolique il ne se laisse pas mouiller par l'huile, tandis que, sans sa présence, quand la masse descend, elle peut contracter de l'adhérence avec le fond du vase, s'y étaler, et rendre ainsi impossibles les opérations ultérieures.

Il peut se faire que l'huile, au lieu de s'accumuler sur l'étoffe en une seule grosse masse, se trouve subdivisée en plusieurs masses séparées; on réunit alors celles-ci à l'aide du fil de fer (§ 6), puis on ajuste les densités. Dans cette dernière opération, pour mêler intimement au reste du liquide ambiant les petites quantités ajoutées d'alcool pur ou d'alcool à 16° on n'introduit pas la spatule par l'ouverture du couvercle; il est plus commode de laisser cette ouverture fermée et de faire glisser la plaque de manière à découvrir une petite portion du haut du vase, par laquelle on fait passer la spatule; on agite doucement et assez longtemps celle-ci dans le liquide, en prenant de grandes précautions pour que la masse d'huile ne se divise pas et pour qu'elle n'aille pas adhérer à l'une des parois latérales du vase.

Quand l'équilibre est définitivement établi, on a ainsi le curieux spectacle d'une grosse masse liquide parfaitement sphérique, et immobile au sein du liquide environnant.

§ 10. Si l'on veut montrer le résultat à un auditoire (§ 7), on termine les manipulations d'une manière un peu différente: au lieu de rendre les deux densités égales, on établit à dessein une certaine hétérogénéité dans le liquide alcoolique; on fait d'abord en sorte que ce liquide contienne un petit excès d'alcool, puis on y verse lentement une quantité convenable de mélange à 16° . Celui-ci, en vertu de son excès de densité, descend au fond du vase, où il s'étend en couche horizontale. Alors on introduit l'huile, qui, à cause du petit excès d'alcool que renferme le mélange supérieur, descend à travers ce dernier, et vient, soit en une seule masse, soit en plusieurs masses partielles, se poser sur la couche plus dense du mélange inférieur. Cela étant, on réunit, s'il y a lieu, les masses isolées en une seule; puis on agite le liquide avec précaution de manière à mêler imparfaitement la couche du fond avec les couches plus élevées, mais sans diviser la masse d'huile, et on laisse ensuite reposer le système. On voit qu'il doit résulter de là, dans le liquide alcoolique, un état de densité croissante à partir des couches supérieures moins denses que l'huile, jusqu'aux couches inférieures plus

denses que cette même huile, et que, par conséquent, la masse d'huile devra se tenir en équilibre stable selon la verticale, dans une certaine couche dont la densité moyenne est égale à la sienne.⁶

Alors, si la température vient à s'élever ou à s'abaisser un peu, la sphère d'huile descendra ou montera d'une certaine quantité; mais, si le liquide ambiant est suffisamment hétérogène, elle rencontrera bientôt une couche ayant en moyenne la même densité qu'elle, et s'y arrêtera.

A la vérité, dans ces conditions, la masse ne peut plus constituer rigoureusement une sphère; elle doit être aplatie d'une petite quantité dans le sens vertical; mais, à moins que l'hétérogénéité du liquide ambiant ne soit trop forte, cet aplatissement est insensible à l'oeil, et la masse paraît sphérique.

§ 11. J'ai décrit minutieusement les précautions à prendre pour assurer le succès de l'expérience actuelle; elles sont les mêmes à l'égard de toutes les autres expériences qui se font par le procédé de l'immersion, et elles sont indispensables. On en acquiert bientôt l'habitude, et alors tout devient très-facile; mais si on les néglige, on n'obtient que des résultats fort imparfaits.

Signalons encore une circonstance qui pourrait embarrasser: dans le cours des expériences, il arrive assez souvent, soit par un abaissement de la température, soit parce qu'on a introduit une trop grande quantité de mélange à 16°, que la masse employée s'élève jusqu'à la surface du liquide ambiant et s'y aplatit plus ou moins, mais en laissant au-dessus d'elle une mince pellicule de ce liquide, pellicule qui semble résistante, comme entre deux masses juxtaposées (§ 6); alors, après quelque temps, la masse se fait jour et présente une portion de surface plane au niveau de celle du liquide environnant; et, ce qu'il y a de singulier, c'est qu'elle a, pour ainsi dire, contracté une adhérence avec cette dernière surface. Pour l'en détacher complètement, le seul moyen est de verser avec précaution un peu d'alcool pur, lequel s'étend sur l'ensemble des deux surfaces, et détruit ainsi l'adhérence en question; on mêle ensuite cet alcool pur avec le mélange alcoolique sous-jacent.

Il est inutile d'ajouter qu'après chaque série d'expériences, on soutire, comme nous l'avons dit (ibid.), la masse d'huile à l'aide d'un siphon, et que, si le mélange alcoolique est parsemé de petites sphérules d'huile, on le filtre en maintenant l'entonnoir couvert.

§ 12. Avant d'aller plus loin, insistons sur une remarque. L'attraction en jeu dans mes expériences est l'attraction moléculaire, laquelle, on le sait, ne s'exerce d'une manière sensible que jusqu'à une distance excessivement petite, et les forces qui déterminent les figures de nos masses d'huile immergées n'émanent que d'une couche superficielle dont la minceur est extrême. Au contraire, dans une grosse masse céleste supposée fluide, l'action de la couche superficielle est insensible, et l'attraction efficace est l'attraction universelle, en vertu de laquelle toutes les parties de la masse agissent les unes sur les autres quelles que soient leurs distances mutuelles. Ces deux espèces d'attraction doivent donc produire des résultats différents; si toutes les deux donnent la sphère, c'est à cause de la symétrie parfaite de cette figure, symétrie qui en ferait une forme d'équilibre sous toutes les lois d'attraction imaginables; mais, à part ce cas spécial, on se tromperait étrangement si l'on voulait tirer de mes expériences quelque induction à l'égard de faits astronomiques.

§ 13. Appliquons actuellement notre procédé à de nouvelles expériences: il va nous permettre, en premier lieu, de vérifier les principes les plus importants de la théorie de

⁶ Les différentes couches liquides ainsi superposées tendent, il est vrai, à se mêler d'elles-mêmes; mais comme elles sont placées dans l'ordre de leurs densités, ce mélange spontané ne s'effectue qu'avec une extrême lenteur, et il faut un grand nombre de jours pour que le liquide devienne homogène. Il ne résulte donc de là aucun inconvénient pour les expériences.

l'action capillaire.

Commençons par celui que nous avons rappelé ci-dessus, et suivant lequel les actions capillaires émanent toutes d'une couche superficielle d'épaisseur excessivement minime.

Concevons un système solide quelconque plongé dans l'intérieur de notre sphère d'huile, et donnons à cette sphère un volume tel qu'elle puisse envelopper complètement le système solide sans que celui-ci en atteigne la surface en aucun point. Alors, si le principe en question est vrai, la présence du système solide n'aura aucune influence sur la figure d'équilibre, puisque, dans ces circonstances, la couche superficielle, d'où émanent les actions figuratrices, demeure entièrement libre; tandis que si ces actions émanaient de tous les points de la masse, une modification non symétrique apportée aux parties intérieures de celle-ci en amènerait nécessairement une dans la forme extérieure.

C'est ce qui est confirmé par l'expérience: la condition d'un système solide complètement enveloppé par la masse d'huile serait assez difficile à réaliser; mais on peut en approcher de très-près en introduisant dans la sphère liquide une plaque en fer de forme arbitraire suspendue par un fil de fer très-fin qui la traverse ainsi que la masse d'huile; tant qu'aucun point du bord de cette plaque n'atteint la surface de la masse liquide, celle-ci conserve sa forme sphérique. Dans la rigueur mathématique, la sphéricité doit être, comme nous le verrons plus loin, quelque peu altérée par le fil métallique qui perce la surface en deux points; mais, par suite de la finesse de ce fil, l'altération est tout à fait inappréciable.

Voici un autre fait d'une nature analogue. Dans le cours des expériences, il arrive parfois que des portions du liquide alcoolique se trouvent emprisonnées dans l'intérieur de la masse d'huile, et y forment autant de sphères isolées. Or ces sphères peuvent être placées d'une manière quelconque dans l'intérieur de la masse, sans qu'il en résulte la moindre modification dans la figure extérieure de celle-ci.

Faisons encore pénétrer dans la masse liquide un système solide quelconque; mais donnons maintenant à la masse un volume trop petit pour qu'elle puisse constituer une sphère qui enveloppe complètement ce système. Alors ce dernier atteindra nécessairement la couche superficielle, et, si le principe est vrai, la figure de la masse liquidé devra se modifier, ou, en d'autres termes, ne pourra plus demeurer sphérique. C'est ce qui a lieu en effet, comme on devait s'y attendre: la masse liquide s'étend sur les portions du système solide qui font saillie en dehors de sa surface; elle finit par occuper soit la totalité de ces portions, soit seulement une partie de leur étendue, selon la forme et les dimensions du système solide, et prend ainsi une autre figure d'équilibre. Nous en verrons des exemples plus loin.

Au lieu de faire pénétrer le système solide dans l'intérieur de la masse liquide, mettons-le simplement en contact avec la surface extérieure de celle-ci. Alors une action s'établissant sur un point de la couche superficielle, l'équilibre devra être rompu et la figure de la masse liquide devra encore se modifier. C'est ce qui arrive: la masse s'étend sur la surface qui lui est offerte, et prend par conséquent une figure nouvelle. On pourrait croire que ce cas rentre dans l'un de ceux dont nous venons de parler; car il semble que la masse liquide, en s'étendant sur le système solide pour atteindre la nouvelle figure d'équilibre, doit finir par occuper ou envelopper ce système de la même manière que si l'on avait primitivement fait pénétrer celui-ci dans son intérieur. Il y a effectivement des circonstances dans lesquelles les choses doivent se passer ainsi; mais les expériences que nous allons rapporter font voir qu'il y a d'autres circonstances pour lesquelles le résultat est tout différent.

§ 14. Prenons pour système solide une plaque circulaire mince en fer⁷ portée par un fil de même métal fixé normalement à son centre (fig. 1). Le bout libre de ce fil est taillé en vis, de manière à pouvoir s'engager et être serré dans l'écrou de la tige cylindrique (§ 4); quand le couvercle du vase est en place, le petit système solide se trouve ainsi immergé dans le liquide alcoolique.



Fig. 1

Avertissons ici le lecteur, pour éviter des redites, 1° que tous ceux de nos systèmes solides qui doivent être suspendus dans le liquide alcoolique, s'attachent de la même façon; 2° qu'ils sont tous en fer, pour la raison énoncée dans la note du § 4; 3° qu'avant d'introduire dans le vase l'un quelconque de ces systèmes solides, il faut le mouiller entièrement d'huile, et pour cela il ne suffirait pas de le tremper simplement dans ce liquide, il faut l'en frotter légèrement avec le doigt.

Maintenant, une sphère d'huile étant préalablement réalisée dans le mélange alcoolique, faisons naître l'adhérence entre sa partie supérieure et la face inférieure de notre plaque solide⁸. Aussitôt le contact bien établi, l'huile s'étend rapidement sur la surface qui lui est offerte; mais, ce qui est remarquable, quoique l'on ait pris la précaution de frotter d'huile tout le système, c'est-à-dire les deux faces de la plaque ainsi que son bord, l'huile s'arrête nettement à ce bord sans passer de l'autre côté de la plaque, et présente ainsi une interruption brusque dans la courbure de sa surface.

Dans le cas dont il s'agit, la nouvelle figure que prend la masse est une portion de sphère. Cette portion sera d'autant plus grande relativement à la sphère complète, que le volume de la masse d'huile est plus considérable; mais toujours la courbure s'arrêtera nettement au contour de la plaque (voyez la fig. 2, qui représente la coupe de système solide et de la masse adhérente, pour trois volumes différents de celle-ci).

Quant à la cause de cette singulière discontinuité, on la comprend sans peine: la plaque atteignant par son contour la couche superficielle, il est naturel qu'il se manifeste le long de ce contour quelque chose de particulier, et que la continuité dans la forme cesse là où s'exerce sans transition, sur la couche superficielle, une action attractive étrangère.

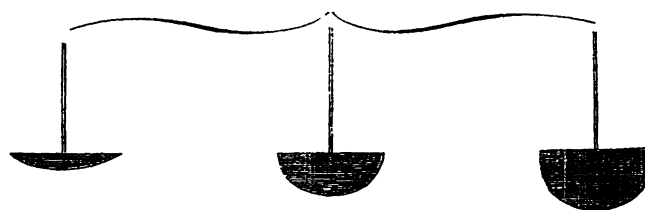


Fig. 2

§ 15. Servons-nous encore de la plaque ci-dessus; mais au lieu de présenter l'une de ses faces à l'extérieur de la sphère d'huile, faisons maintenant pénétrer la plaque par son bord dans l'intérieur de cette sphère⁹. Alors le liquide s'étendra nécessairement sur

⁷ Le diamètre de celle dont je me suis servi était de 4 centimètres. Je mentionne ce diamètre pour fixer les idées; dans nos expériences, les dimensions des systèmes solides sont tout à fait arbitraires, et n'ont d'autres limites que celles qui sont imposées par la grandeur du vase.

⁸ Pour que cette opération puisse s'effectuer avec facilité, il faut d'abord que la sphère d'huile se tienne, dans le liquide ambiant, au-dessous de l'ouverture du couvercle; alors, la plaque étant introduite dans le vase, on n'a plus qu'à l'abaisser à l'aide de la tige qui traverse le bouchon, pour l'amener vers la masse. Si cette dernière n'occupait pas la position dont il s'agit, on l'y conduirait préalablement en la poussant au moyen d'une baguette de verre.

Nous devons faire remarquer que le contact réel entre la plaque et la sphère d'huile ne s'établit pas ordinairement tout de suite: il y a une certaine résistance à vaincre, analogue à celle dont il a été question dans les § 6 et 11; mais, pour la surmonter, il suffit de pousser un peu la sphère liquide avec la plaque; la pression légère qui en résulte détermine bientôt la rupture de l'obstacle et la production de l'adhérence.

⁹ Voici comment s'exécute cette manœuvre. On soutient à quelque distance au-dessus du goulot du cou-

les deux faces du solide, et si le diamètre de la sphère primitive était moindre que celui de la plaque, on verra l'huile former, sur les deux faces dont il s'agit, deux segments sphériques dont les courbures s'arrêteront encore nettement au contour de la plaque. Ces deux segments peuvent être égaux ou inégaux, selon qu'on aura introduit le bord de la plaque dans la sphère liquide de manière que le plan de cette plaque passe, ou non, par le centre de la sphère. Le segment supérieur sera légèrement déformé par l'action du fil de suspension; mais cet effet serait insensible si la plaque était soutenue par un fil très-fin. La fig. 3 représente le résultat de l'expérience avec deux segments inégaux.

La discontinuité dans les courbures est un fait très-général, que nous verrons se reproduire fréquemment dans le cours de nos expériences; il nous conduira plus loin à des conséquences d'un grand intérêt.

§ 16. Ici se place une remarque importante. Quand une figure liquide s'arrête ainsi à un contour solide, on doit la considérer comme une portion d'une d'équilibre plus étendue, qu'on peut poursuivre par la pensée au-delà du contour solide. En effet, l'attraction moléculaire exercée par ce contour ne s'étendant que jusqu'à une distance excessivement petite, tout le reste de la couche superficielle de la masse liquide produit librement ses pressions, et se façonne conséquemment de manière à satisfaire à la formule [2] du § 1; or la loi géométrique à laquelle sa forme est soumise ne peut cesser brusquement au contour en question. C'est ainsi que, dans les expériences des deux paragraphes précédents, les figures qui s'appuient soit sur la face inférieure seulement, soit sur les deux faces de la plaque, sont des segments de sphère, part toujours la petite déformation que le fil solide fait subir au segment supérieur. Nous verrons bientôt qu'à l'aide de systèmes solides convenables, on réalise des figures d'équilibre partielles très variées.



Fig. 3

§ 17. Voici encore un fait qui montre d'une manière assez curieuse que la couche superficielle seule est le siège des actions figuratrices. Si on laisse séjourner pendant deux ou trois jours, une masse d'huile fraîche dans le liquide alcoolique en rétablissant de temps à autre l'égalité des densités (§ 5), puis qu'on soutire la majeure partie de la masse au moyen d'un siphon, on voit, quand cette masse est suffisamment réduite, sa surface former des plis, et si alors on enlève le siphon, la masse restante, qui demeure suspendue dans le liquide ambiant, ne prend plus la figure sphérique; elle conserve un aspect irrégulier, et paraît indifférente à toutes les formes. C'est que, par suite de l'action dissolvante inégale qu'exerce le mélange alcoolique sur les éléments de l'huile (ibid.), les principes solides deviennent prédominants à la surface de celle-ci, et, se condensant au fur et à mesure de l'exhaustion de la masse, finissent par constituer une sorte de pellicule. Ainsi quand la couche superficielle perd une partie de sa liquidité, la masse perd en même temps sa tendance à prendre une figure d'équilibre déterminée.

§ 18 Vérifions maintenant un second principe, celui des pressions exercées par la couche superficielle sur la masse.

Le système solide que nous allons employer, est une plaque circulaire percée (fig. 4). Elle est placée verticalement, et attachée par un point de sa circonférence au fil de fer qui la supporte. Donnons à la sphère d'huile un diamètre moindre que celui de la plaque, et faisons pénétrer celle-ci par son bord dans la masse, suivant une direction

vercle le bouchon qui porte le système de la plaque, de manière, cependant, que celle-ci plonge à une profondeur suffisante dans le mélange alcoolique. On a ainsi la liberté de faire faire à la plaque des mouvements assez étendus, et on l'amène vers la masse liquide. Cette dernière doit, pour cela, occuper préalablement une position convenable. Une fois la masse liquide entamée, on tient la plaque en repos jusqu'à ce que l'action soit terminée, après quoi l'on pose avec précaution le bouchon dans le goulot.

qui ne passe point par le centre de la sphère. L'huile formera d'abord, comme dans l'expérience du paragraphe 15, deux segments sphériques inégaux; mais les choses ne persisteront point dans cet état: on verra le segment le plus convexe diminuer graduellement de volume, et par conséquent de courbure, tandis que l'autre augmentera, jusqu'à ce qu'ils soient devenus parfaitement égaux entre eux.. Une partie de l'huile passe donc par l'ouverture de la plaque pour se porter de l'un des segments liquides vers l'autre, jusqu'à ce que l'égalité ci-dessus soit atteinte.

Or, remarquons-le, une fois l'huile étendue sur les deux faces de la plaque, de manière que la couche superficielle s'appuie sur tout le contour de celle-ci, l'action du système solide est complétée, et les mouvements qui surviennent ensuite dans la masse liquide pour atteindre la forme d'équilibre, ne peuvent plus dès lors être dus qu'à une action émanant de la partie libre de la couche superficielle. C'est donc cette dernière qui chasse le liquide à travers l'ouverture de la plaque du segment le plus courbe vers l'autre, d'où l'on peut conclure que le liquide est soumis à une pression tout au moins de la part de la couche superficielle du segment le plus courbe. Mais il est aisé de voir que la couche superficielle de l'autre segment exerce aussi une pression, qui, seulement, est moindre que la précédente; en effet, si au segment le plus courbe on venait à substituer un segment qui fût, au contraire, moins courbe que l'autre, l'huile serait alors chassée en sens opposé. Il suit de tout cela que la couche superficielle totale de la masse exerce une pression sur le liquide qu'elle renferme, et que l'intensité de cette pression dépend des courbures de la surface libre. En outre, puisque le liquide marche du segment le plus courbe à celui qui l'est moins, on voit que, pour une surface convexe de courbure sphérique, la pression est d'autant plus forte que la courbure est plus prononcée, ou que le rayon de la sphère à laquelle appartient la surface est plus petit.



Fig. 4

Cette influence de la courbure était, aussi bien que l'existence même des pressions, indiquée par la théorie quand il s'agit d'une surface de courbure sphérique convexe, la formule [1] du § 1, qui représente la pression exercée par la couche superficielle en un point quelconque de celle-ci, devient $P + \frac{A}{R}$, puisque, dans ce cas, R' est égal à R ; et comme, pour un même liquide, P et A sont constants, on voit que la pression dont il s'agit est d'autant plus énergique que le rayon R est plus petit, ou, en d'autres termes, que la surface est plus courbe.

Ainsi notre expérience confirme pleinement la théorie, non seulement quant à l'existence des pressions capillaires, mais encore quant à leur dépendance d'avec les courbures.

La relation entre la formule ci-dessus et notre expérience suggère une remarque : le terme P , qui désigne la pression correspondante à une surface plane, est le même pour nos deux segments liquides; or, les pressions se transmettant dans toute la masse, il en résulte que la portion P de la pression due à la couche superficielle de l'un des segments se trouve neutralisée par la même portion P émanée de l'autre segment; par conséquent, les pressions réellement en jeu dans le phénomène que nous venons de décrire, sont simplement exprimées, pour chaque segment, par le terme $\frac{A}{R}$ c'est-à-dire par celui qui dépend de la courbure.

§ 19. Le principe vérifié dans les §§13 à 17 conduit à modifier l'expérience précédente de manière à obtenir un résultat important. L'équilibre une fois produit, ce n'est plus que par son bord extérieur que la plaque percée agit sur la couche superficielle de chacun des deux segments sphériques; tout le reste de cette plaque est donc alors sans influence sur la figure totale. Or il suit de là que celle serait encore la même si l'on rendait l'ouverture plus grande; seulement, plus le diamètre de cette dernière sera

considérable, moins il faudra de temps pour que l'égalité entre les deux courbures soit établie. Enfin, l'on doit pouvoir, sans changer la figure d'équilibre, agrandir l'ouverture jusque près du bord de la plaque, ou, eu d'autres termes, réduire le système solide à un simple anneau de fil de fer mince.

C'est ce que l'expérience confirme; mais, pour la mettre à exécution, l'on ne pourrait pas se borner, comme précédemment, à faire pénétrer le système solide dans une sphère d'huile d'un diamètre moindre que celui de ce même système, et à laisser ensuite agir les forces moléculaires; car le fil métallique, à cause de son peu d'épaisseur, n'obligerait pas le liquide à s'étendre de manière à adhérer à la totalité de l'anneau. La masse demeurerait alors traversée par une partie le celui-ci, et sa forme sphérique ne serait pas sensiblement altérée si le fil métallique est mince: pour obtenir la figure cherchée, on commence par donner à la sphère d'huile un diamètre un peu supérieur à celui de l'anneau métallique; puis on introduit ce dernier dans la masse de manière qu'il soit complètement enveloppé; enfin, à l'aide de la petite seringue en verre (§ 9), on enlève graduellement du liquide à la masse¹⁰. Alors celle-ci diminuant de volume, sa surfaces appuie bientôt sur tout le contour de l'anneau, et, le volume continuant à diminuer, la forme lenticulaire se manifeste. On peut ensuite, par de nouvelles soustractions de liquide, réduire les courbures des deux surfaces au degré que l'on juge convenable. On obtient de cette manière une belle lentille bi-convexe, entièrement liquide à l'exception de sa circonférence. De plus, en vertu de l'excès considérable de l'indice de réfraction de l'huile d'olive sur celui du mélange alcoolique, la lentille dont il s'agit possède toutes les propriétés des lentilles de convergence: par exemple, elle grossit les objets que l'on regarde au travers, et l'on peut faire varier ce grossissement volonté, en enlevant ou en ajoutant du liquide à la masse.

Notre figure liquide réalise donc ce qu'on ne pourrait obtenir avec les lentilles de verre, c'est-à-dire qu'elle constitue une lentille à courbure et à grossissement variables.

Celle que j'ai formée avait un diamètre de sept centimètres, et l'épaisseur du fil métallique était d'environ un demi-millimètre. On pourrait employer avec le même succès un fil bien plus mince; mais alors l'appareil deviendrait incommode par sa trop grande facilité à se déformer.

En agissant avec précaution, on peut diminuer les courbures de la lentille jusqu'à les rendre presque nulles: j'ai pu réduire, par exemple, la lentille que j'ai formée et dont le diamètre était, comme je l'ai dit, de sept centimètres, à n'avoir plus que deux ou trois millimètres d'épaisseur.

§ 20. Nous venons de montrer l'accord de l'expérience avec la théorie dans le cas des surfaces convexes de courbure sphérique; nous allons voir que l'accord subsiste de même dans le cas des surfaces planes et des surfaces concaves de courbure sphérique.

Servons-nous d'un système solide formé d'une large bande de fer courbée circulairement de manière à constituer un cylindre creux, et attachée au fil de fer de suspension par un point de sa surface extérieure (fig. 5). Pour ne pas amener dans l'expérience la production de phénomènes accessoires, nous supposerons que la largeur de la bande métallique est inférieure au diamètre du cylindre formé par cette même bande, ou qu'elle lui est tout au plus égale. Faisons adhérer la masse d'huile avec la surface intérieure de ce système, et supposons que le liquide soit en quantité assez considérable pour qu'il fasse alors saillie au dehors du cylindre. Dans ce cas, la masse présen-



Fig. 5

¹⁰ On introduit le bec de l'instrument par l'ouverture qu'on a ménagée au haut du vase en faisant glisser (§ 9) la plaque couvercle.

tera, de chaque côté, une surface convexe de courbure sphérique, et les courbures de ces deux surfaces seront égales. Cette forme de l'ensemble est une conséquence de ce que nous avons vu précédemment, et nous ne devons pas nous y arrêter; mais elle va nous servir comme point de départ, pour arriver aux autres figures dont nous avons besoin.

Appliquons le bec de la seringue à l'une des surfaces convexes ci-dessus, et enlevons graduellement du liquide. Les deux surfaces diminueront alors en même temps de courbure, et, en opérant avec ménagement, nous arriverons ainsi à les rendre parfaitement planes; or nous savons (§ 2) qu'une surface plane satisfait aussi à la condition de l'équilibre.

Appliquons ensuite le bec de l'instrument à l'une de ces surfaces planes, et enlevons encore une petite quantité de liquide. Alors les deux surfaces se creuseront simultanément, et constitueront deux surfaces concaves de courbure sphérique, dont les bords s'appuient sur ceux de la bande métallique, et dont les courbures sont les mêmes. Enfin, par de nouvelles extractions de liquide, les courbures des deux surfaces deviendront de plus en plus fortes, en demeurant toujours égales entre elles.

Cette expérience conduit évidemment aux conséquences suivantes: puisque la surface plane laissée libre s'enfonce spontanément dès que celle à laquelle on applique l'instrument devient concave, il faut en conclure que la couche superficielle appartenant à la première exerçait une pression, qui se trouvait contre-balancée par une force égale émanée de la couche superficielle plane opposée, mais qui cesse de l'être et qui chasse le liquide, dès que cette couche opposée commence à se creuser. De plus, puisqu'une nouvelle extraction de liquide détermine une nouvelle rupture d'équilibre, de manière que la surface concave opposée à celle sur laquelle on agit directement manifeste un nouvel enfoncement spontané lorsque l'autre surface augmente de courbure, il en résulte que la couche superficielle concave appartenant à la première exerçait encore une pression, qui, d'abord, était neutralisée par une pression égale provenant de l'autre couche concave, mais qui devient prépondérante et chasse de nouveau le liquide, lorsque cette autre couche augmente de courbure.

L'expérience rend donc visible: 1° qu'une surface plane détermine une pression sur le liquide; 2° qu'une surface concave de courbure sphérique détermine aussi une pression; 3° que cette dernière est inférieure à celle qui correspond à une surface plane; 4° qu'elle est d'autant moindre que la concavité est plus prononcée, ou que le rayon de la sphère à laquelle appartient la surface est plus petit.

Or tous ces résultats étaient encore annoncés par la formule [1]: puisqu'il s'agit toujours de surfaces de courbure sphérique, on a, comme précédemment, $R' = R$; en outre, les surfaces considérées étant concaves, le rayon R est négatif (§ 1); la formule devient conséquemment $P - \frac{A}{R}$. Mais on sait, d'après la théorie de Laplace, que le terme P est toujours très-grand relativement au suivant; la pression totale exprimée par cette formule est donc nécessairement positive, et moindre que P ; de plus, on le voit, elle est d'autant plus faible que le rayon R est plus petit, ou, en d'autres termes, que la surface est plus concave; elle se réduit d'ailleurs à P quand le rayon R est infini, c'est-à-dire quand la surface est plane.

Dans l'application de cette même formule à l'expérience, on peut, de même que dans le cas du § 18, remarquer que la portion P des pressions se trouve neutralisée, et ne regarder ainsi comme force agissante à chacune des deux surfaces que celle qui est représentée par le terme $-\frac{A}{R}$; or ce terme étant négatif, la force dont il s'agit est une suction, et celle-ci est d'autant plus énergique que la courbure est plus forte.

§ 21. La figure que nous venons d'obtenir, constitue une lentille bi-concave à cour-

bures égales, et elle jouit de toutes les propriétés des lentilles de divergence, c'est-à-dire qu'elle rapetisse les objets que l'on regarde au travers, etc. En outre, comme on peut augmenter ou diminuer la courbure des deux surfaces par degrés aussi petits qu'on le veut, il en résulte que l'on a ainsi une lentille de divergence à courbure et à effets variables.

Après avoir formé une lentille liquide de convergence et une lentille liquide de divergence, il m'a paru curieux de combiner ces deux espèces de lentilles, afin d'en former une lunette liquide. Pour cela, j'ai d'abord substitué à l'anneau de fil de fer du paragraphe 19, une plaque circulaire de même diamètre percée d'une grande ouverture (fig. 6); cette plaque étant coupée au tour, j'étais certain de l'avoir parfaitement circulaire, tandis qu'il serait bien difficile de remplir la même condition avec un simple fil de fer courbé. En second lieu, j'ai pris, pour la partie solide de la lentille bi-concave, une bande d'environ 2 centimètres de largeur et courbée suivant un cylindre de $3\frac{1}{2}$ centimètres de diamètre. Ces deux systèmes ont été assemblés comme le représente la fig. 7, de manière que tout l'appareil étant suspendu verticalement dans le mélange alcoolique par le fil de fer a, et les deux lentilles liquides étant formées, leurs deux centres fussent à la même hauteur, et distants l'un de l'autre de 10 centimètres. Dans cette disposition, on ne peut pas ajuster la lunette en modifiant la distance entre l'objectif et l'oculaire; mais on parvient au



Fig. 6

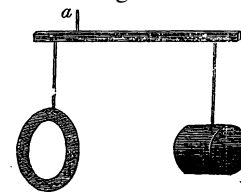


Fig. 7

même but en faisant varier les courbures de ces deux lentilles. A l'aide de quelques tâtonnements, je suis aisément parvenu à obtenir ainsi une excellente lunette de Galilée, grossissant environ deux fois les objets éloignés, comme les lorgnettes de spectacle ordinaires, et donnant des images parfaitement nettes et extrêmement peu irisées. La fig. 8, qui représente une coupe du système, montre l'ensemble des deux lentilles. On comprend que la lentille concave doit être très-rapprochée de la face du vase par laquelle on regarde; c'est pourquoi le fil de fer est plus éloigné de cette lentille que de l'autre.

§ 22. Voici enfin une vérification d'un genre tout différent, relative à un autre point encore. Ainsi qu'on le sait, l'ascension des liquides pesants dans les tubes dont ils peuvent mouiller les parois ne prend quelque développement que lorsque ces tubes ont de très-petits diamètres intérieurs, d'où est venue la dénomination de phénomènes capillaires, et la pesanteur établit toujours une limite à la hauteur de la colonne soulevée. Mais si l'on neutralise l'action de la pesanteur, ces restrictions doivent disparaître, et le liquide doit pouvoir monter indéfiniment dans un tube d'un diamètre quelconque.

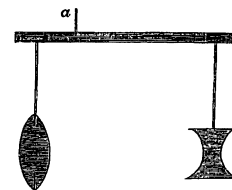


Fig. 8

Il m'a paru curieux d'essayer cette application de mon procédé. On conçoit d'abord qu'il faut maintenir l'orifice supérieur du tube au-dessous de la surface du liquide alcoolique qui remplit le vase, afin que, tout se passant au sein de ce liquide, la pesanteur ne puisse exercer aucune influence sur le phénomène.

Avec cette condition, l'expérience paraît très-simple; il semble qu'il suffit de procéder de la manière suivante:

1° former, dans le liquide alcoolique, une sphère d'huile d'un volume convenable, les deux liquides ayant la même densité; 2° amener cette sphère près du fond du vase;

3° prendre un tube de verre d'un diamètre quelconque, mais d'une longueur telle qu'en supposant son extrémité inférieure en contact avec le haut de la masse d'huile, son extrémité supérieure n'atteigne pas la surface du liquide alcoolique; 4° mouiller parfaitement d'huile l'intérieur de ce tube; 5° enfin introduire ce même tube verticalement dans le vase, l'y enfoncer jusqu'à ce qu'il touche la masse d'huile, et le maintenir, par quelque moyen, immobile dans cette position.

§ 23. C'est bien à peu près ainsi, en effet, que l'expérience doit se faire; mais il est nécessaire d'employer certaines précautions accessoires qui facilitent les opérations, et sans lesquelles on obtiendrait rarement un résultat complet.

En premier lieu, vu la nature des phénomènes que l'on veut observer, on comprend qu'il est avantageux de remplacer le vase à parois planes qui nous a servi jusqu'ici, par un appareil ayant moins de largeur et plus de hauteur; celui dont j'ai fait usage est une grande éprouvette en verre, large de 10 centimètres et haute de 55.

En second lieu, une égalité parfaite entre les densités de l'huile et du liquide ambiant est assez longue à obtenir; il est plus commode de faire en sorte que l'huile ait un très-petit excès de densité par suite duquel elle descende d'elle-même très-lentement au fond du vase, où l'on aura placé préalablement un morceau d'étoffe de coton (§ 9); si l'excès de densité est extrêmement faible, il aura peu d'influence en présence de l'action des forces moléculaires.

En troisième lieu, pour que le tube une fois introduit dans l'appareil s'y soutînt dans la position convenable, j'ai employé le moyen simple que voici: près de l'extrémité supérieure du tube, on a enroulé un fil de cuivre, en le tordant ensuite avec une pince pour le serrer, mais de manière qu'il restât deux bouts libres d'une longueur suffisante; on a relevé obliquement ces deux bouts libres, et l'on en a replié les extrémités en forme de crochets; ceux-ci étant posés sur le bord supérieur du vase cylindrique, servent ainsi à suspendre le tube dans l'intérieur de ce vase. En outre, pour empêcher que le tube n'éprouvât des balancements incommodes, on a attaché, vers son milieu, et par le même moyen, un second fil de cuivre dont les bouts n'étaient point repliés en crochets et faisaient ressort contre la paroi intérieure du vase¹¹ de cette façon, le tube se maintient immobile dans l'axe du système. Ajoutons que la longueur des fils de cuivre à crochets doit être telle que lorsque le tube est placé, son orifice inférieur atteigne le haut de la sphère d'huile qui repose sur le fond du vase.

En quatrième lieu, il faut faire garnir l'extrémité inférieure du tube d'un collet en fer, muni lui-même à son contour inférieur, d'un rebord mince d'environ 3 millimètres de largeur. Cette addition a pour objet de s'opposer à ce que la masse d'huile s'élève plus ou moins, et d'une manière irrégulière, sur la surface extérieure du tube; ici, comme dans l'expérience du § 14, le petit rebord arrête toute ascension extérieure de l'huile, et oblige la masse à prendre sous le tube une position parfaitement symétrique.

En cinquième lieu, pour pouvoir apprécier la vitesse du mouvement de la colonne liquide ascendante et les variations de cette vitesse, on marque, avec de l'encre, sur le tube, des traits perpendiculaires à sa longueur et également espacés, de décimètre en décimètre, par exemple, à partir de l'orifice inférieur; ces traits sont tracés tout autour du verre, afin de rendre l'observation plus facile.

En sixième lieu, si, avant de plonger dans le vase le tube muni de tous les accessoires ci-dessus, on se borne à en mouiller d'huile la surface intérieure, on voit bientôt se manifester un phénomène qui m'a longtemps embarrassé: la couche d'huile se re-

¹¹ Il est nécessaire d'employer ici du fil de cuivre, et non du fil de fer: car ce dernier pourrait rayer le vase à l'intérieur, et l'on sait qu'il suffit souvent d'une raie imperceptible formée sur la paroi interne d'un vase de verre, pour occasionner la rupture de celui-ci.

tire irrégulièrement pour s'accumuler en certains endroits et faire place, en d'autres, au liquide alcoolique, de sorte que la continuité de la couche huileuse est détruite. C'est en vain que l'on prend tous les soins possibles pour huiler parfaitement le tube à l'intérieur; on peut même y faire préalablement bouillir de l'huile, l'effet ci-dessus ne s'en produit pas moins. Après plusieurs essais infructueux pour parer à cet inconvénient, j'ai imaginé le procédé suivant, qui donne une réussite complète. On ferme avec un bouchon de liège une des extrémités du tube, et l'on remplit celui-ci de saindoux fondu et très-chaud, qu'on y laisse séjourner pendant quelques minutes; on vide ensuite le tube, on le débouche, et, le suspendant verticalement, on le laisse égoutter, jusqu'à ce que la couche légère de saindoux qui y demeure adhérente soit entièrement refroidie; on a soin de le retourner de temps à autre, afin de rendre plus uniforme l'épaisseur de la couche graisseuse. Le tube étant ainsi préparé, on le bouche de nouveau, on le remplit d'huile, on le vide immédiatement, on le débouche et on le plonge aussitôt dans le vase; la couche d'huile retenue alors par son adhérence avec le saindoux ne se divise plus.

§ 24. Lorsque les choses sont organisées de la sorte, l'expérience a un plein succès: dès que l'adhérence est établie entre la sphère d'huile et le rebord qui garnit l'orifice du tube, on voit l'huile s'élever graduellement dans l'intérieur de ce dernier jusqu'à en atteindre l'extrémité supérieure, bien que ce même tube ait un grand diamètre, et qu'on lui ait donné toute la longueur que permet la disposition de l'appareil. Pendant son ascension, la colonne d'huile se montre terminée par une surface hémisphérique concave. Son mouvement est un mouvement retardé; nous en connaissons bientôt la raison.

Dans l'une de mes expériences, le tube avait 14 millimètres de diamètre intérieur, et 42 centimètres de longueur; le diamètre de la sphère d'huile était d'environ 7 centimètres, et cette masse possédait un si petit excès de densité, qu'elle avait employé plus d'un quart d'heure à descendre jusqu'au fond du vase.

Voici, dans ces conditions, les temps employés par le sommet de la colonne liquide à parcourir les décimètres successifs de la longueur du tube:

1 décimètre	1' 47"
2 décimètre	3' 37"
3 décimètre	6' 37"
4 décimètre	9' 0"

On voit que ces temps vont en croissant, et qu'ainsi, comme je l'ai dit plus haut, le mouvement est retardé.

§ 25. Cherchons à nous rendre raison de cette particularité, et, pour cela, examinons quelles sont les actions mises en jeu dans le mouvement ascensionnel du liquide.

Pendant l'accomplissement du phénomène, le tube est occupé par l'ensemble de deux colonnes, l'une inférieure formée d'huile et qui va en augmentant de longueur, l'autre supérieure formée de liquide alcoolique et qui va, au contraire, en diminuant; mais les densités des deux liquides étant à fort peu près égale, on peut regarder la somme des masses de ces deux colonnes, ou la masse totale à mouvoir dans l'intérieur du tube, comme ne variant pas sensiblement. D'un autre côté, la force qui produit l'ascension de l'huile, est une force continue, et, de plus, croissante. En effet, elle résulte de la différence des pressions respectivement exercées par la surface convexe de la masse attachée à l'orifice inférieur du tube et par la surface concave qui constitue le sommet de la colonne; or cette dernière surface conserve la même courbure, et détermine, par conséquent, la même pression, pendant toute la durée du phénomène, tandis que la première, par la diminution graduelle de la masse qu'elle enveloppe, prend une

courbure de plus en plus forte, et détermine ainsi une pression de plus en plus intense.

Maintenant la force dont il s'agit s'exerçant sur une masse invariable, tend nécessairement à produire un mouvement accéléré; mais il y a dans le système une résistance qui croît avec la hauteur de la colonne d'huile, et qui, par suite, tend au contraire à rendre le mouvement retardé. Cette résistance naît du frottement de la double colonne qui occupe le tube contre la couche d'huile adhérente à la paroi intérieure de celui-ci; le frottement de la partie huileuse de la colonne totale est évidemment beaucoup plus fort que celui de la partie alcoolique, et comme la résistance due au premier croît avec la longueur de la colonne d'huile, on comprend que la résistance totale qui provient des deux frottements va aussi en croissant. Le mouvement tend donc, d'une part, à être accéléré, et, de l'autre, à être retardé, et l'on admettra sans peine que la seconde influence peut l'emporter sur la première.

A la rigueur, dans l'appréciation de la force qui produit le mouvement ascensionnel, il faudrait considérer, outre l'action moléculaire de l'huile sur elle-même, celle du liquide alcoolique sur lui-même, et enfin l'action mutuelle des deux liquides. Mais il ne s'agit ici que de l'effet des courbures; or, aux surfaces de séparation des deux liquides, les courbures ont des sens opposés, suivant qu'on les regarde comme appartenant à l'un ou à l'autre de ces liquides, d'où il résulte que les actions qui en proviennent sont de même sens: par exemple, à la masse adhérente sous le tube, la surface de l'huile étant convexe, de sorte que son rayon de courbure est positif, l'action due à la courbure est dirigée à l'intérieur de l'huile (§ 1), et la surface du liquide alcoolique étant concave, ce qui rend son rayon négatif, l'action que détermine la courbure est dirigée à l'extérieur du liquide en question et, par suite, encore à l'intérieur de l'huile. Il est clair, de plus, que ces deux actions qui s'ajoutent sont, en chaque point, dans le même rapport; il suffit donc, pour la simplicité des raisonnements, d'en considérer une seule, et l'on peut prendre à volonté celle de l'huile sur elle-même ou celle du liquide alcoolique sur lui-même. Quant à l'action mutuelle des deux liquides, elle ne fait que diminuer, dans un rapport évidemment constant aussi, la somme des deux précédentes, et par conséquent on peut la négliger.

§ 26. Comme on l'a vu plus haut, dans l'expérience telle que je l'ai décrite, il y a une cause qui empêche d'apercevoir l'effet simple des forces capillaires, effet qui devrait donner lieu à un mouvement accéléré de la colonne. Mais on peut atténuer l'influence de cette cause perturbatrice; il suffit pour cela d'exécuter l'expérience dans des conditions inverses des précédentes, c'est-à-dire en remplissant le vase d'huile et en substituant à la sphère d'huile une sphère de liquide alcoolique. En effet, il faudra alors que la paroi intérieure du tube soit mouillée d'une couche de ce dernier liquide, et les deux parties de la colonne ascendante frottant contre cette couche, on évitera ainsi le frottement si résistant de l'huile contre elle-même. Dans cette disposition de l'expérience, les frottements exercés par les deux parties de la colonne étant, pour la partie inférieure celui du liquide alcoolique contre lui-même, et, pour la partie supérieure, celui de l'huile contre ce même liquide, la différence entre ces deux frottements, quel qu'en soit le sens, sera nécessairement beaucoup moindre que dans le cas précédent; d'où il suit que la résistance totale approchera beaucoup plus d'être indépendante de la hauteur de la partie inférieure de la colonne; on peut donc s'attendre à obtenir, dans ce cas, un mouvement accéléré.

§ 27. Essayons de soumettre ces conclusions à l'épreuve de l'expérience. Mais remarquons auparavant que le changement dans les conditions du phénomène en nécessite aussi dans les opérations préalables. Et d'abord pour que la sphère alcoolique, après être lentement descendue dans l'huile ambiante, ne puisse contracter d'adhérence

avec le fond du vase, on dépose d'avance sur ce fond un disque de fer que l'on a soigneusement frotté d'huile.

En second lieu, la paroi intérieure du tube doit évidemment être mouillée d'une couche de liquide alcoolique; mais, si l'on n'emploie un moyen particulier, cette couche se divise, comme se divise la couche d'huile dans l'expérience précédente quand on n'a pas recours à l'enduit de saindoux. Le moyen que je vais indiquer a une efficacité complète: après avoir bouché le tube à l'une de ses extrémités, on le remplit d'une solution assez épaisse de gomme arabique, puis on le vide, on le débouche, et on le laisse égoutter, en le retournant plusieurs fois pour que la couche gommeuse prenne une épaisseur égale partout, jusqu'à ce que cette couche soit parfaitement sèche¹²; alors après l'avoir bouché de nouveau on le remplit de liquide alcoolique que l'on en fait écouler immédiatement, on le débouche et on le plonge à l'instant dans l'huile du vase.

Enfin il faut encore empêcher la masse alcoolique de s'élever en partie sur la surface extérieure du tube, et, pour cela, il suffit que l'extrémité inférieure de celui-ci soit garnie, comme dans l'expérience précédente, d'un collet en fer; seulement ce collet doit être sans rebord, et il faut éviter soigneusement que de petites portions de la solution gommeuse ci-dessus ne s'attachent à sa sur face; il est bon, en outre, de le frotter d'huile, ce que l'on fera quand on aura terminé l'opération de la couche gommeuse.

Il est inutile d'ajouter que le tube doit être muni des fils de cuivre destinés à en assurer la position et des traits à l'encre qui servent à observer la marche du sommet de la colonne.

§ 28. Lorsque toutes ces dispositions sont prises, que le tube est en place et atteint par son extrémité inférieure la sphère alcoolique, le liquide qui forme celle-ci commence aussitôt à s'élever dans le tube, et son mouvement est en effet accéléré. Voici les résultats obtenus avec un tube de 15 millimètres de diamètre intérieur et de 42 centimètres de longueur, la sphère alcoolique ayant à peu près le même diamètre que la sphère d'huile de l'expérience précédente et ne possédant également qu'un très excès de densité, le tube était partagé en demi-décimètres

1 demi-décimètre	54"
2 demi-décimètre	48"
3 demi-décimètre	46"
4 demi-décimètre	43"
5 demi-décimètre	42"
6 demi-décimètre	41"
7 demi-décimètre	39"
8 demi-décimètre	37"

Il y a un grand nombre d'années que j'ai effectué ces expériences d'ascension capillaire; or j'ai gardé le vague souvenir d'un fait dont je n'ai point pris note alors: je crois avoir essayé aussi avec un tube de longueur analogue, mais dont le diamètre intérieur n'était que de 5mm environ, et avoir constaté que le liquide n'y montait pas, ou s'arrêtait bientôt. La lenteur du mouvement ascensionnel, dans les expériences précédentes, montre que les forces qui produisent ce mouvement sont faibles, et, dans un tube étroit, les résistances deviennent sans doute suffisantes pour empêcher leur action. Si donc ma mémoire ne me trompe pas, il faut, pour réussir, employer des tubes larges, comme ceux dont j'ai parlé.

§ 29. Revenons aux figures d'équilibre. Dans l'expérience du paragraphe 20, nous

¹² J'ai rencontré certains tubes qui n'exigeaient pas cette préparation, et qu'il suffisait de mouiller directement à l'intérieur avec le liquide alcoolique, après les avoir parfaitement nettoyés. Il sera, du reste, toujours plus sûr de faire usage de l'enduit gommeux.

avons obtenu une figure qui présentait des surfaces planes. Celles-ci étaient au nombre de deux, parallèles entre elles, et limitées par des périphéries circulaires; mais il est évident que ces conditions ne sont pas nécessaires pour que des surfaces planes puissent appartenir à une masse liquide en équilibre. On comprend que les formes des contours solides doivent être indifférentes, pourvu qu'elles constituent des figures planes. On comprend, en outre, que le nombre et les directions relatives des surfaces planes peuvent être quelconques, puisque de telles circonstances n'influent en rien sur les pressions qui correspondent à ces surfaces, pressions qui demeureront toujours égales entre elles. Enfin l'expérience du § 19 nous a montré qu'il suffit d'un simple fil métallique pour établir la discontinuité entre les deux portions de surface qui s'appuient sur lui. Nous pourrions donc réaliser le passage brusque entre une surface plane et une autre au moyen d'un fil de fer représentant l'arête de l'angle d'intersection de ces deux surfaces.

Tout cela nous conduit à cette curieuse conséquence, que l'on doit pouvoir former des polyèdres entièrement liquides à l'exception de leurs seules arêtes. Or, c'est ce que l'expérience vérifie pleinement: si l'on prend pour système solide une charpente en fil de fer représentant l'ensemble des arêtes d'un polyèdre quelconque, et que l'on fasse adhérer à cette charpente une masse d'huile d'un volume convenable, on obtient, en effet, d'une manière parfaite, le polyèdre dont il s'agit, et l'on a ainsi le curieux spectacle de parallélépipèdes, de prismes, etc., formés d'huile, et qui n'ont de solide que leurs arêtes seules. La fig. 9 représente la charpente du cube avec son fil de suspension, lequel doit naturellement être plus gros

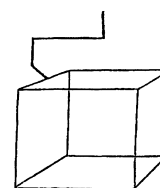


Fig. 9

que ceux qui constituent les arêtes. Quant aux dimensions, je dirai que les arêtes de ma charpente cubique avaient 7 centimètres de longueur; ici, du reste, comme toujours, les dimensions sont tout à fait arbitraires.

§ 30. Pour réaliser l'un de ces polyèdres liquides, on donne d'abord à la masse d'huile un volume assez grand pour quelle puisse envelopper la charpente, et l'on y fait pénétrer cette dernière, s'il le faut, on pousse la masse dans un sens ou dans un autre avec une spatule de verre préalablement bien nettoyée. Cela fait, on enlève de l'huile au moyen de la petite seringue, et l'on voit bien tôt la surface de la masse s'appuyer à la fois sur toutes les arêtes solides; toutes les faces de la figure sont alors convexes. En continuant l'action de la seringue, on voit cette convexité diminuer partout en même temps, et, en opérant par degrés convenables, on arrive à rendre toutes les faces exactement planes¹³.

Je dois insister à cet égard sur l'ajustement exact des densités: la plus légère différence entre elles suffit pour altérer les surfaces d'une manière sensible. En outre, afin d'atteindre une régularité parfaite, il est souvent utile, non seulement dans le cas actuel, mais, en général, dans celui de toute figure un peu volumineuse, d'employer une précaution dont je n'ai pas encore parlé. Il peut arriver, par suite des petites actions dissolvantes résultant des additions d'alcool pur ou de mélange à 16° toujours nécessaires au commencement d'une série d'expériences pour l'ajustement des densités, que l'huile qui constitue la masse perde de son homogénéité; alors les portions plus chargées d'alcool et conséquemment moins denses, gagnent le haut de la figure et tendent à monter, tandis que les portions plus denses gagnent le bas et tendent à de-

¹³Pour avoir à enlever moins d'huile et abrégé ainsi les opérations, on peut encore s'y prendre comme suit: on ne donne à la masse d'huile qu'un volume un peu supérieur à celui du polyèdre qu'elle doit former, puis on l'amène dans la charpente, et, à l'aide d'une spatule de fer qu'on y fait pénétrer, on l'oblige sans peine à s'attacher successivement à toute la longueur des arêtes solides; enfin on épuise l'excès d'huile.

scendre. Dans ce cas, avec la charpente cubique, par exemple, les faces latérales de la figure pourraient se montrer sensiblement planes, et les faces supérieure et inférieure être encore légèrement convexes.

Pour parer à cet inconvénient, on introduit dans la masse une spatule de fer qu'on y promène dans tous les sens pendant longtemps et avec ménagement, de manière à ne pas déformer la charpente par des chocs; l'opération doit s'effectuer avant qu'on ait enlevé tout l'excès d'huile. Quand on retire la spatule, elle entraîne avec elle une petite quantité d'huile qu'elle abandonne en sortant du mélange alcoolique, et qu'on absorbe ensuite avec la seringue. Disons encore que la manoeuvre de la spatule détermine parfois l'introduction de bulles alcooliques dans l'intérieur de la masse d'huile; on les aspire aussi avec la seringue.

Enfin, quand l'expérience doit se faire devant un auditoire nombreux, on établit une petite hétérogénéité dans le mélange alcoolique (§ 10), et, si la température s'élève ou s'abaisse, il suffit de faire descendre ou monter d'une certaine quantité le polyèdre liquide en enfonçant ou retirant la tige cylindrique; on amène ainsi ce polyèdre dans une couche dont la densité moyenne est égale à celle de l'huile.

§ 31. Présentons une dernière remarque: les polyèdres qu'on veut réaliser doivent ne pas avoir d'angles dièdres rentrants; l'arête solide d'un angle de cette espèce ne peut rendre indépendantes les deux surfaces qui y aboutissent, car, à moins que le fil solide ne soit très-gros ou l'angle très-obtus, ces deux surfaces communiqueraient l'une avec l'autre, et dès lors, sur toute la ligne suivant laquelle elles se joindraient, la courbure, dans le sens transversal, serait extrêmement forte, ce qui déterminerait une succion énergique. Il est aisé de voir, en effet, que, dans la petite portion de surface qui raccorderait les deux faces planes, les courbures principales seraient, d'une part, la courbure nulle suivant la longueur du fil, et, d'autre part, la forte courbure transi en question, la première aurait conséquemment un rayon infini, et la seconde, à cause de sa forme concave, un rayon négatif; le terme dépendant des courbures dans la formule [1] du § 1 se réduirait donc à $-\frac{A}{2R}$, c'est-à-dire représenterait (§ 20) une succion, comme je l'ai dit, et, par suite de la petitesse de R, cette succion serait très-forte; le liquide alors franchirait l'arête, et s'accumulerait en plus ou moins grande quantité dans l'angle rentrant.

Aussi est-ce ce dernier résultat que montre l'expérience: quand on essaie de réaliser un semblable polyèdre, on rend aisément planes toutes les faces sauf les deux qui devraient former l'angle rentrant, et celui-ci demeure partiellement rempli par de l'huile qui y présente une surface courbe unique. Cette surface, qui doit déterminer la même pression que les faces planes, est nécessairement à courbure moyenne nulle, et, par conséquent, en chacun de ses points, les deux courbures principales sont égales, mais l'une convexe et l'autre concave (§ 2).

§ 32. De même qu'avec nos lentilles d'huile nous avons réalisé l'effet d'une lunette de Galilée, de même un prisme triangulaire d'huile peut être employé à produire le phénomène de la dispersion: l'on obtient ainsi un beau spectre solaire à l'aide d'un prisme à faces liquides. Seulement, comme l'effet n'est dû qu'à l'excès de l'action réfringente de l'huile sur celle du liquide alcoolique, il faut, pour avoir un spectre bien étalé, que l'angle réfringent du prisme soit obtus: un angle de 110° donne un très-bon résultat. En outre, il faut évidemment que les faces du prisme soient parfaitement planes, ce qui exige une charpente travaillée avec soin.

Pour terminer ce qui concerne les polyèdres liquides, disons que M. Mach, dans une conférence dont il sera question au § 210 bis, avance qu'on peut réaliser de semblables polyèdres dans l'air, pourvu qu'on leur donne des dimensions minimales: d'après lui, si

l'on construit, par exemple, en fil métallique très-fin, une charpente cubique d'environ $1\frac{1}{2}$ lignes (3mm) de côté, qu'on la plonge dans l'eau, qu'on l'en retire, et qu'avec un morceau de papier à filtre on enlève l'excès de liquide, on obtient un petit cube d'eau.

CHAPITRE II.

Considérations relatives aux figures d'équilibre en général. Figures d'équilibre de révolution: sphère, plan, cylindre, ondulatoire, caténoïde, et nodoïde ; étude expérimentale à l'aide du premier procédé; résultats des géomètres.

§ 33. Avant de nous occuper d'une manière spéciale des figures d'équilibre autres que la sphère et le plan et de leur réalisation par notre premier procédé, généralisons une remarque dont nous avons déjà fait, dans le chapitre précédent, quelques applications partielles. Pour plus de clarté, reprenons l'expression (§ 1) de la pression, rapportée à l'unité de surface, qu'exerce un élément de la couche superficielle, savoir

$$P + \frac{A}{2} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right).$$

Si, au point considéré, les courbures principales $1/R$ et $1/R'$ sont l'une et l'autre convexes, et, par suite, positives, ou bien si elles sont de sens contraires, mais que la convexe l'emporte sur la concave, le second terme de la formule ci-dessus est positif, et conséquemment la pression totale, au point dont il s'agit, est supérieure à P , c'est-à-dire à celle d'une surface plane. La figure d'équilibre est alors à courbure moyenne finie et positive.

Si les courbures principales sont toutes deux concaves et ainsi négatives, ou si, l'une étant concave et l'autre convexe, la première est en excès, le second terme de la formule est négatif, et, par conséquent, la pression totale au point considéré est inférieure à celle d'une surface plane. Dans ce cas, la figure d'équilibre est à courbure moyenne finie et négative. En outre, puisque la pression P se trouve toujours neutralisée d'elle-même ainsi que je l'ai fait observer (§§18 et 20), on peut regarder l'action de la couche superficielle comme constituant une succion.

Enfin si les deux courbures principales sont égales et de sens opposés, ce qui annule le terme en question, la pression se réduit à P , ou à celle d'une surface plane; c'est le cas des surfaces à courbure moyenne nulle.

Il est inutile d'ajouter que si l'une des courbures principales est nulle, le signe du terme est déterminé, ainsi que le sens de l'action, par le signe de l'autre courbure principale.

§ 34. Tout cela étant compris, nous pouvons pour suivre. A en juger uniquement par l'expérience, la sphère est la seule figure d'équilibre possible à l'état complet, avec une masse finie de liquide; en effet, une masse d'huile entièrement libre dans le liquide alcoolique se façonne invariablement en sphère, et si on la déforme par un moyen quelconque et qu'on l'abandonne ensuite à elle-même, elle reprend toujours la figure sphérique. Cela revient à dire que la sphère est la seule surface à courbure moyenne constante qui soit fermée, et qu'ainsi toutes les autres ont des dimensions infinies dans certains sens. Cependant cette déduction, bien qu'extrêmement probable, n'est pas tout à fait concluante: une surface fermée différente de la sphère et à courbure moyenne constante pourrait exister, sans que la figure qu'elle représente fût réalisable par l'expérience; si, par exemple, cette figure, dans son entier, était à l'état d'équilibre instable, genre d'équilibre dont nous constaterons de nombreux cas, il est clair que notre masse d'huile ne la prendrait jamais. Les géomètres n'ont pu, que je sache, résoudre complètement la question; seulement, en premier lieu, il est aisé de faire voir que s'il y a une surface fermée, autre que la sphère, à courbure moyenne constante, elle ne doit pas être cherchée parmi les surfaces à courbure moyenne nulle. En effet, une

figure fermée est nécessairement telle qu'on peut concevoir un plan qui lui soit entièrement extérieur et ne fasse que la toucher en un point; or il est visible qu'en ce point toutes les courbures sont de même sens; la figure supposée ne saurait donc satisfaire à la condition qu'en chacun de ses points les deux courbures principales soient de sens contraires. Il suit de là qu'au moins les surfaces à courbure moyenne nulle sont toutes indéfiniment étendues, ce dont le plan nous a déjà offert un exemple.

En second lieu, M. Jellett a démontré¹⁴ que, de toutes les surfaces fermées telles qu'une droite issue d'un point de l'espace qu'elles emprisonnent ne les perce qu'en un point unique, la sphère est la seule dont la courbure moyenne soit constante.

Enfin, parmi les surfaces complètement déterminées dont j'ai parlé au § 2, six, y compris la sphère, sont à courbure moyenne finie, et les cinq différentes de la sphère sont indéfiniment prolongées.

§ 35. Considérons actuellement l'une quelconque des figures d'équilibre à dimensions infinies dans certains sens. Nous ne pourrions la réaliser dans sa totalité; mais imaginons cette réalisation effectuée, et engageons, par la pensée, dans la figure indéfinie, un système solide qui en limite complètement une portion. Si les contours de ce système solide sont exactement à la surface de la masse, il est évident que la figure ne sera pas modifiée, car les contours solides n'exerçant leur attraction que jusqu'à une distance excessivement minime, tout le reste de la surface liquide se trouvera dans les mêmes conditions qu'auparavant. Conséquemment si le système solide se compose de deux plaques minces comprenant entre elles la portion de figure dont il s'agit, nous pourrions concevoir supprimées les deux parties qui s'étendent indéfiniment au-delà; la portion interceptée, portion qui seule sera conservée, n'aura subi aucune altération, et sa surface s'arrêtera nettement, comme dans l'expérience du § 14, aux contours des deux plaques. Rien ne nous empêche donc de réaliser effectivement cette portion isolée, ce qui nous conduit à la conclusion générale, qu'à l'aide de systèmes solides appropriés, nous pouvons réaliser par portions toutes les figures d'équilibre.

Et ici, remarquons-le, l'expérience va plus loin que la théorie; en effet, à cause des difficultés de calcul, il n'y a, nous l'avons dit, qu'un petit nombre de surfaces à courbure moyenne constante parfaitement connues; or, en variant les formes des systèmes solides, on peut obtenir autant de figures d'équilibre partielles qu'on le veut; elles sont là sous nos yeux, et nous pouvons les observer à loisir; seulement, comme, en général, nous n'en avons pas les équations en coordonnées finies, nous ignorons ce qu'elles deviennent au-delà des limites des systèmes solides.

Mais une question se présente: supposons l'une de ces figures partielles réalisée dans mon appareil; on est en droit de se demander si le mélange alcoolique dans lequel elle est immergée n'en modifie pas la forme. Or, à la surface de séparation des deux liquides, le mélange alcoolique offre, en creux, la même figure que l'huile offre en relief; si donc la figure de la masse d'huile ne satisfaisait pas à la formule [2] du § 1, la figure en creux du mélange alcoolique n'y satisferait pas davantage (§ 2), et conséquemment l'équilibre ne pourrait exister; ainsi, pour qu'il existe, la condition exprimée par la formule doit nécessairement être remplie à l'égard de la figure d'huile, auquel cas elle l'est de même à l'égard de celle du mélange alcoolique.

Disons enfin que, pour la réalisation de la plupart des figures d'équilibre partielles, les systèmes solides peuvent être formés de simples fils de fer; c'est ce que l'on comprendra bientôt.

§ 36. Commençons par les figures d'équilibre de révolution, parmi lesquelles nous

¹⁴ *Sur la surface dont la courbure moyenne est constante* (Journ. de M. Liouville, t. XVIII, p. 103, année 1853).

connaissions déjà la sphère et le plan. La discussion, au point de vue purement mathématique, des surfaces de révolution à courbure moyenne constante est à-peu-près complète; nous exposerons plus loin les résultats qu'elle a donnés; mais, quant à présent, proposons-nous d'arriver sans calcul aux formes générales de ces surfaces, à toutes leurs modifications et à tous leurs détails, en nous appuyant sur l'expérience et en nous aidant du simple raisonnement appliqué à la formule $1/R + 1/R' = C$. Dans cette recherche, l'expérience et la théorie marcheront toujours côte à côte, et la première nous fournira ainsi un grand nombre de vérifications de la seconde.

Il est bien connu des géomètres que l'un des rayons de courbure principaux en un point quelconque d'une surface de révolution est le rayon de courbure de la ligne méridienne, et que l'autre est la portion de la normale à cette ligne comprise entre le point considéré et l'axe de révolution, ou, comme on le dit plus simplement, la normale en ce point. D'après cela, pour éviter toute ambiguïté, nous remplacerons, dans la formule ci-dessus, les lettres R et R' par les lettres M et N , dont la première rappellera que elle désigne le rayon de courbure de la ligne méridienne, et dont la seconde rappellera de même qu'elle désigne la normale; ainsi, tant qu'il s'agira des figures de révolution, la formule de l'équilibre sera

$$\frac{1}{M} + \frac{1}{N} = C \quad (4)$$

§ 37 Cette notation convenue, nous allons d'abord démontrer que, outre le plan, la sphère est la seule figure d'équilibre de révolution dont la ligne méridienne rencontre l'axe.

Concevons une figure d'équilibre de révolution autre que le plan et la sphère, et dont la ligne méridienne atteigne l'axe. Je dis, en premier lieu, que cette ligne ne peut aboutir à l'axe que normalement. En effet, si elle le coupait obliquement ou si elle lui était tangente, la normale serait nulle au point d'intersection ou de contact, et la quantité $1/M + 1/N$ deviendrait infinie en ce point¹⁵, tandis qu'elle aurait des valeurs

¹⁵Il y a toutefois, à la rigueur, un cas auquel ce raisonnement semblerait n'être pas applicable. On peut concevoir une courbe telle, qu'au point où elle rencontre l'axe, le rayon de courbure soit nul, et qu'aux environs de ce point le rayon de courbure et la normale soient de signes contraires; alors la quantité $1/M + 1/N$ constituerait une différence, dont les deux termes deviendraient à la fois infinis au point situé sur l'axe, et l'on ne voit pas, au premier abord, que cette différence ne puisse demeurer finie. Nous avons donc à démontrer que la chose est impossible.

Pour cela, mais uniquement dans ce cas, nous serons obligé de faire usage des expressions connues du rayon de courbure et de la normale en fonction des coefficients différentiels.

Si nous prenons l'axe de révolution pour axe des abscisses, nous aurons, comme on sait, p et q étant respectivement les coefficients différentiels du premier et du second ordre de y par rapport à x ,

$$M = \frac{(1 + p^2)^{3/2}}{q} \quad (a)$$

$$N = y(1 + p^2)^{1/2} \quad (b)$$

d'où nous déduisons, pour le rapport des deux termes du premier membre de l'équation de l'équilibre,

$$\frac{1}{N} = \frac{1 + p^2}{qy}. \quad (c)$$

Soit maintenant $y = f(x)$ l'équation de la ligne méridienne. Prenons pour origine des coordonnées le point où cette ligne rencontre l'axe, de manière que, pour $x = 0$, on ait $y = 0$; nous pourrons alors supposer la fonction $f(x)$ développée suivant une série de puissances ascendantes et positives de x ; et si nous voulons que la courbe rencontre l'axe sous un angle autre qu'un angle droit, ce qui exige que, pour $x = 0$, le premier coefficient différentiel soit fini ou nul, il faudra que l'exposant de x dans le premier terme de la série soit au moins l'unité. Remarquons ici que, n'ayant à considérer la courbe qu'au point où elle atteint l'axe et dans les

finies dans les points voisins, cette quantité ne serait donc pas constante dans tout le parcours de la courbe comme le veut l'équation de l'équilibre.

Imaginons maintenant que la figure liquide remplisse la condition que nous venons d'établir, et considérons, à partir de l'axe, un arc de la ligne méridienne. Puisque, par hypothèse, cette ligne n'est ni droite ni circulaire, la courbure de l'arc variera d'un point à un autre; elle commencera conséquemment par aller soit en augmentant, soit en diminuant, et nous pourrons prendre l'arc assez petit pour que la courbure aille toujours en augmentant, ou toujours en diminuant, à partir du point situé sur l'axe jusqu'à l'autre extrémité. Supposons d'abord que la courbure aille en croissant, et soit abd (fig. 10) l'arc dont il s'agit. Au point a la normale est couchée sur l'axe, et, à mesure qu'on s'éloigne de ce point, elle fait avec l'axe un angle de plus en plus grand; mais nous limiterons la longueur de l'arc de manière que, de a en d , cet angle ne cesse point d'être aigu. Par les deux points a et d faisons passer un arc de cercle acd qui ait son centre sur l'axe, et qui, par conséquent, rencontre aussi ce dernier normalement.

Puisque l'arc abd , dont la courbure va toujours en augmentant, part du point a suivant la même direction que l'arc de cercle, et, après s'être séparé de celui-ci, le rejoint en d , il est évident que sa courbure doit d'abord être inférieure à celle de ce second arc, et lui devenir ensuite supérieure, en sorte qu'au point d le rayon de courbure de l'arc abd est plus petit que le rayon de l'arc de cercle. Mais de la direction initiale commune des deux arcs, et de cette marche relative de la courbure de l'arc abd , il résulte nécessairement que ce dernier est, comme le montre la figure, extérieur à l'autre, et qu'au point d il doit le couper, et non le toucher, si donc on mène, en ce point d , la normale df à l'arc de courbe et le rayon dg de l'arc de cercle, la première sera moins oblique sur l'axe que le second, et conséquemment elle sera plus courte. Ainsi, au point d , les deux quantités M et N seront toutes deux moindres que le rayon de l'arc de cercle. Prenons actuellement, dans la partie de l'arc abd où la courbure est moindre

points très voisins, nous pouvons toujours supposer x extrêmement petit, en sorte que, relativement à cette portion de la courbe, notre série sera nécessairement convergente. Posons donc:

$$y = ax^m + bx^n + \dots \tag{d}$$

équation dans laquelle les exposants m, n, \dots sont positifs et le plus petit m est au moins égal à l'unité. On aura conséquemment:

$$\begin{aligned} p &= max^{m-1} + nbx^{n-1} + \dots \\ q &= m(m-1)ax^{m-2} + n(n-1)bx^{n-2} + \dots \end{aligned}$$

D'après cela, si l'on veut qu'au point situé sur l'axe le rayon de courbure soit nul, on voit, par la formule [c] qu'en ce même point, q doit être infini, et, en vertu de la seconde des expressions ci-dessus, cette condition sera satisfaite si le premier au moins des exposants m, n est plus petit que 2.

Portons actuellement dans la formule [c] ces mêmes expressions de p et de q et celle de y ; il viendra:

$$\frac{\frac{1}{N}}{\frac{1}{M}} = \frac{1 + (max^{m-1} + nbx^{n-1} + \dots)^2}{m(m-1)ax^{m-2} + n(n-1)bx^{n-2} + \dots (ax^m + bx^n + \dots)}$$

et l'on voit aisément que, pour $x = 0$, ce rapport devient infini. Remarquons, en passant, que ce résultat est indépendant de la condition $m < 2$, en sorte qu'il est vrai aussi bien pour un rayon de courbure fini ou infini au point situé sur l'axe, que pour un rayon de courbure nul; ce qui devait être, d'ailleurs, d'après ce que nous avons vu plus haut. Maintenant si, en ce même point, le rayon de courbure est nul, les deux quantités $1/M$ et $1/N$ prennent, à la vérité, l'une et l'autre une valeur infinie; mais puisque leur rapport devient en même temps infini, leur différence devient également infinie, ce qu'il fallait démontrer.

Remarquons enfin qu'une ligne dont le rayon de courbure serait nul au point situé sur l'axe, ne pourrait satisfaire à la formule de l'équilibre, quand même elle rencontrerait l'axe perpendiculairement; en effet, il est aisé de voir qu'alors, dans le voisinage du point de rencontre, le rayon de courbure et la normale seraient de même sens, et qu'ainsi, au point dont il s'agit, la quantité $1/M + 1/N$ serait la somme, et non la différence, de deux infinis.

que celle de l'arc de cercle, un point quelconque m , et prenons, sur le second de ces arcs, un point n tel que la portion an soit égale en longueur à la portion am . Dans ces conditions, le point m sera évidemment plus éloigné de l'axe que le point n , et, d'autre part, la normale en m sera plus oblique à l'axe que le rayon mené de n ; par cette double raison, la normale dont il s'agit sera donc plus grande que le rayon de l'arc de cercle; mais, par suite de l'infériorité de la courbure en m , le rayon de courbure en ce point sera aussi plus grand que le rayon de l'arc de cercle.

Il résulte de tout cela que les valeurs de M et de N correspondantes au point sont l'une et l'autre supérieures à celles qui correspondent au point d , mais il est clair que M et N sont de même signe dans toute la longueur de l'arc abd , et qu'ainsi, au point m comme au point d , la quantité $1/M + 1/N$ constitue une somme, cette même quantité est donc plus petite en m qu'en d , et conséquemment l'équilibre de la figure liquide engendrée est impossible.

Si l'on suppose maintenant que la courbure de notre arc méridien aille toujours en diminuant, comme on le voit en $a' b' d'$ (fig 11), il est visible qu'alors cet arc sera intérieur à l'arc de cercle $a' c' d'$ ayant son centre sur l'axe, que sa courbure commencera par être supérieure à celle de ce dernier, pour lui devenir ensuite inférieure, et qu'au point d' l'un des arcs viendra encore couper l'autre et non le toucher; d'où l'on conclura, par le mode de raisonnement employé dans le cas précédent, que la quantité $1/M + 1/N$ est plus grande en un point voisin de a' qu'en d' , en sorte que l'équilibre de la figure engendrée est également impossible.

Donc lorsque la ligne méridienne rencontre l'axe, la condition de l'équilibre ne peut être satisfaite que si cette ligne est une circonférence de cercle ayant son centre sur l'axe, ou un droite perpendiculaire à celui-ci; donc enfin la figure engendrée est nécessairement une sphère ou un plan.

De là découle la vérité de ce que j'ai avancé en décrivant les expériences des § 14 à 20, savoir que les portions de surfaces qui s'appuient sur le contour de la plaque circulaire, de l'anneau ou du cylindre creux, sont des calottes sphériques. Pour qu'il pût en être autrement, il faudrait que la calotte courbe ne fût pas de révolution, ce dont l'oeil s'apercevrait aisément.

§ 38. Les lignes méridiennes des autres figures d'équilibre de révolution ne pouvant avoir aucun point de commun avec l'axe, ces lignes devront ou s'étendre à l'infini, ou se fermer en dehors de l'axe. Les premières engendreront des figures qui s'étendent elles-mêmes à l'infini. Les secondes donneraient des figures annulaires; nous saurons plus loin si l'existence de semblables figures est possible.

Pour simplifier la recherche des lignes dont il s'agit, nous allons démontrer qu'elles

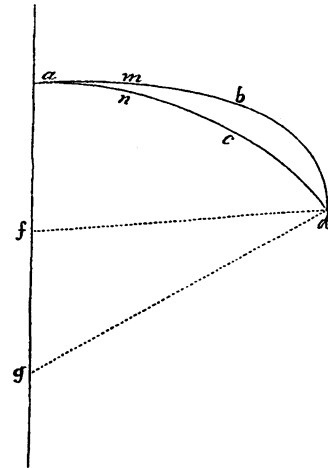


Fig. 10

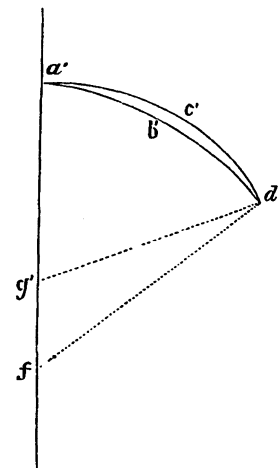


Fig. 11

ne contiennent aucun point de rebroussement. Supposons l'existence d'un point de cette nature; nous avons à considérer trois cas : 1° celui où la tangente au point de rebroussement, tangente qui y est commune aux deux branches de la courbe, n'est pas perpendiculaire à l'axe de révolution, quelque autre direction qu'elle ait d'ailleurs ; 2° celui où cette tangente commune est perpendiculaire à l'axe et où les deux branches se rapprochent de celui-ci en allant vers le point de rebroussement ; 3° enfin celui où, la tangente commune étant encore perpendiculaire à l'axe, les deux branches, en allant vers le point de rebroussement, s'éloignent de cet axe.

Premier cas. — En jetant les yeux sur la fig. 12, qui représente, en coupes méridiennes, des portions de la figure liquide pour différentes positions du point de rebroussement par rapport à l'axe de révolution ZZ' , on reconnaîtra sans peine qu'aux environs de ce point, la normale est toujours, pour l'une des branches, dirigée à l'intérieur du liquide et conséquemment positive, tandis que, pour l'autre, elle est dirigée à l'extérieur et conséquemment négative, or l'équation $1/M + 1/N = C$ ne saurait comprendre ce changement de signe de la normale N en passant d'une branche à l'autre car il exigerait qu'au point de rebroussement cette normale fût nulle ou infinie, et, dans le cas actuel, la normale en question est évidemment finie, puisque la tangente n'est pas perpendiculaire à l'axe, et que le point de rebroussement ne peut être sur celui-ci.

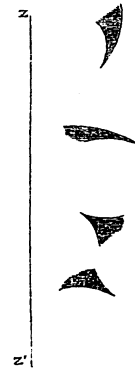


Fig. 12

Deuxième cas (fig. 13). — Si le point de rebroussement est de seconde espèce, c'est-à-dire si les deux branches qui y aboutissent sont situées du même côté de la tangente commune, on voit que, pour l'une de ces branches, la normale et le rayon de courbure sont tous deux positifs, tandis que, pour l'autre, ils sont tous deux négatifs; la quantité $1/M + 1/N$ changerait donc de signe en passant de l'une à l'autre, et ainsi ne serait plus la même dans toute l'étendue de la figure liquide.

Si le point de rebroussement est de première espèce, c'est-à-dire si les deux branches sont situées des deux côtés opposés de la tangente commune, le rayon de courbure y est, comme on sait, nul ou infini; mais un rayon de courbure nul rendrait infinie la quantité $1/M + 1/N$, en sorte que nous n'avons à examiner que l'hypothèse d'un rayon de courbure infini. Alors, comme, d'après la direction de la tangente, la normale est également infinie au point que nous considérons, la quantité $1/M + 1/N$ se réduirait à zéro au même point; il faudrait donc, pour l'équilibre, que cette quantité fût nulle aussi en tous les autres points de la ligne méridienne, or cela est impossible, puisque, dès qu'on s'écarte du point de rebroussement, le rayon de courbure et la normale prennent, sur chacune des deux branches en particulier, des valeurs finies et de même signe.

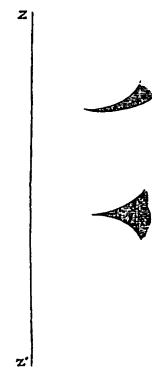


Fig. 13

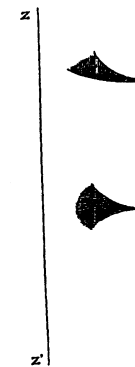


Fig. 14

Troisième cas (fig. 14) — Si le point de rebroussement est de seconde espèce, le rayon de courbure à des signes opposés sur les deux branches, et conséquemment il doit être nul ou infini au point en question; mais, nous l'avons déjà fait remarquer, nous n'avons pas à nous occuper de l'hypothèse d'un rayon de courbure nul, reste donc

celle d'un rayon de courbure infini. Alors, la normale au même point étant de son côté infinie, l'équilibre exige, comme plus haut, que la quantité $1/M + 1/N$ soit nulle pour tous les points de la ligne méridienne. Ici la chose semble possible au premier abord, puisque, aux environs du point de rebroussement, le rayon de courbure et la normale sont, sur chaque branche considérée isolément, de signes contraires, mais nous verrons ci-après que cette possibilité n'est qu'apparente.

Si le point de rebroussement est de première espèce, le rayon de courbure y est nécessairement nul ou infini, ainsi que nous l'avons déjà rappelé ; et, puisque nous devons rejeter les rayons de courbure nuls, la quantité $1/M + 1/N$ est encore égale à zéro au point dont il s'agit, et doit l'être aussi en tous les autres points, ce qui paraît possible comme précédemment, et pour la même raison.

Mais pour qu'en tous les points de la ligne méridienne la quantité $1/M + 1/N$ soit nulle, il faut évidemment qu'en chacun de ces points le rayon de courbure soit égal et opposé à la normale; or il est bien connu des géomètres qu'une seule courbe jouit de cette propriété, et que cette courbe est la chaînette, laquelle n'a aucun point de rebroussement.

§ 39. Les principes établis dans les deux paragraphes précédents ayant écarté de la question de nos lignes méridiennes les complications qui seraient venues l'embarrasser, nous pouvons entrer plus directement en matière.

Il suit évidemment de la formule [4] que le cylindre fait partie des figures d'équilibre de révolution ; dans celui-ci, en effet, la ligne méridienne étant une droite parallèle à l'axe, M est partout infini, ce qui réduit le premier membre de la formule au terme $1/N$, et ce terme est constant, puisque la normale N est le rayon du cylindre.

Le cylindre, dans son état complet, s'étend indéfiniment dans le sens de l'axe; mais, d'après ce que nous avons exposé (§ 35), nous pourrions en réaliser une portion.

Avant de décrire cette réalisation ainsi que celle des figures ultérieures, j'insiste de nouveau sur l'ensemble des précautions dont j'ai déjà parlé, et qui sont d'une absolue nécessité, surtout dans les expériences de ce genre; je rappelle donc qu'il faut: 1° n'employer, les deux liquides, mélange alcoolique et huile, que rendus mutuellement inertes, ou à très-peu près (§ 6); 2° quand on va verser l'huile, entourer de plusieurs doubles d'étoffe le flacon qui la contient, afin d'écarter l'influence de la chaleur de la main (§ 9); 3° donner de grands soins à l'ajustement des densités (§ 6 et 9); on croirait difficilement, sans l'avoir expérimenté, combien des différences minimales affectent les figures un peu grandes; 4° soigner de même l'homogénéité de l'huile qui constitue la masse immergée (§ 30); 5° enfin opérer dans un lieu dont la température soit, autant que possible, constante (§ 7); si elle varie un peu pendant la durée des expériences, et si la régularité des figures s'en ressent, rétablir l'égalité des densités. Je répète aussi qu'avec ces précautions, qui deviennent en peu de temps familières, les expériences s'exécutent sans peine, et donnent des résultats parfaitement réguliers.

§ 40. Procédons maintenant à la réalisation du cylindre. Le système solide que nous emploierons dans ce but, consiste en deux anneaux horizontaux en fil de fer, égaux entre eux, et ayant, par exemple, 7 centimètres de diamètre (fig. 15). L'un de ces anneaux repose, par trois petits pieds, sur le morceau d'étoffe qui couvre le fond du vase (§ 9), et l'autre est fixé, par la queue de sa fourche, au bas de la tige cylindrique.

Après avoir soulevé autant que possible l'anneau supérieur, faisons glisser d'une petite quantité la plaque couvercle pour ménager une ouverture au haut du vase, et, par celle-ci, introduisons obliquement le bec d'un petit entonnoir, bec qui doit être assez long; puis versons doucement l'huile en quantité telle qu'elle forme une sphère d'environ un décimètre de diamètre. Enlevons l'entonnoir, et conduisons la sphère

liquide vers l'anneau inférieur, de manière à la faire adhérer à tout le contour de ce dernier; faisons glisser le couvercle en sens contraire, pour refermer le vase, et amener l'anneau supérieur bien exactement au-dessus de l'autre¹⁶. Abaissons ensuite cet anneau supérieur jusqu'à ce qu'il vienne se mettre en contact avec la masse d'huile, et que celle-ci y adhère également. La masse étant ainsi attachée aux deux anneaux, soulevons lentement le supérieur: alors la portion de la figure liquide comprise entre eux s'allongera en se rétrécissant, et l'on atteindra un point où cette portion de figure sera parfaitement cylindrique; on aura de la sorte un cylindre exact ayant 7 centimètres de diamètre et 12 à 14 de hauteur (fig. 16).

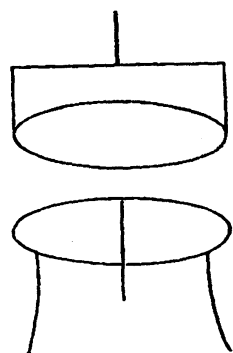


Fig. 15

Seulement les deux bases de la figure ne sont pas planes; leurs surfaces constituent des calottes sphériques convexes, et ceci est une conséquence nécessaire de la théorie. En effet, d'après la notation que nous avons adoptée, la pression correspondante à un point quelconque de la surface cylindrique à pour mesure $P + \frac{A}{2} \frac{1}{N}$; et comme la courbure $1/N$ est positive, puisque la normale N est dirigée à l'intérieur du liquide, la pression dont il s'agit est supérieure à celle d'une surface plane; or il faut évidemment, pour l'équilibre de la masse, que les surfaces des bases exercent, en chaque point, une pression égale à la précédente, et, par suite, supérieure aussi à celle d'une surface plane, condition qui exige qu'elles soient convexes.

Dans cette expérience, on le voit, le système solide consiste en de simples fils de fer. On pourrait se servir de disques au lieu d'anneaux; mais, avec ces derniers, le résultat est bien plus curieux, et il offre d'ailleurs, comme je viens de le montrer, une nouvelle vérification de la théorie.

Si, dans cette même expérience, les densités des deux liquides ne sont pas tout à fait égales, on en est averti par le fait que la figure prend, d'une manière plus ou moins prononcée, l'une des deux formes, de la fig. 17; on corrige alors le petit défaut d'ajustement.

Enfin, si l'on éprouve quelque difficulté à former une sphère d'huile d'un décimètre sans qu'elle aille toucher la paroi latérale du vase, rien n'empêche de s'arrêter à un diamètre moindre; le cylindre sera alors moins haut, mais on pourra, si l'on veut, y

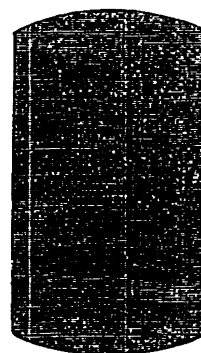


Fig. 16

¹⁶ Disons ici, une fois pour toutes, que c'est à l'aide de manoeuvres analogues qu'on effectue la réalisation de la plupart des figures dont nous nous occuperons.

ajouter de l'huile, et hausser ensuite l'anneau supérieur jusqu'à ce qu'on reproduise la figure cylindrique.

§ 41. Le résultat que nous venons d'obtenir va nous permettre d'arriver à une vérification numérique. Il est aisé de déduire de la théorie le rayon des sphères aux quelles les bases appartiennent; en effet, si nous le représentons par x , la pression correspondante à un point de la surface de ces bases aura (§ 18) pour valeur $P + A \cdot \frac{1}{x}$; et puisque cette pression doit être égale à celle qui correspond à un point de la surface cylindrique, nous pourrons poser:

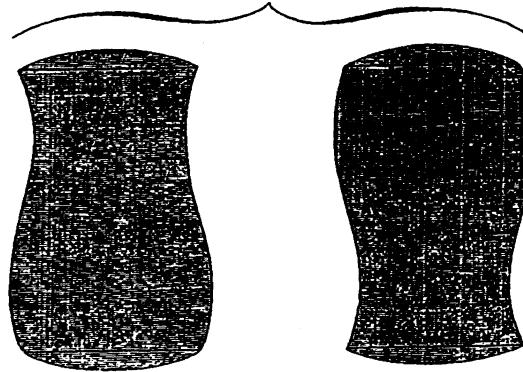


Fig. 17

$$P + A \cdot \frac{1}{x} = P + \frac{A}{2} \cdot \frac{1}{N}$$

d'où nous déduisons:

$$x = 2N.$$

Ainsi le rayon des sphères dont les bases font partie, est égal au diamètre du cylindre.

D'après cela, connaissant ce diamètre, qui est le même que celui des anneaux, on peut calculer la hauteur théorique des calottes, puis mesurer, dans la figure, au moyen du cathétomètre, la hauteur réelle, et comparer les résultats. C'est ce que j'ai fait, comme on va le voir.

§ 42. Si l'on imagine la figure liquide coupée par un plan méridien, la section de chacune des calottes sera un arc appartenant à un cercle dont le rayon devra, d'après ce qui précède, être égal à $2N$, et la flèche de cet arc sera la hauteur de la calotte. Si l'on suppose infiniment minces les fils métalliques qui forment les anneaux, de manière que chacune des calottes s'appuie sur la circonférence même du cylindre, la corde de l'arc ci-dessus sera aussi égale à $2N$, et si l'on désigne par h la hauteur des calottes, on aura:

$$h = N(2 - \sqrt{3}) = 0,268 \cdot N$$

Or le diamètre extérieur exact de mes anneaux, ou la valeur de $2N$ correspondante à mes expériences, était de $71\text{mm},4$, ce qui donne $h = 9\text{mm},57$.

Mais les fils métalliques ayant une certaine épaisseur, et les calottes ne s'appuyant pas sur la circonférence extérieure des anneaux, il en résulte que la corde de l'arc méridien est un peu moindre que $2N$, et que, par conséquent, la hauteur théorique réelle des calottes est un peu plus petite que ne le donne la formule précédente. Pour la déterminer exactement, désignons la corde par $2c$, ce qui donnera;

$$h = 2N - \sqrt{4N^2 - c^2}.$$

Maintenant, remarquons que le plan méridien coupe chacun des anneaux suivant deux petits cercles auxquels est tangent l'arc méridien de la calotte, et sur chacun desquels la corde de cet arc intercepte un petit segment. Or, l'arc méridien étant tangent

aux sections des fils, il en résulte que les petits segments ci-dessus sont semblables à celui de la calotte; et comme la corde de ce dernier diffère fort peu du rayon du cercle auquel l'arc appartient, les cordes des petits segments pourront être considérées comme égales au rayon des petites sections, rayon que nous désignerons par r . Il est visible, en outre, que l'excès du rayon extérieur de l'anneau sur la demi-corde c n'est autre chose que l'excès du rayon r sur la demi-corde des petits segments, demi-corde qui, d'après ce qui précède, est égale à $\frac{1}{2}r$. On déduit donc de là, $N - c = \frac{1}{2}r$, d'où $c = N - \frac{1}{2}r$, et il n'y aura qu'à substituer cette valeur dans la formule précédente, pour avoir la valeur théorique réelle de h . L'épaisseur des fils qui formaient mes anneaux était de $0\text{mm},74$, d'où $\frac{1}{2}r = 0\text{mm},18$, ce qui donne, pour la hauteur théorique réelle des calottes dans ces circonstances,

$$h = 9\text{mm},46.$$

Je ferai remarquer qu'il est difficile de distinguer, dans la figure liquide, la limite précise des calottes, c'est-à-dire les circonférences de contact de leurs surfaces avec celles des anneaux. Pour écarter cet inconvénient, je n'ai mesuré la hauteur des calottes qu'à partir des plans extérieurs des anneaux, c'est-à-dire, pour chaque calotte, à partir d'un plan perpendiculaire à l'axe de révolution, et s'appuyant sur la surface de l'anneau du côté qui regarde le sommet de la calotte. La quantité ainsi mesurée est évidemment égale à la hauteur totale moins la flèche des petits segments que nous avons considérés plus haut, et, par conséquent, d'après la similitude entre ces petits segments et celui de la calotte, on a, pour déterminer cette flèche que nous désignerons par f , la proportion $\frac{h}{c} = \frac{f}{r/2}$, ce qui donne, pour notre figure liquide, $f = 0\text{mm},05$, d'où

$$h \sim f = 9\text{mm},41.$$

Telle est donc, en définitive, la valeur théorique de la quantité qu'il s'agissait de mesurer.

§ 43. Avant de rapporter les résultats que m'ont donnés les mesures, je dois présenter ici quelques remarques importantes.

Si les densités du mélange alcoolique et de l'huile ne sont pas rigoureusement égales, la masse tend légèrement à monter ou à descendre, et la hauteur de l'une des calottes est alors un peu trop grande, tandis que celle de l'autre est un peu trop petite; mais on comprend que si leur différence est minime, on obtiendra encore un résultat exact en prenant la moyenne entre ces deux hauteurs. On évite ainsi une partie des tâtonnements qu'exigerait l'établissement d'une égalité parfaite entre les deux densités.

Mais une chose à laquelle il faut donner de grands soins, c'est l'homogénéité de chacun des deux liquides. Pour mêler plus aisément l'huile à l'aide de la spatule de fer, on effectue cette opération quand la masse n'est encore attachée qu'à l'anneau inférieur.

§ 44. Afin d'atténuer encore l'influence d'une différence minime possible entre les deux densités, on n'a donné à la figure liquide qu'une hauteur assez petite. On a mesuré d'abord, au cathétomètre, la distance comprise entre les sommets des deux calottes, puis on a mesuré, par le même moyen, la distance comprise entre les plans extérieurs des deux anneaux. La différence entre le premier et le second résultat donne évidemment la somme des deux hauteurs dont il faut prendre la moyenne, et, par conséquent, cette moyenne, ou la quantité cherchée $h - f$; est égale à la moitié de la différence dont il s'agit.

La mesure de la distance entre les plans extérieurs des anneaux exige quelques précautions particulières. D'abord, comme les points des anneaux auxquels il faut viser

ne sont pas tout à fait à la surface extérieure de la figure, l'huile interposée entre ces points et l'oeil doit produire des effets de réfraction qui introduiraient une petite erreur dans la valeur obtenue. Pour écarter cet inconvénient, il suffit de mettre les anneaux à nu, en faisant écouler les liquides du vase par le robinet (§ 4), ou au moyen d'un siphon, puis d'enlever les petites portions d'huile qui demeurent adhérentes au anneaux, en promenant sur ceux une petite bande de papier à filtre; il faut aussi absorber de la même manière les gouttes de liquide alcoolique qui restent attachées à la face interne de la paroi antérieure du vase. Il est inutile de dire que, pour effectuer ces opérations, on découvre une portion du haut du vase, et qu'après les avoir terminées, on replace la plaque couvercle bien exactement dans sa première position.

Voici maintenant les résultats que j'ai obtenus : la distance entre les sommets a été trouvée d'abord, en moyenne, par quatre mesures successives, égale à 76mm,79. Mais le liquide alcoolique ayant été alors agité de nouveau pendant quelque temps, afin que sa parfaite homogénéité fût plus certaine¹⁷, deux nouvelles mesures prises, immédiatement après ont donné, en moyenne, 77mm,02.

La distance entre les plans extérieurs des anneaux s'est trouvée en moyenne, du côté droit du système, de 57mm,73, et, du côté gauche, de 57mm,86 ; prenant donc la moyenne de ces deux résultats, on a, pour la distance entre les centres des plans extérieurs, la valeur 57mm,79.

D'après cela, si l'on part de la première des deux valeurs obtenues pour la distance des sommets, savoir 76mm,79, on trouvera:

$$h - f = \frac{76,79 \cdot 57,79}{2} = 9mm,50 ;$$

et si l'on part du second résultat, savoir 77mm,02, on trouvera:

$$h - f = \frac{77,02 \cdot 57,79}{2} = 9mm,61 .$$

Ces deux hauteurs s'écartent bien peu, comme on le voit, de la hauteur 9mm,41 déduite de la théorie (§ 42): pour la première, la différence ne s'élève pas au centième de cette valeur théorique, et, pour la seconde, elle en surpasse à peine les deux centièmes.

Ces légères différences provenaient sans doute de faibles restes d'hétérogénéité dans les liquides; il est probable que, dans le premier cas, aucun des deux liquides n'était absolument homogène, et que les deux effets contraires qui résultaient de là (§ 30 et note du § actuel), neutralisaient en partie, tandis que, dans le second cas, le liquide alcoolique étant rendu tout à fait homogène, l'effet de la petite hétérogénéité de l'huile se manifestait en entier.

Quoi qu'il en soit, ces mêmes différences sont l'une et l'autre assez minimes pour qu'on puisse considérer l'observation comme d'accord avec la théorie, dont elle offre, comme on voit, une confirmation bien remarquable.

§ 45. Avec des anneaux de 7 centimètres, on ne peut guère, dans notre vase, réaliser un cylindre dont la hauteur surpasse le double du diamètre. Pour avoir un rapport plus considérable, il suffit d'employer des anneaux plus petits, de 3 centimètres, par exemple, mais, dans ce cas, on observe un phénomène singulier: si la hauteur qu'on

¹⁷ Si le liquide alcoolique n'est pas bien homogène, et que la figure se trouve dans une couche dont la densité moyenne est égale à celle de l'huile, les deux calottes peuvent se montrer égales, mais leur hauteur est trop petite; en effet, l'huile qui forme la calotte supérieure est alors en contact avec un liquide moins dense qu'elle, et tend par conséquent à descendre, tandis que l'inverse a lieu pour l'huile qui forme la calotte inférieure. En établissant à dessein une hétérogénéité très-prononcée, et en employant les précautions convenables, on peut même réaliser un cylindre sensiblement régulier dont les bases sont tout à fait planes.

veut donner à la figure excède notablement le triple du diamètre des anneaux, on ne parvient plus, quelques soins que l'on prenne, à obtenir la forme cylindrique; avant que celle-ci soit atteinte, la figure se sépare toujours spontanément en deux portions inégales qui demeurent respectivement attachées aux deux anneaux.

Pour faire ces expériences, le moyen le plus commode est de donner à la sphère d'huile un diamètre trop grand, de manière que, lorsque l'anneau supérieur est soulevé à la hauteur qu'on s'est proposée, la ligne méridienne de la portion de figure comprise entre les deux anneaux soit assez fortement convexe, puis d'essayer d'absorber l'excès d'huile. Seulement, comme l'introduction du bec de la seringue exige qu'on ménage une ouverture au haut du vase, on fait en sorte que la figure liquide ne soit pas tout à fait dans l'axe de ce dernier, et qu'ainsi la plaque couvercle se trouve un peu reculée. J'avertis, dès à présent, que, toutes les figures qui me restent à décrire nécessitant l'emploi de la seringue, il faut, à leur égard, recourir à la même disposition.



Fig. 18

Maintenant, précisons d'avantage ce qui arrive quand la distance des deux anneaux l'emporte notablement sur le triple de leur diamètre: toujours, avant que la convexité méridienne ait disparu, on voit la figure liquide s'amincir sur l'une des moitiés de sa hauteur, tandis qu'elle se renfle sur l'autre moitié (fig. 18); ces modifications se prononcent de plus en plus, jusqu'à ce que le milieu de la partie étranglée soit devenu très-mince; alors la figure se désunit en ce point, et se trouve ainsi partagée en deux portions.

§ 46. On pourrait soupçonner que le phénomène est dû à un reste minime de différence entre les densités des deux liquides; mais, outre qu'il se produit invinciblement, comme je l'ai dit, quelque soin qu'on ait apporté à l'égalisation des densités, il se produit de même quand on dispose les choses de manière que l'axe de la figure soit horizontal, c'est-à-dire quand on comprend cette figure entre deux anneaux ou deux disques verticaux, placés en regard l'un de l'autre (fig. 19); or, dans ce dernier cas, si l'axe est bien horizontal, une différence entre les densités ne peut évidemment tendre à déterminer un transport de l'huile en plus grande abondance vers l'une des bases.

De tout cela on doit conclure qu'un cylindre liquide dans lequel le rapport de la longueur au diamètre est notablement supérieur à 3, constitue une figure d'équilibre instable. Je me borne, pour le moment, à signaler ce fait remarquable, qui sera étudié avec détail dans le chapitre IX.

Ainsi, quand on voudra réaliser un cylindre liquide, faire en sorte que le rapport entre la distance anneaux ou des disques et leur diamètre ne dépasse pas 3. Ajoutons que l'expérience est beaucoup plus facile pour un cylindre horizontal que pour un cylindre vertical, parce que, à l'égard du premier, une trace de différence entre les densités n'a pas d'influence sensible sur la régularité de la figure. Pour réaliser celle-ci dans l'appareil de la fig. 19, on attache d'abord à la face interne de l'un des disques, une masse d'huile d'un volume supérieur à celui que doit comprendre le cylindre, puis, à l'aide d'un anneau en fil de

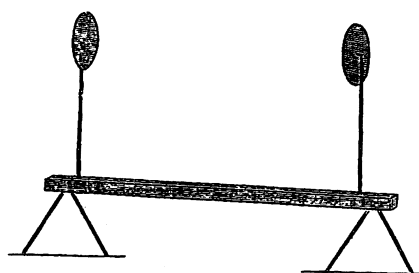


Fig. 19

fer de même diamètre que les disques et porté par un fil de fer droit plus épais dont on tient à la main l'extrémité libre, on étire sans peine la masse jusqu'au second disque, auquel on la fait adhérer également, on absorbe alors l'excès d'huile, jusqu'à ce que la figure soit exactement cylindrique.

Enfin, dans le cas d'un auditoire, on fera usage d'un système solide semblable au précédent, mais sans pieds, et soutenu dans une position renversée, comme celui de la fig. 7 du § 21, par un fil de fer de suspension, de cette manière, on peut abaisser ou soulever l'ensemble dans le mélange alcoolique rendu légèrement hétérogène.

§ 47. Dans l'expérience du § 40, si l'on arrête l'anneau supérieur avant que la forme cylindrique soit atteinte, la portion de figure comprise entre les deux anneaux, portion qui est toujours parfaitement symétrique autour de l'axe, n'appartient plus à la sphère, et n'appartient pas encore au cylindre; elle fait donc partie d'une nouvelle figure d'équilibre de révolution. De même si, après avoir obtenu le cylindre exact, on soulève encore d'une certaine quantité l'anneau supérieur, la figure s'étrangle plus ou moins au milieu de sa hauteur, et, si l'on arrête alors l'anneau, elle demeure en cet état, sans cesser d'être de révolution; alors aussi, par conséquent, elle constitue une portion d'une figure d'équilibre différente de la sphère et du cylindre.

Pour arriver à déterminer ce que doivent être, dans leur état complet, les figures liquides auxquelles appartiennent les portions dont il s'agit, décrivons d'abord une expérience.

Prenons pour système solide un cylindre en fer d'une longueur assez considérable relativement au diamètre, porté sur deux pieds en fils de même métal (fig. 20); supposons, par exemple, la longueur de 14 centimètres, et le diamètre de 2. Ce cylindre étant soigneusement frotté d'huile et intro-



Fig. 20

duit dans le vase, amenons en contact avec le milieu de sa longueur une sphère d'huile d'un volume convenable. L'adhérence une fois établie, la masse liquide s'étend sur la surface du cylindre de manière à envelopper une portion de la longueur de celui-ci, perd sa forme sphérique, et constitue enfin une figure de révolution dont la ligne méridienne change de courbure en allant vers ses deux extrémités, pour devenir, en ces deux points, tangente à la génératrice du cylindre. La fig. 21 représente la coupe méridienne de la figure liquide et du cylindre solide.

Mais nous savons que lorsque la masse liquide adhère à un système solide qui en modifie la forme, les seules parties de ce système d'où dépend la figure produite, sont les lignes très-étroites suivant lesquelles il est rencontré ou touché par la couche superficielle de la masse, en sorte qu'il peut en général se réduire à de simples fils de fer représentant ces mêmes lignes. Or, dans la figure dont il s'agit ici, la surface libre de la masse liquide touche notre cylindre solide suivant deux circonférences perpendiculaires à l'axe, et passant par les points *a* et *b*; rien n'empêche donc de concevoir le cylindre entier remplacé par deux

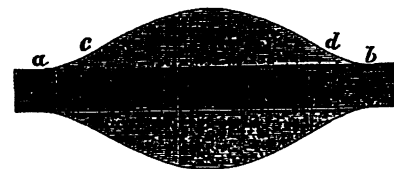


Fig. 21

anneaux représentant ces circonférences, c'est-à-dire ayant un diamètre extérieur égal à celui du cylindre, placés verticalement en regard l'un de l'autre, et distants entre eux de l'intervalle ab . Seulement il faudra que la quantité d'huile soit plus grande, afin de suppléer au volume de la portion du cylindre supprimée à l'intérieur de la masse, il faudra même encore un peu d'huile en sus, pour fournir la matière des deux bases qui s'appuient sur les anneaux, bases dont les surfaces seront comme nous le verrons bientôt, des calottes sphériques convexes. Du reste, pour éviter ces dernières, qui compliqueraient inutilement la figure, on peut supposer des disques au lieu d'anneaux; dans l'un et l'autre cas, la figure sera alors entièrement formée d'huile; elle est représentée dans cet état, en coupe méridienne ou en projection verticale, par la fig. 22; am et bn sont les coupes ou les projections des disques.

Nous dirons bientôt pour quelles raisons nous avons indiqué l'emploi d'un cylindre plutôt que celui de disques ou d'anneaux.

§ 48. La figure que nous venons d'obtenir, et dans laquelle la ligne méridienne s'arrête aux points a et b où elle touche le cylindre solide (fig. 21), ou rencontre les bords des disques (fig. 22), ne constitue évidemment qu'une portion de la figure d'équilibre complète. Essayons donc de poursuivre la ligne méridienne, à partir de ces mêmes points a et b où ses éléments sont parallèles à l'axe.

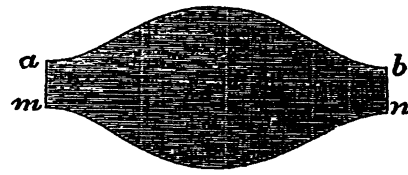


Fig. 22

Il est aisé de faire voir que les points a et b ne sont pas des points d'inflexion. En de semblables points, le rayon de courbure est nul ou infini; mais puisque, dans nos lignes méridiennes, il ne peut être question d'un rayon de courbure nul, qui rendrait infini le premier membre de l'équation de l'équilibre, il faudrait supposer ce rayon infini aux points que nous considérons, et l'équation s'y réduirait à $\frac{1}{N} = C$; or les points c et d (fig. 21) sont réellement des points d'inflexion de ce genre, comme le montre l'aspect de la figure, en sorte que l'équation de l'équilibre s'y réduit nécessairement à $\frac{1}{N} = C$; la normale N devrait donc avoir, aux points a et b , la même longueur qu'aux points c et d , ce qui évidemment n'est pas: car d'abord les points c et d sont plus éloignés de l'axe que les points a et b , et, en outre, les normales qui partent des premiers sont obliques à l'axe, tandis que celles qui correspondent aux seconds lui sont perpendiculaires.

Au delà des points a et b la courbe commence donc par garder une courbure de même sens qu'en deçà, c'est une courbure concave vers l'extérieur (fig. 23). Or supposons que, sur le prolongement partant de a , par exemple, cette courbure aille d'abord soit en augmentant, soit en diminuant moins qu'elle ne diminue de l'autre côté de a ; nous pourrions toujours prendre, sur le prolongement dont il s'agit, une portion am assez petite pour qu'en chacun de ses points, la courbure soit plus forte qu'aux points correspondants d'une portion an de même longueur prise sur la première partie de la courbe. En vertu de la supériorité de courbure de tous les points de l'arc am , le point m est nécessairement plus éloigné de l'axe que le point n , et, en outre, la normale mr qui part du premier est plus oblique à l'axe que la normale ns qui part du second; la normale en m est donc, par cette double raison, plus grande que la normale en n . D'un autre côté, d'après la même hypothèse relative aux courbures, le rayon de courbure en m est plus petit qu'en n . Il résulte de là, qu'en sautant du point n au point m , le premier terme de la quantité $\frac{1}{M} + \frac{1}{N}$ augmentera et le second diminuera. Or, dans les parties de la courbe que nous considérons, le rayon de courbure et la normale sont opposés l'un à l'autre, et ont conséquemment des signes contraires, de sorte que la quantité

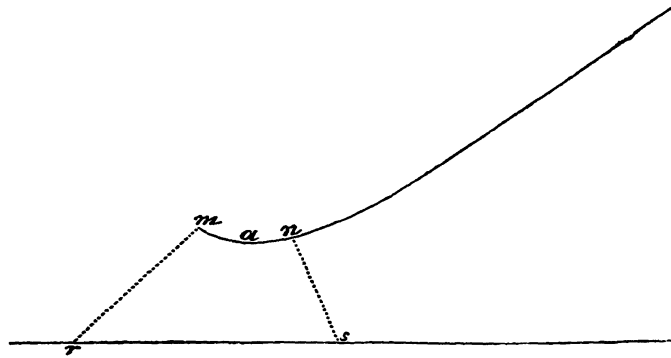


Fig. 23

$\frac{1}{M} + \frac{1}{N}$ constitue une différence, si donc l'un des termes de cette quantité croît tandis que l'autre décroît, elle ne peut conserver la même valeur, et l'équilibre est impossible.

Si l'on suppose que la courbure de l'arc am diminue au contraire plus, à partir de a , que celle de l'arc an on conclura, par le même mode de raisonnement, que la quantité $\frac{1}{M} + \frac{1}{N}$ changerait aussi de valeur en passant de l'une des parties de la courbe à l'autre.

L'hypothèse de courbures plus fortes ou plus faibles dans l'arc am que dans l'arc an est donc incompatible avec l'équation de l'équilibre; il faut conséquemment, pour satisfaire à cette équation, que, sur le petit prolongement am , les courbures soient identiquement les mêmes que sur un arc an de même longueur pris en deçà de a . Or il est clair que cette identité entraîne celle de toute la partie de la courbe située au delà du point a avec la partie située en deçà. La portion de courbe comprise entre a et b (fig. 21 et 22) se reproduira donc au delà de a , puis, par les mêmes raisons, se reproduira encore, et ainsi de suite indéfiniment, et il en sera de même de l'autre côté du point b , de sorte que la ligne méridienne sera une courbe ondulée s'étendant à l'infini le long de l'axe, dont elle se rapproche et s'éloigne périodiquement de quantités égales.

La figure d'équilibre complète se prolonge donc à l'infini le long de l'axe, et se compose d'une suite régulière de renflements et d'étranglements égaux, la fig. 24 en représente une coupe méridienne sur une certaine étendue.

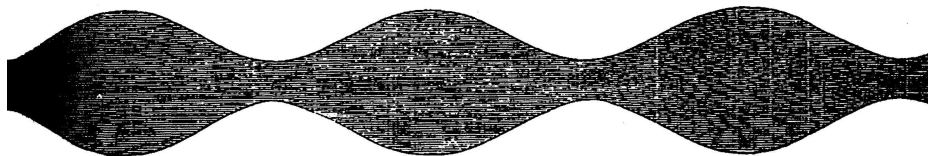


Fig. 24

Afin d'abrèger le langage, nous donnerons à cette figure le nom d'*Onduloïde*, tiré de la forme de sa ligne méridienne.

§ 49. Il est aisé de comprendre comment l'équilibre peut exister dans une semblable figure, bien que, sur les parties renflées, les deux courbures principales soient convexes, tandis que, sur les parties étranglées, l'une des courbures principales, la méridienne, est concave, et l'autre convexe : c'est que, sur ces dernières parties, la courbure convexe ou positive est plus forte que la courbure concave ou négative, de manière que la cour-

bure moyenne en chaque point est positive (§ 33), et égale à celle qui correspond aux différents points des parties renflées.

De ce que, dans l'onduloïde, la courbure moyenne est positive, il résulte nécessairement que toutes les fois que l'on réalisera une portion quelconque d'onduloïde entre deux anneaux, les bases qui s'appuieront sur ceux-ci seront des calotte sphériques convexes.

§ 50. Si, dans l'expérience du § 47, le volume de l'huile demeurant le même, on emploie un cylindre solide d'un plus grand diamètre, la masse liquide s'étend davantage dans le sens de l'axe, et les courbures méridiennes diminuent, de sorte que, dans la figure complète correspondante, les renflements et les étranglements sont moins prononcés. Les courbures méridiennes s'effacent ainsi d'autant plus dans la figure partielle, et, par suite, dans la figure complète, que le diamètre du cylindre solide est plus grand; d'où l'on voit que, dans ces variations, la figure complète tend vers la forme cylindrique, qui peut être considérée comme la limite de ces mêmes variations.

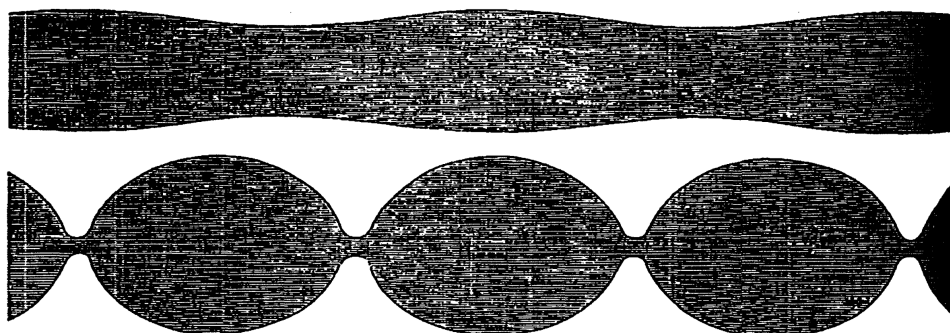


Fig. 25

Si, le volume de l'huile demeurant toujours le même, on emploie, au contraire, un cylindre solide d'un diamètre plus petit, la masse liquide se raccourcit dans le sens de l'axe, les courbures méridiennes augmentent, et la figure se rapproche de plus en plus d'une sphère; lorsque, par exemple, pour une masse d'huile constituant primitivement une sphère de 6 centimètres de diamètre, on prend, comme cylindre solide, un fil de fer de deux millimètres d'épaisseur, la masse a déjà presque exactement la forme sphérique, et, si l'on se sert d'un fil très-fin, la différence d'avec la forme sphérique devient tout à fait insensible. Maintenant, la figure complète variant de cette même manière dans toutes ses parties, les renflements et les étranglements y seront de plus en plus prononcés, et, à la dernière limite, on comprend qu'elle consistera en une suite de sphères égales tangentes les unes aux autres sur l'axe.

L'onduloïde complet peut donc varier de forme entre deux limites très-éloignées, qui sont, d'une part, le cylindre, et, de l'autre, une suite de sphères égales qui se touchent sur l'axe. La fig. 25 représente deux onduloïdes dont l'un diffère peu du cylindre, et dont l'autre se rapproche de la série de sphères.

§ 51. Mais l'onduloïde est susceptible d'un autre genre de variation, qui donne une troisième limite. Supposons un vase semblable au nôtre et de dimensions beaucoup plus grandes; plaçons-y horizontalement, au sein du liquide alcoolique, un cylindre solide de deux centimètres de diamètre, par exemple, d'une longueur considérable,

et porté sur des pieds suffisamment élevés. Faisons adhérer à ce cylindre une masse d'huile qui produise une portion d'onduloïde pareille à celle de la fig. 21, puis ajoutons une nouvelle quantité d'huile, la figure augmentera alors en longueur en même temps qu'en épaisseur, mais poussons-la légèrement d'un côté, de manière que l'une de ses extrémités soit ramenée au même endroit qu'auparavant, et que l'autre seule se trouve reculée. Si nous ajoutons ainsi successivement de nouvelles quantités d'huile, en ramenant toujours la première extrémité de la figure à la même place, cette figure prendra de plus en plus d'épaisseur, et sa seconde extrémité reculera de plus en plus; et comme nous pouvons imaginer le vase aussi grand et le cylindre aussi allongé que nous le voulons, rien ne met un terme à la possibilité théorique de l'accroissement de la figure en épaisseur ainsi qu'en longueur. Si donc nous supposons cet accroissement porté jusqu'à l'infini, le sommet de l'arc méridien convexe et la seconde extrémité de la figure n'existeront plus, en sorte que la ligne méridienne ira en s'éloignant indéfiniment de l'axe à partir de la première extrémité; et puisque celle-ci constitue, dans la figure complète, le cercle de gorge d'un étranglement, et que des deux côtés d'un étranglement tout est parfaitement symétrique (§ 48), on voit que la ligne méridienne complète se réduira à une simple courbe à deux branches infinies, comme la parabole, ayant son axe de symétrie perpendiculaire à l'axe de révolution; par conséquent, la figure complète engendrée se réduira elle-même à un étranglement unique s'étendant indéfiniment de part et d'autre de son cercle de gorge. Nous connaissons bientôt d'une manière précise la nature de cette troisième limite de l'onduloïde.

§ 52. Revenons maintenant à l'emploi de deux disques pour la réalisation de la portion d'onduloïde comprise entre les milieux de deux étranglements voisins (§ 47). Quand on essaie cette réalisation, en attachant aux deux disques une masse d'huile plus grande que celle qui doit constituer la figure, puis absorbant graduellement l'excès au moyen de la petite seringue, l'opération marche sans difficulté tant que les éléments de la ligne méridienne qui aboutissent aux bords des disques s'écartent notablement du parallélisme avec l'axe; mais lorsqu'ils sont près d'atteindre ce parallélisme, ou, en d'autres termes, lors qu'on approche de la portion d'onduloïde que l'on veut obtenir, il faut agir avec plus de précaution, sans quoi la figure pourrait s'altérer spontanément et se désunir. En conduisant l'opération avec ménagement, et en n'enlevant, vers la fin, l'huile que par quantités fort petites, on parvient, autant que l'oeil peut en juger, à la portion cherchée (fig. 22), portion qui varie de forme en se rapprochant ou en s'éloignant du cylindre, suivant que le diamètre des disques est plus grand ou plus petit par rapport à leur distance; mais alors la cause la plus légère; telle qu'un petit mouvement imprimé à la masse par le bec de la seringue, suffit pour déterminer l'altération graduelle, puis la destruction de la figure: on voit celle-ci s'amincir près de l'un des disques, cet amincissement se prononce de plus en plus, l'huile se porte en plus grande quantité du côté de l'autre disque (fig. 26), et la masse finit par se séparer en deux parties.

De ce que, la figure ainsi obtenue, une altération occasionnée par une cause minime progresse ensuite spontanément, on doit inférer que la portion de l'onduloïde comprise entre le milieu d'un étranglement et celui de l'étranglement suivant est à la limite de la stabilité.

On comprend, d'après ce que nous venons d'exposer, pourquoi, dans le § 47, nous avons prescrit l'adoption d'un cylindre comme système solide: avec des disques, il faut des tâtonnements et des soins particuliers pour arriver sans accidents jusqu'au point où les derniers éléments de la ligne méridienne sont ou paraissent parallèles à l'axe, tandis qu'avec le cylindre, la figure est parfaitement stable, et le parallélisme voulu s'établit de

de lui-même. Mais il reste à expliquer comment la stabilité de la figure peut dépendre des deux circonférences suivant lesquelles la couche superficielle de la masse touche le cylindre (ibid.) La chose est très-simple dans le cas des disques, lorsqu'il arrive, comme nous l'avons dit, que la figure s'amincit spontanément d'un côté, les éléments de la couche superficielle qui aboutissent au bord du disque près duquel cet effet a lieu, s'inclinent vers l'axe (fig. 26); or, dans le cas du cylindre, les derniers éléments de la couche superficielle ne sauraient s'incliner ainsi, puisqu'ils sont appliqués sur la surface du solide.

Cette explication suggère naturellement l'idée de substituer aux disques minces des disques épais, ou plutôt des portions de cylindre: car, en donnant d'abord à la masse un volume suffisant pour que l'huile atteigne les bords des faces de ces derniers disques opposées à celles qui se regardent, puis en enlevant du liquide jusqu'à ce que les circonférences de contact se trouvent sur l'épaisseur de ces mêmes disques,

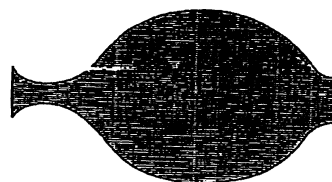


Fig. 26

la causé de stabilité ci-dessus indiquée existera évidemment tout aussi bien qu'avec un cylindre continu. Or c'est ce que l'expérience confirme pleinement: les disques dont je me suis servi avaient chacun 15 millimètres de diamètre, et 8 d'épaisseur, et ils étaient maintenus à 90 millimètres l'un de l'autre; tout le système est représenté fig. 27. En faisant adhérer à leur ensemble une masse d'huile d'abord trop grande, enlevant ensuite l'excès, et poussant légèrement la masse à droite ou à gauche avec le bec de la seringue, de manière que les points d'où la ligne méridienne paraissait partir fussent à peu près à égale distance des deux bases de chaque disque, la figure produite s'est montrée parfaitement stable; on a pu, en continuant à absorber de petites quantités d'huile, amener les extrémités de la ligne méridienne très-près des bords des bases solides en regard, sans que la figure perdît de sa stabilité, et ce n'est que lorsqu'elles ont paru atteindre ces bords mêmes, que l'instabilité s'est manifestée.

§ 53 Puisque la portion d'onduloïde dont nous nous occupons se trouve déjà à la limite de la stabilité lorsqu'elle est formée entre deux disques minces, et qu'ainsi elle est libre dans toute son étendue à l'exception de ses bases, il serait inutile de chercher à réaliser une portion d'onduloïde également libre qui dépasserait de part et d'autre les milieux de deux étranglements, et l'on en conclura que l'onduloïde indéfini est, comme le cylindre indéfini, une figure d'équilibre instable.

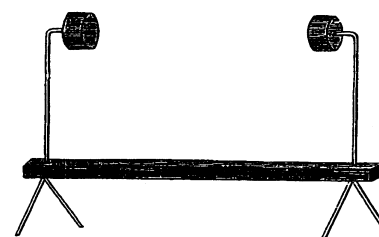


Fig. 27

§ 54 Il est aisé de voir maintenant que les figures bombées qui s'obtiennent (§ 40) lorsque, après avoir attaché une sphère d'huile à deux anneaux horizontaux, égaux en diamètre et placés l'un au-dessus de l'autre, on soulève l'anneau supérieur d'une quantité moindre que celle qui donne à la masse la forme cylindrique, ne sont autre chose que des portions de renflements d'onduloïde; seulement, quand on produit ces figures bombées par le procédé que nous venons de rappeler, elles sont placées de manière que leur axe soit vertical.

En effet, concevons un onduloïde réalisé au moyen de deux disques épais (§ 52),

et conséquemment à l'état d'équilibre stable, et imaginons qu'on place, à des distances égales à droite et à gauche du milieu de cette figure, entre ce milieu et les disques épais, deux anneaux solides verticaux ayant leurs centres sur l'axe et leurs contours extérieurs précisément à la surface de la masse; il est clair que ces anneaux ne détruiront pas l'équilibre de la figure; or, si l'on suppose que les parties de la figure situées au delà des anneaux soient remplacées par des calottes sphériques convexes s'appuyant sur ces derniers, et dont la courbure soit telle qu'elle détermine une pression égale à celle qui appartient au reste de la figure, l'équilibre existera évidemment encore, et il sera encore parfaitement stable, puisque la distance des anneaux est moindre que celle qui correspond à la limite de la stabilité. Mais alors, si les anneaux ne sont pas assez écartés pour que la portion de la ligne méridienne qui s'étend de l'un à l'autre contienne les points d'inflexion, il est visible que l'ensemble constituera l'une des figures bombées dont il s'agit; car, d'après les différentes formes de l'onduloïde, la ligne méridienne de la portion comprise entre les anneaux peut varier depuis un arc de cercle ayant son centre sur l'axe, jusqu'à une ligne droite, comme dans ces mêmes figures bombées. Pour que celles-ci ne fussent point, des portions d'onduloïde, il faudrait qu'entre les mêmes anneaux placés à une même distance l'un de l'autre, et avec une même masse d'huile, il y eût deux figures d'équilibre possibles, toutes deux à l'état stable; or c'est ce que dément l'expérience: si, après avoir transformé une sphère, d'huile en l'une des figures bombées en question, soit par l'augmentation de l'écartement des anneaux, soit par la soustraction d'une certaine quantité de liquide, on agite le mélange alcoolique de manière à imprimer à la masse d'huile des mouvements considérables, mais, pas assez cependant pour la désunir, et qu'ensuite on la laisse revenir au repos, elle reprend toujours identiquement la même forme.

On voit également que, dans les expériences du § 52, la figure liquide, quand l'huile est encore en excès, constitue déjà aussi une portion d'onduloïde.

§ 55. Passons aux figures que prend la masse quand l'écartement des anneaux excède celui qui correspond à forme cylindrique.

Si, après avoir formé entre deux anneaux un cylindre vertical dont la hauteur soit beaucoup moindre que celle qui correspondrait à la limite de la stabilité, on soulève un peu l'anneau supérieur, on voit le cylindre se creuser légèrement dans le sens méridien, de manière que la figure présente un étranglement; si l'on soulève encore l'anneau, l'étranglement s'approfondit davantage, et la est toujours parfaitement symétrique de part et d'autre du cercle de gorge, lequel est conséquemment situé au milieu de l'intervalle des anneaux. Si, dans le cylindre d'où l'on est parti, le rapport entre la hauteur et le diamètre était convenable, on peut, en continuant ainsi, rendre l'étranglement très-prononcé; et alors la ligne méridienne change le sens de sa courbure en allant vers les anneaux, en sorte qu'elle présente deux points d'inflexion situés à égale distance des deux côtés du cercle de gorge, alors aussi les bases de la figure conservent leur forme convexe, et même leur courbure augmente plus ou moins. Dans cette expérience, il y a toujours, on le conçoit, une limite d'écartement des anneaux, au-delà de laquelle l'équilibre n'est plus possible, si on la de passe, l'étranglement s'amincit spontanément jusqu'à se rompre, et la figure se sépare en deux portions, mais, pour tout écartement moindre que la limite dont il s'agit, l'équilibre est stable. Le cylindre qui m'a paru donner de la manière la plus prononcée les résultats ci-dessus, est celui dont la hauteur est au diamètre à peu près dans le rapport de 5 à 7 : en employant, par exemple, des anneaux de 70 millimètres de diamètre, il faut former un cylindre d'environ 50 millimètres de hauteur; l'anneau supérieur peut alors être soulevé jusqu'à ce qu'il soit distant de l'autre de près de 110 millimètres, et l'on obtient ainsi une figure dans

laquelle le cercle de gorge n'a qu'environ 30 millimètres de diamètre.

L'expérience faite par ce procédé exige de grandes précautions: l'égalité des densités des deux liquides et l'homogénéité de l'huile doivent être parfaites, et, lors qu'on approche de la limite d'écartement des anneaux, il faut agir avec beaucoup de ménagement. Mais on réussit sans difficulté en disposant les choses de manière que l'axe de révolution soit horizontal : les anneaux de 70 millimètres, qui sont alors verticaux, doivent être placés d'avance à la distance de 110 millimètres l'un de l'autre; chacun d'eux est fixé, par sa partie inférieure, à un fil de fer vertical, et ces fils sont fixés eux-mêmes, par leurs extrémités inférieures, à une planchette en fer qui supporte tout le système; enfin ces mêmes fils sont entourés de coton, pour que l'huile ne s'y attache pas (§ 9). On forme d'abord un cylindre entre les deux anneaux¹⁸ puis on diminue graduellement le volume de la masse à l'aide de la petite seringue. Si, lorsque le cercle de gorge n'est plus que d'environ 30 millimètres, on a soin de n'enlever l'huile que par très-petites portions à la fois, on parvient à réduire ce diamètre à 27 millimètres, et l'on obtient ainsi le résultat représenté fig. 28.

Or il est évident que toutes ces figures étranglées et à bases convexes, figures qui peuvent, comme celles que nous avons étudiées dans les paragraphes précédents, s'écarter aussi peu du cylindre qu'on le veut, sont encore des portions d'onduloïde, mais prises autrement dans l'onduloïde indéfini : tandis que le milieu des unes est par l'équateur d'un renflement, le milieu des autres est occupé par le cercle de gorge d'un étranglement ; les plus étendues des premières se composent d'un renflement entier entre deux demi—étranglements (fig. 21 et 22), et celle que représente la fig. 28 se compose d'un étranglement entier entre deux portions de renflements.

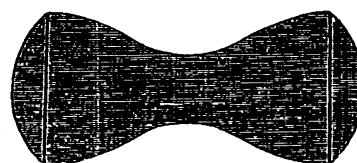


Fig. 28

§ 56 Maintenant reprenons nos anneaux horizontaux, afin de pouvoir placer à volonté l'anneau supérieur plus près ou plus loin de l'autre; formons encore un cylindre entre eux, puis, sans changer leur distance, enlevons graduellement de l'huile à la masse. Si le rapport de la distance des anneaux à leur diamètre est beaucoup moindre que dans la dernière expérience du paragraphe précédent, la courbure des bases, au lieu d'aller en augmentant à mesure que l'étranglement s'approfondit, va, au contraire, en diminuant; et si ce rapport ne dépasse pas $\frac{2}{3}$ environ, on arrive à rendre les bases absolument planes. Pour un rapport moindre encore, on peut même aller plus loin: en continuant à absorber du liquide, on voit les bases devenir concaves: formons, par exemple, entre nos anneaux de 70 millimètres de diamètre, un cylindre de 35 millimètres de hauteur (fig. 29); par l'absorption graduelle de l'huile, nous verrons les bases s'affaisser de plus en plus en même temps que l'étranglement se creuse, et perdre enfin toute leur courbure, et nous aurons ainsi le résultat représenté fig. 30. Si nous continuions à

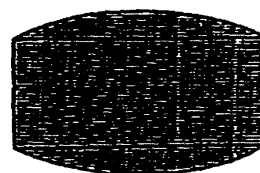


Fig. 29

¹⁸ On effectue cette opération par le moyen indiqué au § 46, c'est-à-dire en attachant d'abord la masse à l'un des anneaux fixes, puis l'étirant vers l'autre à l'aide d'un anneau mobile de même diamètre, et enfin absorbant l'excès d'huile.

faire agir la petite seringue, les bases prendraient une courbure concave; mais, pour le moment, arrêtons—nous lorsqu'elles sont planes.

Avec de telles bases, l'étranglement compris entre les anneaux ne peut plus (§ 49) appartenir à l'onduloïde, et nous parvenons conséquemment à une nouvelle figure de révolution. Cherchons donc ce qu'est cette nouvelle figure dans son état complet.

Les bases de notre figure partielle étant planes, et conséquemment à courbure moyenne nulle (§ 2), l'équilibre exige que la surface de la portion comprise entre les deux anneaux, et, par suite, celle de tout le reste de la figure complète, soit aussi à courbure moyenne nulle; il faut donc qu'on ait partout $\frac{1}{M} + \frac{1}{N} = 0$, d'où $M = -N$; et comme les quantités M et N peuvent être considérées comme appartenant toutes deux à la ligne méridienne (§ 36), cette ligne doit être telle qu'en chacun de ses points, son rayon de courbure soit égal et opposé à la normale. Or les géomètres ont démontré que la seule courbe qui jouisse de cette propriété est la *chaînette*¹⁹. La courbe tourne alors son sommet vers l'axe auquel on rapporte les normales, la droite qui la partage symétriquement en deux parties égales est perpendiculaire à cet axe, et le sommet de la courbe est distant de celui-ci d'une quantité égale au rayon de courbure de ce même sommet.



Fig. 30

Notre figure est donc, dans son état complet, celle qui serait engendrée par la d'une chaînette ainsi placée par rapport à l'axe. Nous lui donnerons, d'après cela, le nom de *Catenoïde*; la fig. 31 en représente une coupe méridienne assez étendue, dans laquelle l'axe de révolution est ZZ' .

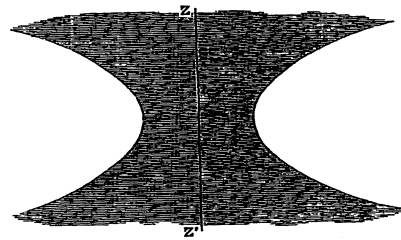


Fig. 31

La chaînette étant une courbe à branches infinies, le caténoïde s'étend donc encore à l'infini, comme le cylindre et l'onduloïde, mais non plus seulement dans le sens de l'axe.

Il est à peine nécessaire de faire remarquer que si, dans notre caténoïde partiel réalisé, la surface courbe comprise entre les anneaux exerce la même pression que les bases planes, c'est que, dans cette surface courbe, la courbure moyenne, c'est-à-dire (§ 2) la moyenne entre toutes les courbures positives et négatives autour d'un même point, étant nulle, son influence sur la pression est également nulle, de sorte que cette pression demeure la même que s'il n'y avait aucune courbure. Nous avons déjà vu un cas analogue à la fin du § 31.

§ 57. En vertu du principe qui termine le § 2, on peut concevoir deux caténoïdes d'aspects différents, savoir celui de la fig. 31, dans lequel le liquide remplit l'espace que la chaînette en tournant laisse entre elle et l'axe, et un autre dans lequel le liquide occupe l'espace embrassé par la courbe. La fig. 32 représente une coupe méridienne de ce dernier.

§ 58. Dans l'expérience du § 56, on n'arrive, comme nous l'avons dit, à rendre planes les bases de la figure, que lorsque l'écartement des anneaux n'excède pas les

¹⁹ La chaînette est, comme on sait, la courbe que forme, dans l'état d'équilibre, une chaîne pesante et parfaitement flexible suspendue à deux points fixes.

2/3 environ de leur diamètre. Nous reviendrons (§ 62) sur cette expérience; mais nous insisterons dès à présent sur une conséquence importante qui s'en déduit immédiatement: on doit en conclure, en effet, que, pour des anneaux d'un diamètre donné, il y a un maximum d'écartement au-delà duquel aucune portion de caténoïde n'est plus possible entre eux. Nous allons montrer que ce résultat est d'accord avec la théorie, et nous serons conduit en même temps à un nouveau résultat.

On a vu que la chaînette génératrice doit satisfaire à cette condition, que le rayon de courbure de son sommet soit égal et opposé à la droite qui mesure la distance de ce sommet à l'axe de révolution. Cela étant, concevons, dans un plan méridien, une droite perpendiculaire à l'axe de révolution, et représentant l'axe de symétrie des chaînettes, puis une seconde

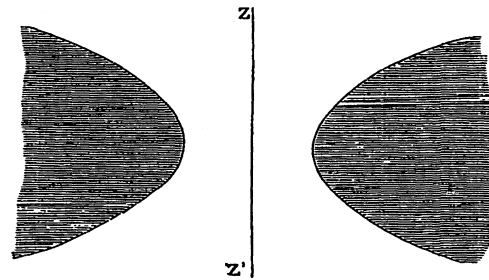


Fig. 32

droite parallèle à l'axe de révolution et distante de celui-ci d'une quantité égale au rayon des anneaux. Dans les divers écartements de ces derniers, leurs centres demeureront sur l'axe de révolution, et leurs contours s'appuieront toujours sur la seconde droite ci-dessus, que, pour abrégé, nous appellerons la droite des anneaux. Imaginons enfin, dans le même plan, une chaînette génératrice ayant son sommet au point où la droite des anneaux est coupée par l'axe de symétrie dont nous avons parlé. Cette chaînette sera tangente en ce point à la droite en question, et ne pourra conséquemment s'appuyer sur les anneaux que lorsque les contours de ceux-ci passeront par le point de tangence, ou, en d'autres termes, lorsque la distance mutuelle des deux anneaux sera nulle²⁰; la chaînette dont il s'agit correspond donc au cas d'un écartement nul des anneaux. Maintenant supposons que la courbe quitte cette position et marche graduellement vers l'axe de révolution, en se modifiant de manière à satisfaire toujours à la condition d'égalité entre le rayon de courbure de son sommet et la distance de ce sommet à l'axe; dans chacune de ses nouvelles positions, elle coupera la droite des anneaux en deux points, que nous désignerons par A et B. La distance de ceux-ci représentera donc, dans chacune de ces mêmes positions, l'écartement des anneaux, et la chaînette correspondante représentera la ligne méridienne d'un caténoïde dont les anneaux comprendraient une portion entre eux. Cela posé, examinons quelle est la marche des points A et B.

Dans la position initiale de la chaînette, c'est-à-dire lorsque son sommet est tangent à la droite des anneaux, les points A et B sont confondus au point de tangence; puis, lorsque le sommet de la courbe commence à marcher vers l'axe de révolution, ces deux points se séparent et s'éloignent progressivement l'un de l'autre. Or je dis que leur distance mutuelle atteindra un maximum, après lequel elle ira, au contraire, en décroissant. En effet, d'après la condition à laquelle la chaînette est astreinte, quand son sommet sera arrivé très-près de l'axe de révolution, le rayon de courbure de ce sommet sera devenu très-petit, d'où il suit que les deux branches de la courbe seront très-rapprochées, et que, par conséquent, les deux points A et B seront aussi très-voisins l'un de l'autre; enfin quand le sommet sera sur l'axe, ces mêmes points seront de nouveau réunis en un seul, puisque alors le rayon de courbure du sommet sera nul,

²⁰ Nous regardons ici, pour simplifier, les anneaux comme formés de fils sans épaisseur.

et qu'ainsi les deux branches de la courbe ne feront plus qu'une seule ligne droite confondue avec l'axe de symétrie. Les points A et B qui, partant de la coïncidence, vont d'abord en s'écartant, se rapprochent donc ensuite, jusqu'à coïncider enfin une seconde fois; d'où il suit nécessairement que la distance mutuelle de ces deux points atteint un maximum; en outre, on voit aisément, d'après la nature de la courbe, que ce maximum doit être fini, et même ne peut être considérable relativement au diamètre des anneaux.

Il est évident que, dans son trajet jusqu'à l'axe de révolution, la courbe a passé par tous les cas qui, avec les anneaux donnés, peuvent convenir à l'équilibre; le maximum ci-dessus constitue donc une limite d'écartement des anneaux, au delà de laquelle il n'y a plus de caténoïde possible entre eux. Mais ce qui précède nous fournit une autre conséquence également remarquable. Puisque, pendant le trajet du sommet de la chaînette, les points A et B s'éloignent d'abord l'un de l'autre pour se rapprocher ensuite, ils repassent nécessairement par les mêmes distances, de sorte que, pour chaque distance inférieure à la limite, ils appartiennent à la fois à deux chaînettes, or il résulte de là qu'à tout écartement des anneaux moindre que l'écartement maximum, correspondent toujours deux caténoïdes distincts s'appuyant sur ces anneaux, mais pénétrant inégalement entre eux. On voit sans peine que les sommets des deux chaînettes génératrices, sommets qui, pour un écartement nul, sont l'un au contour commun des anneaux en contact, l'autre sur l'axe de révolution, se rapprochent de plus en plus à mesure que l'écartement augmente, et coïncident enfin, ainsi que les deux courbes tout entières, quand cet écartement atteint son maximum. Les deux caténoïdes différeront donc d'autant moins que l'écartement des anneaux sera plus grand, et n'en feront plus qu'un à la limite.

§ 59. Toutes les chaînettes sont, comme on sait, semblables entre elles; or si l'on conçoit une suite de caténoïdes complets engendrés par des chaînettes de différentes dimensions, toutes ces chaînettes seront aussi, d'après la condition à laquelle elles doivent satisfaire (§ 56), semblablement placées par rapport à l'axe de révolution, et conséquemment tous les caténoïdes seront des figures semblables.

Le caténoïde complet n'est donc pas susceptible de variations de forme comme l'onduloïde, mais constitue une figure unique, comme la sphère et le cylindre.

Ainsi les deux caténoïdes complets qui, théoriquement, s'appuient sur les mêmes anneaux, quand l'écartement de ceux-ci est au-dessous de la limite, ne diffèrent l'un de l'autre que par leurs dimensions homologues absolues.

p.100 FIGURES D'ÉQUILIBRE

§ 60. Des deux caténoïdes partiels appartenant à ces deux caténoïdes complets et également possibles, d'après la théorie, entre les anneaux, notre procédé donne nécessairement le moins rentré; et si l'on essaie ensuite d'arriver au plus rentré en enlevant de nouvelles quantités d'huile à la masse, c'est toujours, comme nous le verrons bientôt, une autre figure d'équilibre qui se produit; or, de l'impossibilité de réaliser ce caténoïde partiel le plus rentré, on peut légitimement conclure qu'il constituerait une figure d'équilibre instable.

Quant au moins rentré, il forme évidemment une portion d'autant plus étendue du caténoïde complet que l'écartement des anneaux est plus près du maximum; car, à mesure que les anneaux sont plus écartés, l'arc de la chaînette qu'ils interceptent entre eux est (§ 58) une portion plus considérable de la courbe. Pour avoir un caténoïde partiel plus étendu par rapport au caténoïde complet, il faudrait que la chaînette pénétrât plus avant entre les anneaux; mais dès lors, de quelque petite quantité que le sommet de la courbe avançât, l'écartement des anneaux diminuerait (ibid.), il y aurait une autre chaînette possible, moins rentrée, et s'appuyant sur les mêmes anneaux, et le caténoïde

partiel engendré par la première étant le plus rentré, il serait instable. Le caténoïde de plus grande hauteur constitue donc la portion la plus étendue du caténoïde complet que l'on puisse réaliser entre deux anneaux égaux.

Signalons ici une autre conséquence à laquelle ce qui précède semble conduire, et qui serait en opposition avec les faits pour tout écartement inférieur au maximum, le caténoïde le moins rentré se montre toujours parfaitement stable, et, ainsi qu'on l'a vu ci-dessus, le plus rentré doit être regardé comme étant toujours instable; or le caténoïde de plus grande hauteur forme, on vient aussi de le voir, le passage entre les caténoïdes de la première catégorie et ceux de la seconde, et, par suite, entre les caténoïdes stables et les caténoïdes instables; on peut donc se croire en droit d'admettre que le caténoïde de plus grande hauteur est à la limite de la stabilité de ce genre de figure; et cependant, quand on le réalise avec une masse d'huile (§ 62), il manifeste une stabilité très décidée. Nous saurons, dans le chapitre où nous traiterons les questions de stabilité, à quoi tient cette apparente contradiction.

§ 61. — Il est aisé de voir que la troisième limite des variations de l'onduloïde, limite dont nous avons parlé au § 51, n'est autre chose que le caténoïde. En effet, en faisant varier l'onduloïde partiel de la manière indiquée dans ce même paragraphe, il est clair qu'à mesure que l'on augmente le volume de la masse, la normale et le rayon de courbure relatifs au sommet de l'arc méridien convexe vont en croissant, et deviennent infinis en même temps que ce volume; d'où il suit qu'à cette limite la quantité $\frac{1}{M} + \frac{1}{N}$ est nulle, ce que nous savons être le caractère du caténoïde.

La quantité $\frac{1}{M} + \frac{1}{N}$ convergeant ainsi vers zéro à mesure que l'onduloïde approche du caténoïde, la pression exercée par la couche superficielle converge en même temps vers celle d'une surface plane; si donc l'on conçoit, entre deux anneaux, un étranglement appartenant à un onduloïde, et si l'on imagine que cet onduloïde marche par degrés vers le caténoïde, les bases de la figure, bases dont la pression doit toujours être égale à celle de l'étranglement, deviendront nécessairement de moins en moins convexes, et seront enfin tout à fait planes. Or c'est ce que réalise évidemment l'expérience du § 56 : lorsque, après avoir formé entre deux anneaux un cylindre dont la hauteur ne dépasse pas les $\frac{2}{3}$ du diamètre, on lui enlève graduellement du liquide et que les bases s'affaissent peu à peu jusqu'à perdre toute leur courbure, l'étranglement qui se produit et s'approfondit au fur et à mesure, appartient, on le comprend, à un onduloïde qui tend vers sa troisième limite, et l'expérience en question nous fait ainsi assister au passage progressif de l'onduloïde au caténoïde.

Si nous réunissons ce qui précède au contenu du § 55, nous pourrions légitimement en déduire cette conclusion: tout étranglement s'appuyant sur deux anneaux et présentant des bases convexes est un étranglement d'onduloïde, que la courbure des bases soit supérieure, égale ou inférieure à celle des bases du cylindre qui serait compris entre les mêmes anneaux.

§ 62. J'ai cherché à déterminer expérimentalement, au moins d'une manière approchée, le rapport maximum entre la hauteur et le diamètre des bases. Le diamètre extérieur des anneaux employés était de 71 millimètres. Dans chacun des essais, on a commencé par former un cylindre entre ces anneaux, puis on a enlevé de l'huile à la masse par seringues pleines d'abord, et ensuite par petites portions; on interrompait de temps à autre l'opération pour observer la figure. On a trouvé, de cette manière, que le plus grand écartement des anneaux pour lequel on pût obtenir une figure à bases planes, était de 47 millimètres, c'est sensiblement les $\frac{2}{3}$ de 71. Nous pouvons conclure de là que la hauteur maxima du caténoïde partiel est, soit exactement, soit à fort peu près, les $\frac{2}{3}$ du diamètre des bases. Ce caténoïde est représenté fig. 33. Ces expériences

ont présenté des particularités curieuses, dont la description trouvera sa place dans le chapitre IX.

Nous terminons ici l'étude de l'onduloïde et du caténoïde, et nous allons passer à celle d'une autre figure encore.

§ 63. Cette autre figure, nous en avons déjà entrevu une portion : c'est l'étranglement à bases concaves dont nous avons parlé au § 56, étranglement qui, par la nature de ces bases, est étranger à l'onduloïde et au caténoïde. Pour le réaliser, il

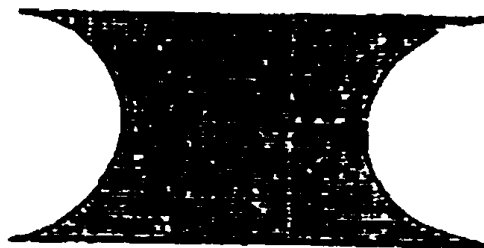


Fig. 33

faut, comme nous l'avons dit, que la distance des anneaux soit inférieure aux $2/3$ du diamètre; la fig. 34 représente, en coupe méridienne, un semblable étranglement, pour une distance des anneaux égale au tiers environ du diamètre, et lorsque les bases se sont déjà fortement creusées; les lignes ponctuées sont les coupes des plans des anneaux. Essayons maintenant, ainsi que nous l'avons fait à l'égard des deux figures précédentes, de déterminer la forme complète de la ligne méridienne.

Présentons d'abord quelques remarques. En premier lieu, supposons que le rapport entre la distance et le diamètre des anneaux soit suffisamment au-dessous de pour permettre d'extraire une grande quantité de liquide sans qu'on puisse craindre d'occasionner la désunion. Dans ce cas, l'étranglement et les bases se creusant à la fois de plus en plus, on comprend qu'il doit arriver un instant après lequel

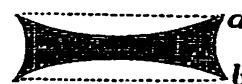


Fig. 34

leurs surfaces ne pourraient plus coexister sans se couper mutuellement. On saura, dans le chapitre VI, ce qui se passe alors; mais on voit, dès à présent, que si l'on veut observer l'étranglement dans toutes les phases où il appartient à la nouvelle figure d'équilibre, on doit mettre obstacle au creusement des bases, et c'est à quoi l'on parvient sans peine en substituant des disques aux anneaux; on peut alors enlever de l'huile jusqu'à ce que la figure se désunisse spontanément au milieu de sa hauteur. Les disques que j'ai employés ont, comme les anneaux, 70 millimètres de diamètre; l'inférieur est porté sur trois pieds plus solides que ceux des anneaux, et partant de points situés entre le bord et le centre; le supérieur est soutenu par un fil de fer suffisamment épais fixé normalement à son centre.

En second lieu, l'étranglement, qu'il soit creusé entre des anneaux ou poussé plus loin entre des disques, se montre toujours parfaitement symétrique de part et d'autre de son cercle de gorge. C'est d'ailleurs ce que veut la théorie, car le mode de raisonnement du § 48 est indépendant de la nature de la ligne méridienne, et s'applique ainsi à l'étranglement dont nous nous occupons aussi bien qu'à un étranglement d'onduloïde. Si donc, dans un plan méridien, on conçoit une droite perpendiculaire à l'axe de révolution et passant par le centre du cercle de gorge, tout ce que la ligne méridienne complète offrira d'un côté de cette droite, elle l'offrira aussi, d'une manière exactement symétrique, de l'autre côté, en sorte que cette même droite constituera un axe de symétrie.

En troisième lieu, puisque, en employant des anneaux, les bases de la figure par-

tielle sont des calottes sphériques concaves et ont conséquemment une courbure moyenne négative, il doit en être de même de la surface de l'étranglement, et, par suite, de celle de tout le reste de la figure complète ; ainsi, dans cette figure complète, la quantité $\frac{1}{M} + \frac{1}{N}$ est partout négative.

§ 64. Ces préliminaires posés, je dis que les points *a* et *b* (fig. 34) où s'arrête la ligne méridienne partielle, ne peuvent, dans la ligne méridienne complète, être des points d'inflexion. On voit, en effet, d'après la direction de la tangente en ces points, que si la ligne méridienne prenait à partir de là une courbure de sens contraire (fig. 35), le rayon de courbure serait, dans cette partie de la figure, dirigé à l'intérieur du liquide comme la normale, et qu'ainsi la quantité $\frac{1}{M} + \frac{1}{N}$ deviendrait positive.

Au delà des points *a* et *b*, la ligne méridienne commence donc par garder une courbure concave; et le même sens de courbure se maintient évidemment pour la même raison, tant que la courbe va en s'éloignant à la fois de l'axe de révolution et de l'axe de symétrie. Mais la courbe ne peut continuer indéfiniment à s'éloigner de ces deux axes en effet, si telle était sa marche, il est clair que la courbure devrait diminuer de manière à s'annuler, dans chacune des deux branches, au point situé à l'infini, en sorte qu'en ce point le rayon de courbure aurait une valeur infinie; et comme il en serait évidemment de même de la normale, la quantité $\frac{1}{M} + \frac{1}{N}$ deviendrait nulle à cette limite.

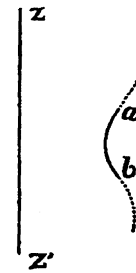


Fig. 35

Il faut donc de toute nécessité qu'à une distance finie de son sommet, la courbe ait deux points dans lesquels ses éléments soient parallèles à l'axe de symétrie, et c'est ce que l'expérience confirme, ainsi que nous allons le voir.

§ 65. Si l'on emploie des disques, qu'on les place à une distance égale au tiers environ de leur diamètre, et que l'on pousse suffisamment loin l'absorption

du liquide, l'angle compris entre les derniers éléments de la surface de la masse et le plan de chacun des disques diminue jusqu'à s'annuler complètement, de manière que cette surface est alors tangente aux plans des disques (fig. 36), et qu'ainsi les derniers éléments de la ligne méridienne sont parallèles à l'axe de symétrie. Il est fort difficile de juger du point précis où ce résultat est atteint; mais on s'assure qu'il se produit réellement, en continuant à enlever du liquide on ne tarde pas, en effet, à voir les circon-



Fig. 36

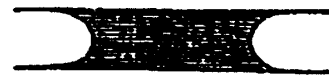


Fig. 37

férences qui terminent la surface de la masse abandonner les bords des disques, se retirer, en diminuant de diamètre, à une certaine distance en dedans de ces bords, et laisser libre une petite zone de chacun des plans solides; or, comme ces zones demeurent nécessairement mouillées d'huile, bien qu'en couche excessivement mince, il est clair que la surface de la masse doit y aboutir tangentiellement. Si l'écartement des disques est moindre encore, on obtient un résultat de même nature; seulement on peut, avant qu'il y ait désunion spontanée au milieu de la figure, rétrécir davantage les circonférences de contact, ou, en d'autres termes, augmenter la largeur des zones libres (fig. 37).

§ 66. La raison donnée dans le § 64 pour établir l'absence d'une inversion de courbure tant que la courbe s'éloigne à la fois de l'axe de révolution et de

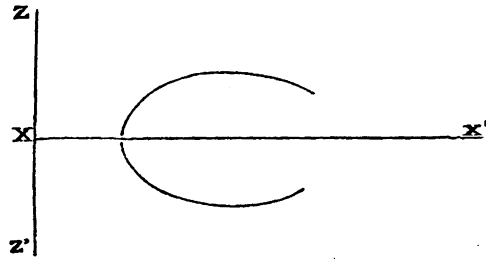


Fig. 38

l'axe de symétrie, subsiste évidemment encore aux points que nous venons de considérer, c'est-à-dire à ceux où les éléments sont parallèles à ce dernier axe; d'où il résulte que la courbe se rapproche ensuite de celui-ci, en conservant le même sens de courbure, comme le montre la fig. 38, où la courbe est dessinée sur une plus grande échelle que la portion comprise dans la fig. 36, et où l'axe de symétrie, est représenté par la droite XX' .

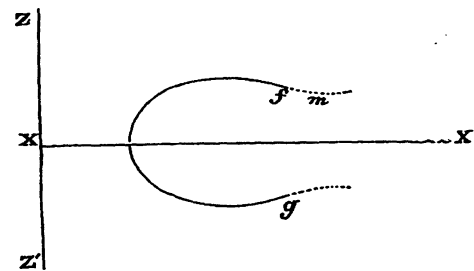


Fig. 39

Et tant que ces prolongements de la courbe continuent à s'éloigner de l'axe de révolution, le sens de la courbure doit encore demeurer le même. Supposons, en effet, qu'il change, en f et en g par exemple (fig. 39); alors, du point f à un point tel que m situé un peu au de-là, le rayon de courbure et la normale auraient, on le voit, des directions opposées, en sorte que la quantité $\frac{1}{M} + \frac{1}{N}$ serait une différence; or, de f en m , la normale irait évidemment en croissant, puisque, d'une part, la distance à l'axe de révolution augmente, et que, d'autre part, cette normale aurait une obliquité de plus en plus grande; il faudrait donc, pour que la différence ci-dessus demeurât constante, que le rayon de courbure allât aussi en croissant de f en m ; mais c'est précisément le contraire, qui aurait lieu; car, à cause de l'inflexion, le rayon de courbure serait infini en f , et conséquemment ne pourrait que diminuer à partir de là. Il est inutile de faire remarquer que ce que nous venons de dire s'applique également au point g .

Voyons maintenant si, avant d'atteindre

l'axe de symétrie, la courbe peut présenter deux points tels que h et k (fig. 40) où ses éléments soient perpendiculaires à cet axe. Pour cela, examinons à quelles conditions doit satisfaire la courbure depuis le sommets jusqu'aux points h et k , et il suffira de considérer l'arc snh . Soit le point où l'élément de la courbe est parallèle à l'axe de symétrie. De s en n , le rayon de courbure et la normale ont évidemment des directions contraires, et la quantité $\frac{1}{M} + \frac{1}{N}$ constitue une différence; donc, d'un point à un autre de cet arc, les

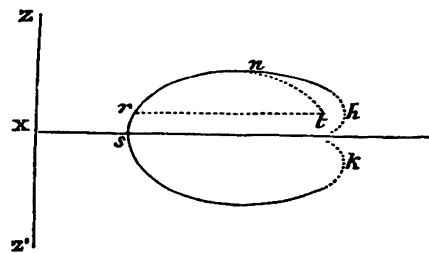


Fig. 40

quantités M et N doivent varier dans le même sens; et comme la normale va en augmentant du point s au point n , le rayon de courbure doit aller de même en augmentant; d'où il suit que, de s en n , la courbure va en décroissant. Plus loin, c'est-à-dire de n en h , on voit que le rayon de courbure et la normale sont dirigés du même côté, de manière que les deux termes de la quantité $\frac{1}{M} + \frac{1}{N}$ sont de même signe, et qu'ainsi, d'un point à un autre, les quantités M et N doivent varier en sens opposé; or, dès qu'on s'écarte de n sur l'arc nh , la normale commence par diminuer, puisque, au point n , elle est infinie, donc le rayon de courbure commence par augmenter, ou, en d'autres termes, la courbure va d'abord en diminuant, et, quelle que soit sa marche ultérieure, elle sera toujours, en tous les points de l'arc nh , plus faible qu'en n , puisque en tous ces points la normale est finie, et, par suite, moindre qu'en n . Mais nous savons que la courbure va en croissant de n en s ; donc, dans toute l'étendue de l'arc nh , la courbure est moindre qu'en aucun point de l'arc ns .

Cela posé, menons la droite hr parallèle à l'axe de symétrie, puis construisons, à partir du point n un arc nt exactement symétrique à l'arc nr . Dans toute la longueur de l'arc nh la courbure sera, en vertu de ce qui précède, moindre qu'en aucun des points de l'arc nt ; d'où il suit que ce dernier arc sera entièrement intérieur au premier, or l'arc nt aboutit en t à la droite hr par un élément qui fait nécessairement, avec la partie tr de cette droite, un angle aigu; donc, pour que l'arc nh , qui part de n dans la même direction que l'arc nt , aboutît normalement, en h , à la droite hr , il faudrait qu'après s'être éloigné de l'arc nt , il allât ensuite en s'en rapprochant, ce qui est évidemment impossible par suite de l'infériorité de la courbure en tous ses points, on voit même qu'il doit couper la droite hr sous un angle plus aigu que ne le fait l'arc nt .

Ainsi la courbe, en s'abaissant, à partir de n , vers l'axe de symétrie, ne peut cesser de s'éloigner de l'axe

de révolution; et puisqu'elle ne peut d'ailleurs changer le sens de sa courbure, il faut nécessairement qu'elle aille couper l'axe de symétrie; enfin on comprend que, par suite encore de la condition qui régit ses courbures, elle doit couper cet axe obliquement, en sorte que nous arrivons à cette conclusion, qu'elle forme un noeud (fig. 41).

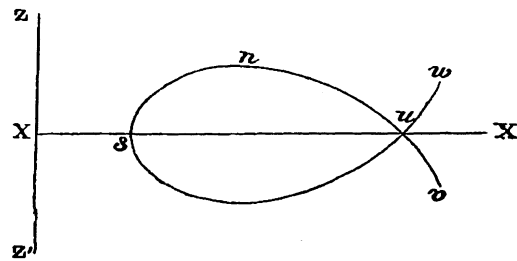


Fig. 41

Nous allons vérifier l'existence de ce noeud à l'aide de l'expérience; si nous n'avons point commencé par là, c'est qu'il fallait d'abord démontrer qu'en partant d'un étranglement pour lequel la courbure moyenne est négative, il n'y a pas d'autre forme possible de la ligne méridienne.

§ 67. Les étranglements réalisés dans les expériences du § 65 étant engendrés par une portion du noeud de la ligne méridienne complète, il est visible que la figure engendrée par le noeud tout entier, depuis le sommet de celui-ci jusqu'à sa pointe, serait en creux dans l'intérieur de l'huile; mais, comme nous le savons (§ 2), il est indifférent, pour l'équilibre, que le liquide soit situé d'un côté ou de l'autre de la surface; on peut donc également bien supposer pleine et en relief la figure engendrée par le noeud, et c'est dans ce dernier état que notre expérience va la réaliser. Seulement lorsque le liquide est transporté de ce côté de la courbe, les quantités M et N changent à la fois de

signe, et conséquemment la quantité $\frac{1}{M} + \frac{1}{N}$, de négative qu'elle était, devient positive.

On forme, dans un anneau en fil de fer, une lentille liquide bi-convexe (§ 19), dont l'épaisseur soit à peu près égale au sixième du diamètre par exemple, avec un anneau de 70 millimètres de diamètre, l'épaisseur de la lentille doit être d'environ 12 millimètres. Si l'on perce normalement cette lentille en son milieu par un moyen que nous indiquerons plus bas, on obtient une figure annulaire régulière, limitée extérieurement par l'anneau solide, et qui persiste pendant deux ou trois secondes, après quoi l'on voit l'ouverture centrale marcher vers un point de l'anneau solide, puis la masse se désunir en ce point, et tout le liquide refluer vers la partie opposée de l'anneau, pour y former une grosse masse sensiblement sphérique. Or la figure annulaire momentanée qui se forme dans ces circonstances est, bien qu'instable, une figure d'équilibre, puisqu'elle se maintient pendant quelques instants, et sa durée est assez grande pour que l'on puisse constater que sa coupe méridienne a la forme représentée par la fig. 42, dans laquelle la ligne ponctuée est la coupe du plan de l'anneau. Cette coupe méridienne montre évidemment que la surface de la figure produite est engendrée par un noeud ayant son sommet tourné vers l'axe de révolution et sa pointe à l'anneau solide.

Arrêtons-nous quelque peu sur les détails de l'expérience que nous venons de décrire, et sur certaines modifications de cette même expérience. Pour percer la lentille, il faut employer un petit cylindre de bois terminé en pointe à l'une de ses extrémités, et fixé, par son autre

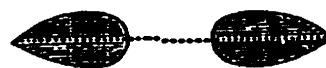


Fig. 42

extrémité, à un fil de fer que l'on recourbe obliquement de manière qu'en le tenant à la main, on puisse introduire le petit cylindre dans le vase, et percer normalement la lentille. Si le diamètre de l'anneau solide est, comme nous l'avons supposé plus haut, de 70 millimètres, celui du petit cylindre doit être d'environ 16 millimètres; le cylindre et sa pointe doivent être recouverts d'étoffe de coton, afin d'empêcher toute adhérence de l'huile.

Si l'on donne à la lentille une épaisseur qui surpasse notablement le sixième du diamètre de l'anneau solide, le liquide revient sur lui aussitôt qu'on retire le petit cylindre, et la masse reprend sa forme lenticulaire; mais on peut rendre l'épaisseur moindre que la limite ci-dessus; alors l'ouverture centrale prend des dimensions plus grandes, et, par conséquent, le noeud de la ligne méridienne est plus petit.

Lorsque l'épaisseur de la lentille est suffisamment inférieure à la limite en question, le mode de destruction spontanée de la figure instable n'est plus le même: l'ouverture centrale ne marche plus alors vers un point de l'anneau solide, mais la masse liquide annulaire s'étrangle et se désunit en plusieurs endroits à la fois, de sorte qu'elle se convertit en une série de petites masses isolées qui demeurent adhérentes à différentes parties de l'anneau métallique. Nous reviendrons plus tard sur ce dernier phénomène.

§ 68. L'anneau liquide pouvant ainsi prendre, dans un même anneau solide, des dimensions très-différentes suivant l'épaisseur de la lentille, ou, en d'autres termes, suivant le volume du liquide dont il est formé, il en résulte que, pour une même distance de la pointe du noeud de la ligne méridienne à l'axe de révolution, la longueur du noeud peut varier entre des limites étendues : dans les expériences ci-dessus décrites, ces variations se montrent comprises entre une petite fraction de la distance dont il s'agit et les $\frac{3}{4}$ à peu près de cette même distance. La figure complète dont nous nous occupons n'est donc pas toujours semblable à elle-même comme la sphère, le cylindre ou le caténoïde; elle est, comme l'onduloïde, susceptible de variations de forme. La comparaison des figures liquides représentées fig. 36 et 37 conduit à la même conclu-

sion.

§ 69. Avant d'aller plus loin, signalons une particularité remarquable. Si l'on suppose le noeud en relief, le liquide qui l'occupe se trouve dans la concavité de la courbe, et il doit évidemment se trouver encore du même côté de cette courbe au-delà du point u (fig. 41); il remplit donc les espaces compris entre les prolongements uv , uw et le noeud, en sorte que ce noeud est engagé, soit complètement, soit partiellement, dans l'intérieur de la masse. Si l'on suppose le noeud en creux, on voit sans peine que ce sont alors les prolongements uv et uw qui sont engagés dans le liquide.

De là résulte cette conséquence singulière, que, bien que la condition générale de l'équilibre soit satisfaite, on ne peut se représenter la figure complète qu'à l'état de simple surface, et non à celui de masse liquidé. Dans ce dernier état, il n'est possible de concevoir que des portions isolées de la figure, telles, par exemple, que la portion engendrée par le noeud seul.

§ 70. Tâchons actuellement de découvrir la marche de la courbe au delà des points v et w (fig. 41). Nous savons déjà, par les raisons exposées dans le § 66, et auxquelles se rapporte la fig. 39, que tant que les branches de la courbe continuent à s'éloigner de l'axe de révolution, la courbure ne peut changer de sens, et conséquemment demeure concave vers cet axe.

Cela étant, il n'y a évidemment que trois hypothèses possibles: ou bien les branches en question s'éloignent de l'axe de révolution de manière que leur distance à ce dernier converge vers l'infini; ou bien elles tendent vers une asymptote parallèle à cet axe; ou bien chacune d'elles présente, à une distance finie de la pointe u du noeud, un point où l'élément est parallèle à ce même axe.

Nous devons exclure immédiatement la première de ces hypothèses: elle exigerait, comme nous l'avons déjà fait remarquer (§ 64), qu'aux points situés à l'infini sur les deux branches, le rayon de courbure et la normale fussent l'un et l'autre infinis, et qu'ainsi la quantité $\frac{1}{M} + \frac{1}{N}$ fût égale à zéro.

Examinons donc la seconde hypothèse, savoir celle d'une asymptote parallèle à l'axe de révolution. Au point n (fig. 41), la normale est infinie et le rayon de courbure fini; au point où la branche nuv prolongée atteindrait l'asymptote, au contraire, le rayon de courbure serait infini et la normale, qui mesurerait la distance de ce point à l'axe, serait finie. Donc, en allant du point n à ce point extrême, la normale, d'abord supérieure en longueur au rayon de courbure, lui deviendrait ensuite inférieure; d'où il suit qu'il y aurait sur la courbe un point où la normale et le rayon de courbure seraient égaux, et pour lequel, par conséquent, le centre de courbure serait sur l'axe de révolution. Soient x ce point (fig. 43), o le centre de courbure correspondant, et $\alpha\beta$ un petit arc de cercle décrit du point o comme centre. Notre branche de courbe quitterait le point α suivant la même direction et avec la même courbure que l'arc $\alpha\beta$, puis se séparerait immédiatement de celui-ci. Or supposons qu'à partir de la courbure aille d'abord en décroissant; la courbe commencera nécessairement par être extérieure à l'arc de cercle. Soit $\alpha\gamma$ un petit arc de cette courbe, dans toute l'étendue duquel la courbure décroisse, et soit la longueur de

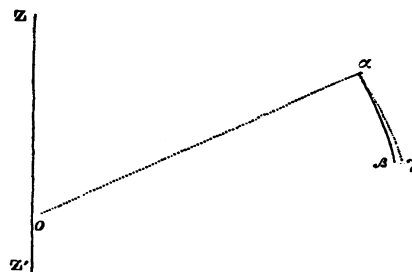


Fig. 43

l'arc $\alpha\beta$ prise égale à celle de l'arc $\alpha\gamma$. Le point γ sera plus éloigné de l'axe que le point β , et, en outre, à cause de l'infériorité des courbures, la tangente en γ fera avec ce même axe un angle plus grand que la tangente en β ; la normale au point γ sera donc, par cette double raison, plus longue que la normale au point β . D'un autre côté, par suite encore de l'infériorité des courbures, le rayon de courbure au point γ sera également plus long que le rayon de courbure au point β ; mais, en ce dernier point, ces deux quantités ont la même valeur, qu'au point α ; donc, en passant de α en β , le rayon de courbure et la normale augmenteront l'un et l'autre. Or cela est incompatible avec l'équation de l'équilibre; en effet, la courbe, dans toute la partie que nous étudions, tournant sa concavité vers l'axe, le rayon de courbure et la normale sont partout de même signe, et conséquemment lorsque l'un augmente, l'autre doit diminuer, et vice versa. Si l'on suppose qu'à partir de α la courbure aille en croissant, l'arc de courbe sera intérieur à l'arc de cercle, et le même mode de raisonnement ferait voir que, d'une extrémité à l'autre du premier, le rayon de courbure et la normale diminueront tous deux. L'hypothèse d'une asymptote parallèle à l'axe de révolution conduisant ainsi à un résultat impossible, on voit qu'elle doit être rejetée comme la première.

C'est donc la 3^{me} hypothèse qui est vraie; c'est-à-dire que la courbe présente deux points p et p' (fig. 44), où la tangente est parallèle à l'axe de révolution.

§ 71. L'expérience confirme pleinement cette déduction de la théorie, et elle fournit en outre une donnée qui nous dévoilera la marche ultérieure de la courbe.

Les deux disques étant placés à une distance quelconque l'un de l'autre, à une distance égale à leur diamètre, par exemple, on forme entre eux un cylindre, et l'on abaisse ensuite graduellement le disque supérieur : la figure, nous le savons, passe alors à l'onduloïde, et elle se bombe de plus en plus, jusqu'à ce qu'elle constitue une portion de sphère (fig. 45). Mais si l'on continue à abaisser le disque supérieur, la convexité méridienne augmente encore, et dépasse conséquemment le point ci-dessus; on obtient ainsi, par exemple, pour un certain rapprochement des disques, le résultat représenté (fig. 46), et la figure liquide est toujours parfaitement stable. Or, en cet état, elle ne peut plus faire partie de l'onduloïde, puisque l'on a dépassé la sphère, qui est (§ 50) l'une des limites des variations de ce dernier.

Enfin on peut descendre le disque supérieur jusqu'à ce qu'aux points où la ligne méridienne aboutit aux bords des disques, les tangentes soient près d'être perpendiculaires à l'axe de révolution, comme on le voit dans la fig. 47, et, pour une masse d'huile moindre, dans la fig. 48; mais, vers ce degré de rapprochement des disques, la figure liquide perd sa stabilité : si l'on abaisse un peu trop le disque supérieur, on voit l'huile se porter en plus grande masse d'un côté de l'axe du système, en sorte que la figure cesse d'être de révolution, puis, de ce même l'huile franchit les bords des disques, et s'étend en partie sur les faces extérieures de ceux-ci.

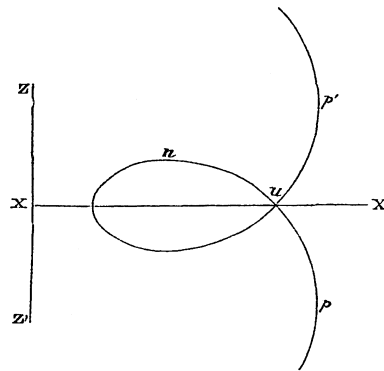


Fig. 44

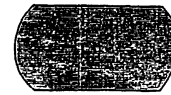


Fig. 45



Fig. 46

Maintenant, en vertu de ce qui a été exposé dans le paragraphe précédent, tant que la courbe, à partir de n (fig. 44), va en s'éloignant de l'axe de révolution, le rayon de courbure ne peut devenir égal à la normale; et, puis qu'il lui est inférieur en , il doit lui demeurer inférieur tant que l'on n'atteint pas le point p ; donc, dans toute l'étendue de l'arc nup sauf au point n même et peut-être au point p , auquel la démonstration ne s'étend pas, le centre de courbure est toujours situé entre la courbe et



Fig. 47

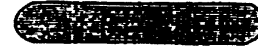


Fig. 48

l'axe, et conséquemment la courbure est toujours plus forte que celle d'une circonférence de cercle qui aurait son centre sur l'axe. Or, comme nous venons de le voir, dans les figures liquides partielles représentées fig. 46, 47 et 48, les courbures méridiennes sont plus fortes que lorsque la figure est une portion de sphère, ou, en d'autres termes, elles sont plus fortes que celle d'une circonférence de cercle passant par les bords des disques et ayant son centre sur l'axe. Il est clair, d'après cela, que ces mêmes figures partielles réalisent des portions de la figure complète engendrées par un arc de la ligne méridienne s'étendant de part et d'autre du point p (fig. 44); seulement elles se rapportent évidemment à des cas différents de cette figure complète, que nous savons être susceptible de variations comme l'onduloïde.

§ 72. Faisons un dernier pas dans la poursuite de notre ligne méridienne. Dans les expériences ci-dessus, lorsque les densités des deux liquides sont rendues bien égales, la figure d'huile se montre toujours parfaitement symétrique par rapport à son cercle équatorial. A la vérité, c'est l'oeil qui en juge ainsi, et l'on pourrait penser que cette symétrie n'est peut-être qu'approchée; mais nous allons faire voir qu'elle est rigoureuse. En l'absence de toute cause accidentelle d'irrégularité, il n'y aurait évidemment aucune raison pour qu'un excès de courbure existât plutôt d'un côté déterminé de l'équateur que de l'autre, puisque les deux disques sont égaux et parallèles; d'où résulte qu'il y a nécessairement une forme d'équilibre où la symétrie est exacte. Seulement si, dans nos figures partielles réalisées, figures qui sont stables, la symétrie n'était qu'approchée, il faudrait admettre que la forme d'équilibre exactement symétrique dont nous venons de parler, serait instable. Si donc toutes les figures liquides que l'on peut obtenir dans les expériences décrites plus haut, c'est-à-dire celles que donnent tous les degrés d'abaissement du disque depuis le cas de la fig. 45 jusqu'à celui de la fig. 47 et toutes les masses plus grandes et plus petites avec les mêmes disques, si, dis-je, toutes ces figures n'étaient symétriques qu'en apparence, à chacune d'elles correspondrait une autre figure d'équilibre extrêmement peu différente, et qui serait instable. Or l'existence de deux figures d'équilibre partielles extrêmement voisines, l'une stable et l'autre instable, peut bien se rencontrer dans un cas particulier des variations des deux figures complètes, ou, au moins, de l'une d'elles; mais, on le comprend, il est impossible que la même chose se reproduise dans toute l'étendue des variations de la figure partielle réalisée. Concluons de là que, dans les figures liquides du paragraphe précédent, la symétrie est réelle, et qu'ainsi, dans notre ligne méridienne complète, il y a, outre l'axe de symétrie du noeud, un autre axe de symétrie également perpendiculaire à l'axe de révolution, et passant par le point p (fig. 44).

Mais dès lors tout ce que la courbe présente d'un côté de ce point, elle doit le présenter symétriquement de l'autre côté; le noeud qui se trouve au-dessus de p doit donc avoir son correspondant au-dessous; et puisque ces deux noeuds ont eux respectivement leur axe de symétrie, il en résulte nécessairement, en premier lieu, qu'ils sont parfaitement identiques, et, en second lieu, que tout ce qu'il y a d'un côté de l'un

d'eux doit se reproduire identiquement de l'autre côté; d'où il suit enfin qu'au-dessus du noeud supérieur il y en a un autre pareil, puis au-dessus de celui-ci un autre encore, et ainsi de suite indéfiniment le long de l'axe de révolution, que la même chose a lieu au-dessous du noeud inférieur, et que tous ces noeuds, sont reliés par des arcs également identiques entre eux. La fig. 49, dans laquelle l'axe de révolution AB est placé horizontalement, représente une portion étendue de la courbe.

La figure engendrée par cette courbe se prolonge donc indéfiniment dans le sens de l'axe, comme le cylindre et l'onduloïde; nous lui donnerons aussi un nom, nous l'appellerons le *Nodoïde*. Remarquons seulement que, cette figure étant, de même que l'onduloïde, susceptible de variations entre certaines limites, la fig. 49 ne doit être regardée que comme offrant un cas de sa ligne méridienne.

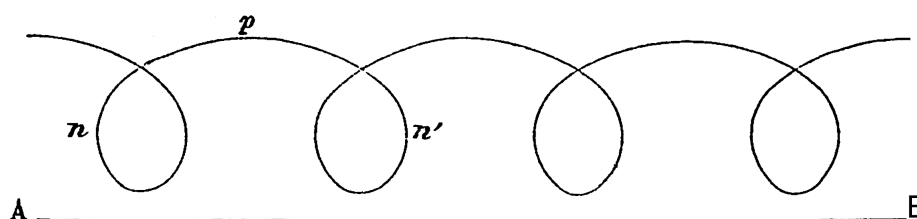


Fig. 49

Rappelons ici l'observation que nous avons présentée dans le § 69, et que l'on comprendra mieux encore maintenant d'après l'aspect de la courbe, savoir que l'on ne peut se représenter la figure complète qu'à de simple surface, parce qu'elle supposant pleine, elle aurait des parties engagées dans la masse.

§ 73. Avant d'étudier le nodoïde dans ses variations, nous devons résoudre une question que suggèrent les résultats des expériences du § 71. Maintenant que nous connaissons la forme de la ligne méridienne, nous voyons que ces expériences réalisent la portion du nodoïde engendrée par une partie plus ou moins grande de l'un des arcs convexes vers l'extérieur, tels que npn' (fig. 49); mais on peut se demander si cela n'exige pas qu'avec des disques d'un diamètre donné, le volume de l'huile demeure compris entre certaines limites, de sorte que, pour des volumes plus grands ou plus petits, la figure réalisée n'appartiendrait plus au nodoïde. Pour décider la chose, partons de l'une de ces figures réalisées, poursuivons l'arc méridien au delà du point où il aboutit au bord de l'un des disques, du disque supérieur, par exemple, et voyons s'il est possible d'arriver à une courbe autre que la ligne méridienne d'un nodoïde.

Supposons d'abord que, dans la partie de son trajet où elle continue à se rapprocher de l'axe de révolution et à s'éloigner de l'axe de symétrie, la courbe présente un point d'inflexion, de manière qu'elle tourne ensuite sa convexité vers ces deux axes. Si, pendant qu'elle se rapproche encore du premier, elle changeait une deuxième fois le sens de sa courbure, la normale correspondante à ce second point d'inflexion serait nécessairement plus courte que la normale correspondante au premier, puis qu'elle aurait moins d'obliquité et partirait d'un point plus voisin de l'axe, or cela est incompatible avec l'équation de l'équilibre: car cette équation se réduisant, en tous les points d'inflexion, à $\frac{1}{N} = C$, les deux normales ci-dessus devraient être égales.

L'existence de ce deuxième point d'inflexion étant donc impossible, on voit qu'au delà du premier, la courbe, qui ne peut (§ 37) atteindre l'axe de révolution, devrait nécessairement ou bien tendre vers une asymptote parallèle à cet axe, ou bien présenter, à une distance finie, un point où la tangente fût parallèle à ce même axe.

On comprend immédiatement que le premier de ces deux cas doit être rejeté: car, au point extrême où la courbe toucherait l'asymptote, le rayon de courbure serait infini, ce qui réduirait encore, en ce point, l'équation de l'équilibre à $\frac{1}{N} = C$, et la normale y serait aussi évidemment plus courte qu'au point d'inflexion.

Dans le second cas, le point où la tangente serait devenue parallèle à l'axe de révolution ne pourrait lui-même, toujours à cause de l'inégalité évidente des normales, être un deuxième point d'inflexion; il devrait donc constituer un minimum de distance à l'axe, et dès lors un petit arc s'étendant de part et d'autre de ce minimum engendrerait un étranglement, qui pourrait être réalisé entre deux anneaux ou de disques égaux. Or nous avons discuté toutes les figures partielles possibles de cette nature; nous avons vu que tout étranglement appartient soit à l'onduloïde, soit au caténoïde, soit à la partie du nodoïde qui environne le sommet d'un noeud; mais nous savons que la figure partielle bombée d'où nous sommes parti, n'est point une portion d'onduloïde, puisque sa convexité dépasse la sphère; il est visible, en second lieu, qu'elle n'est point une portion de caténoïde, et enfin l'on voit, d'après ce qui précède, que l'étranglement ci-dessus ne serait point une portion de noeud.

Ainsi notre hypothèse originaire, celle d'un point d'inflexion dans la partie de la courbe qui va en s'éloignant de l'axe de symétrie et en se rapprochant de l'axe de révolution, conduit inévitablement à des impossibilités, et conséquemment la courbe garde le même sens de courbure jusqu'à ce qu'elle sorte de ces conditions.

Mais, pour en sortir, il faut évidemment qu'elle cesse d'abord de s'éloigner de l'axe de symétrie, ou, en d'autres termes, qu'elle présente un point où la tangente soit parallèle à ce dernier axe. Et ce point n'est pas non plus un point d'inflexion, car la normale et le rayon de courbure y seraient tous deux infinis, ce qui annulerait la quantité $\frac{1}{M} + \frac{1}{N}$. Donc, au delà de ce même point, la courbe redescend vers l'axe de symétrie, en conservant le sens de sa courbure. De plus, le même sens se maintient encore, comme nous allons le montrer, tant que la courbe continue à descendre; en effet, le liquide de la figure partielle réalisée qui nous a servi de point de départ étant placé dans la concavité de la courbe, on voit d'abord sans peine qu'en tous les points de notre branche descendante, la normale est négative; or si cette branche contenait un point d'inflexion, la quantité $\frac{1}{M} + \frac{1}{N}$ se réduirait, en ce point, au terme $\frac{1}{N}$, et, par suite, à cause du signe de la normale serait également négative, tandis que, sur l'arc méridien de la figure partielle réalisée, le rayon de courbure et la normale étant tous deux positifs, la quantité $\frac{1}{M} + \frac{1}{N}$ est elle-même positive.

Mais la branche dont il s'agit ne peut descendre indéfiniment en se rapprochant toujours de l'axe de révolution, ou, en d'autres termes, ne peut tendre vers une asymptote parallèle à cet axe: car, au point situé à l'infini sur l'asymptote, la quantité $\frac{1}{M} + \frac{1}{N}$ se réduirait encore au terme $\frac{1}{N}$, et, par conséquent, serait encore négative; il faut dès lors que notre branche passe par un minimum de distance à l'axe de révolution, et forme ainsi l'arc générateur d'un étranglement; et comme cet étranglement ne saurait appartenir ni à l'onduloïde, ni au caténoïde, il constitue nécessairement le sommet d'un noeud de nodoïde.

Nous sommes donc invinciblement ramenés à la ligne méridienne du nodoïde, et nous devons en conclure que toutes les figures que l'on obtient dans les expériences du § 71 sont des nodoïdes partiels, quel que soit le degré de rapprochement des disques, pour qu'on dépasse la courbure sphérique, et quel que soit le volume de l'huile par rapport au diamètre des disques.

§ 74. Nous pouvons maintenant examiner quelle est la nature et quelles sont les limites des variations du nodoïde. Puisque, dans les expériences du § 71, on passe

par une portion de sphère après laquelle, comme nous venons de le voir, naît immédiatement le nodoïde partiel, et puisque celui-ci varie ensuite d'une manière continue jusqu'à la phase où commence l'instabilité, il est clair que la portion de sphère constitue l'une des limites de ces variations, et qu'ainsi la limite des variations correspondantes du nodoïde complet est une suite indéfinie de sphères égales ayant leurs centres sur l'axe; Mais, pour peu que l'on y réfléchisse, on reconnaîtra que le seul mode possible de variation continue tendant vers cette limite est le suivant à mesure que le nodoïde complet approche de la suite de sphères, les dimensions des noeuds ainsi que la distance de leurs sommets à l'axe diminuent de plus en plus, tandis que la courbure des arcs qui relient ces noeuds converge vers celle d'une circonférence de cercle ayant son centre sur ce même axe; enfin, à la limite, les noeuds s'évanouissent entièrement, et les arcs ci-dessus deviennent autant de demi-circonférences tangentes les unes aux autres. Les sphères engendrées par ces demi-circonférences sont donc aussi tangentes, et il en résulte que l'une des limites des variations du nodoïde est, comme nous l'avons dit, une suite indéfinie de sphères égales qui se touchent sur l'axe.

Nous savons déjà (§ 50) qu'une semblable suite de sphères constitue l'une des limites des variations de l'onduloïde; cette limite est donc commune aux deux figures, et forme conséquemment la transition de l'une à l'autre; c'est d'ailleurs ce que montrent encore les expériences du § 71, puisque, à partir du cylindre jusqu'à la portion de sphère, la figure réalisée appartient toujours à l'onduloïde.

La fig. 50 représente la ligne méridienne d'un nodoïde peu éloigné de la limite que nous venons de trouver



Fig. 50

§ 75. Les variations du nodoïde ont une seconde limite fort remarquable. Supposons qu'on réalise, par le procédé exposé dans le § 67, la portion d'un nodoïde engendrée par un noeud isolé; supposons, en outre, qu'on répète successivement l'expérience en employant des anneaux solides de plus en plus grands et en modifiant le volume de l'huile de telle manière que la longueur du noeud méridien, c'est-à-dire la distance du sommet de celui-ci à sa pointe, demeure la même. Quand le diamètre de l'anneau solide sera très-considérable, les normales correspondantes aux différents points du noeud seront toutes très grandes, de sorte qu'en tous ces points le terme $\frac{1}{N}$ de l'équation de l'équilibre sera très-petit, et l'on voit que ce terme convergera vers zéro à mesure que le diamètre de l'anneau solide convergera vers l'infini; mais il ne peut en être de même du terme $\frac{1}{M}$, car si ce dernier tendait aussi à s'annuler, la figure liquide aurait pour limite de ses variations le caténoïde, ce qui est évidemment impossible dans les conditions où nous nous sommes placés, c'est-à-dire avec un noeud de longueur constante; on pourra donc toujours concevoir l'anneau solide assez grand pour qu'en tous les points du noeud méridien le terme $\frac{1}{N}$ soit fort petit relativement au terme $\frac{1}{M}$. Alors celui-ci, qui exprime la courbure méridienne, devra, en vertu de l'équation de l'équilibre, varier très-peu sur tout le contour du noeud, et conséquemment ce dernier approchera beaucoup d'une circonférence de cercle. Il est clair que, dans ce cas, la courbure des arcs qui relient entre eux les noeuds consécutifs de la ligne méridienne

complète, sera aussi à peu près constante et du même ordre que celle de ces noeuds, car le terme $\frac{1}{N}$ sera également très-petit sur les arcs en question. On comprend, d'après cela, que les noeuds consécutifs de la ligne méridienne empiéteront les uns sur les autres, et qu'ainsi, pour un certain grand diamètre de l'anneau solide, cette ligne a la forme représentée partiellement fig. 51. Dans ce dessin, on n'a point indiqué l'axe de révolution, parce qu'il est placé à une trop grande distance.

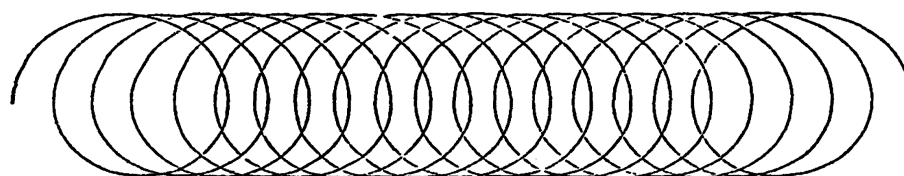


Fig. 51

Si l'on imagine que le diamètre de l'anneau solide reçoive un nouvel accroissement, la courbure méridienne approchera plus encore de l'uniformité, les noeuds seront plus près d'être circulaires, et ils empiéteront davantage les uns sur les autres; enfin, à la limite de ces accroissements, c'est-à-dire lorsque le diamètre sera infini, le terme $\frac{1}{N}$ s'évanouira complètement pour tous les points de la ligne méridienne, ce qui réduira, pour cette ligne entière, l'équation de l'équilibre $\frac{1}{M} = C$; le rayon de courbure sera donc alors, rigoureusement constant, et nous arrivons à ce singulier résultat, que la totalité de la ligne méridienne se sera condensée en une seule circonférence de cercle; et comme celle-ci se trouvera située à une distance infinie de l'axe de révolution, on voit que la figure engendrée sera simplement un cylindre.

Ainsi la seconde limite des variations du nodoïde est un cylindre; mais ce cylindre est placé transversalement par rapport à l'axe du nodoïde dont il dérive, et cet axe en est infiniment éloigné, tandis que le cylindre qui forme la seconde limite des variations de l'onduloïde (§ 50) a pour axe celui de cette dernière figure.

§ 76. Pour la réalisation partielle d'un nodoïde dont la ligne méridienne complète soit du genre de la fig. 51, il n'est pas nécessaire que l'anneau solide ait un diamètre absolu bien considérable; il suffit que ce diamètre soit grand relativement à la longueur du noeud méridien. En effet, si l'on se rappelle que, dans celui-ci, la courbure va (§ 66) en diminuant depuis le sommet jusqu'aux points où les tangentes sont parallèles à l'axe de symétrie, et que, de là jusqu'à la pointe, elle est moindre qu'en ces derniers points, on comprendra que si la longueur de ce même noeud est petite par rapport au rayon de l'anneau solide, sa largeur sera plus petite encore, et qu'à son sommet le rayon de courbure sera minime en comparaison de la distance de ce sommet au centre de l'anneau, distance qui constitue la normale; au sommet donc le terme $\frac{1}{N}$ sera peu de chose à côté du terme $\frac{1}{M}$, et la valeur de la quantité $\frac{1}{M} + \frac{1}{N}$ dépendra surtout de celle de ce dernier; mais c'est au sommet que la normale est la moins grande; donc, sur le reste du noeud et sur les arcs qui unissent ce noeud aux noeuds voisins de la ligne méridienne complète, le terme $\frac{1}{N}$ influera moins encore, et conséquemment, dans toute l'étendue de cette ligne, la courbure ne variera que faiblement.

Nous décrirons plus tard le meilleur moyen de réaliser les conditions que nous venons d'indiquer; du reste, c'est évidemment un nodoïde de cette espèce dont on obtient une portion en creux dans les expériences du § 65 lorsque les disques sont très-rapprochés et qu'on arrête l'extraction de l'huile au point où les éléments extrêmes de l'arc méridien sont couchés sur les faces des disques aux bords de celles-ci. Il en

est encore de même dans les expériences du § 71, lorsque la distance des disques est très-petite et que les éléments extrêmes de l'arc méridien sont aussi près que possible d'être couchés sur les prolongements des faces solides; seulement ici l'arc méridien n'appartient plus à un seul noeud: il est formé, comme on le reconnaîtra en jetant les yeux sur la fig. 51, de l'arc qui unit deux noeuds consécutifs et de deux portions de ces derniers.

§ 77. Enfin les variations du nodoïde ont, comme celles de l'onduloïde, une troisième limite; elle nous est révélée par les expériences mêmes qui nous ont conduits à la connaissance du nodoïde. Dans ces expériences (§§56 et 63), lorsque, après avoir formé un cylindre entre deux anneaux placés à une distance moindre que les $\frac{2}{3}$ de leur diamètre, on enlève progressivement du liquide, la figure partielle, nous le savons, devient d'abord un onduloïde, puis atteint par degrés le caténoïde, après quoi elle passe immédiatement au nodoïde; d'où il suit évidemment que le caténoïde est l'une des limites des variations du nodoïde, et, en outre, qu'il constitue une nouvelle transition de celui-ci à l'onduloïde; nous en avons déjà vu (§ 74) une autre, consistant dans la suite indéfinie de sphères.

La troisième limite des variations du nodoïde est donc le caténoïde, et il est aisé de faire comprendre comment la figure y parvient. Si nous nous rappelons que les expériences dont nous venons de parler réalisent la portion du nodoïde engendrée par un arc appartenant à un noeud et tournant sa concavité extérieurement, nous en concluons que la portion du nodoïde qui passe au caténoïde est celle qui est engendrée par l'un des noeuds, dont le sommet devient celui de la chaînette méridienne. Cela posé, concevons que chacun des noeuds de la ligne méridienne complète se modifie graduellement pour arriver à la chaînette, et imaginons, pour fixer les idées, que, pendant toutes ces modifications, la distance des sommets à l'axe de révolution demeure constante. A mesure que les noeuds approcheront de la chaînette, la quantité $\frac{1}{M} + \frac{1}{N}$ convergera vers zéro, or, sur tous les arcs qui unissent les noeuds entre eux, les quantités M et N sont de même signe, et conséquemment la quantité $\frac{1}{M} + \frac{1}{N}$ relative à ces arcs ne peut converger vers zéro que si M et N convergent à la fois vers l'infini; tous les points de ces mêmes arcs s'éloigneront donc indéfiniment de l'axe de révolution, en même temps que leur courbure deviendra indéfiniment plus faible; d'où il suit que les pointes des noeuds s'éloigneront de plus en plus de l'axe, tandis que, par le développement croissant des arcs intermédiaires, lesquels, d'après la nature de la courbe, ne peuvent évidemment diminuer de courbure sans s'étendre davantage, les noeuds s'écarteront de plus en plus les uns des autres, jusqu'à ce que, à la limite, ils soient tous infiniment distants et infiniment allongés. Si donc nous en considérons un en particulier, toute la courbe se réduira à lui seul, et, d'autre part, sa pointe aura disparu, et il se trouvera transformé en la ligne méridienne d'un caténoïde, c'est-à-dire en une chaînette.

§ 78. Il nous reste à résoudre une dernière question: y a-t-il d'autres figures d'équilibre de révolution que celles dont nous avons jusqu'ici reconnu l'existence? Toutes ces dernières sont telles que l'on peut toujours en comprendre des portions entre deux disques égaux et parallèles; or nos expériences ont épuisé toutes les combinaisons de ce genre; d'où l'on doit conclure que s'il y avait encore d'autres figures, elles seraient de nature à ne pouvoir remplir cette condition, et il faudrait évidemment, pour cela, que leurs lignes méridiennes ne présentassent aucun point dont la distance à l'axe de révolution fût un maximum ou un minimum. Comme ces lignes ne pourraient d'ailleurs atteindre l'axe, elles devraient aller en s'en éloignant toujours, depuis un premier point situé à l'infini sur une asymptote parallèle à cet axe, jusqu'à un autre point situé également à l'infini. Cela posé, au premier de ces deux points extrêmes,

le rayon de courbure serait nécessairement infini, tandis que la normale serait finie, et l'équation de l'équilibre s'y réduirait à $\frac{1}{N} = C$; or il résulte de là que la courbure ne pourrait nulle part changer de sens: car s'il y avait un point d'inflexion, l'équation de l'équilibre s'y réduirait également à $\frac{1}{N} = C$, et conséquemment les normales au premier point extrême ci-dessus et à ce point d'inflexion devraient être égales, ce qui est évidemment impossible. Dès lors la courbe étant exempte de toute ondulation, la courbure convergerait nécessairement vers zéro, ou, ce qui revient au même, le rayon de courbure convergerait vers l'infini, en approchant du second point extrême, en sorte qu'en ce point le terme $\frac{1}{M}$ s'évanouirait comme au premier, ce qui exigerait, de même que précédemment, l'égalité impossible des deux normales.

Les seules figures d'équilibre de révolution d'une masse liquide sans pesanteur sont donc celles auxquelles nous sommes arrivé, savoir : la sphère, le plan, le cylindre, l'onduloïde, le caténoïde et le nodoïde.

Ainsi il n'y pas de figure d'équilibre de révolution ayant, dans son état complet, la forme annulaire, et la sphère est la seule qui soit fermée; nous pouvons conséquemment restreindre encore la possibilité d'une surface fermée, autre que la sphère, a courbure moyenne constante, et ajouter à ce que nous avons dit dans le § 34, que s'il existe une semblable surface, elle n'est pas de révolution.

§ 79 Voyons maintenant les résultats des géomètres. Dans sa *Nouvelle théorie de l'action capillaire*²¹ publiée en 1831, Poisson, cherchant à déterminer l'équation de la surface libre d'une petite quantité d'un liquide pesant comprise entre deux plans solides horizontaux, arrive d'abord à une équation différentielle du deuxième ordre, contenant un terme dans lequel la quantité g , ou la gravité, entre implicitement comme facteur, équation qui, si l'on faisait $g = 0$, se réduirait, comme cela doit être, à celle de nos figures d'équilibre de révolution, mise sous la forme différentielle. Il fait voir ensuite que, dans une certaine hypothèse relative au volume du liquide, hypothèse qui revient à prendre ce volume assez petit pour que l'influence de la gravité soit très-minime par rapport à celle des actions moléculaires, on peut, dans une première approximation, négliger le terme dont il s'agit, ce qui est conséquemment la même chose que de supposer le liquide sans pesanteur. Poisson obtient la première intégrale de l'équation ainsi réduite, puis il remarque qu'on pourra toujours obtenir la seconde au moyen des fonctions elliptiques, et, dans quelques cas, au moyen des arcs de cercle et des logarithmes.

§ 80. En 1831 également, Goldschmidt a étudié analytiquement²² la surface engendrée par la chaînette, c'est-à-dire le caténoïde. Les conclusions auxquelles nous sommes parvenus, concordent pleinement avec celles qu'il déduit de ses formules. Il trouve la valeur précise du rapport limite entre le rayon des bases et l'écartement de celles-ci, et du nombre qu'il donne, on tire, pour le rapport limite entre cet écartement et le diamètre des bases, la valeur 0,6627, valeur qui est effectivement, on le voit, très-voisine de 0,6666, ou $2/3$.

Goldschmidt indique une construction géométrique élégante pour déterminer la position des sommets respectifs des deux chaînettes méridiennes, dans le cas d'un écartement des bases moindre que la limite. Il en déduit cette conséquence, qu'à la limite même, si, du point où l'axe de symétrie de la chaînette unique coupe l'axe de révolution, l'on mène une tangente à la courbe, le point de contact est à l'une des extrémités de l'arc intercepté. On conclut de là que si l'on mène également une tangente à l'autre extrémité du même arc et qu'on prolonge ces deux tangentes, elles iront toucher aussi à

²¹ Chap. VI de cet ouvrage.

²² *Superficiei minimae rotatione curvae data duo puncta jungentis circa datum axem ortæ* (Goettingue, 1831).

ses extrémités l'arc méridien opposé. Cette propriété caractérise d'une manière simple le caténoïde limite.

Goldschmidt montre qu'au delà de l'écartement limite, on n'obtient plus, comme surface de révolution, à aire minima s'appuyant sur les bases, que l'ensemble de deux plans occupant respectivement ces dernières.

Enfin il arrive au résultat suivant: l'aire engendrée par la révolution d'une portion quelconque de la chaînette méridienne, est égale à la moitié de l'aire du cylindre ayant pour base le cercle de gorge et pour hauteur la portion de l'axe comprise entre les normales menées aux deux extrémités de l'arc générateur.

§ 81. MM. Lindelöf et Moigno ont traité de nouveau, en 1861, le problème du caténoïde²³; ils retrouvent, par une méthode plus courte, plusieurs des résultats de Goldschmidt. Ils arrivent, en outre, à cet autre résultat: pour un arc de chaînette dont une extrémité A est prise à volonté, le minimum de la surface de révolution cesse d'avoir lieu lorsque la seconde extrémité B, en s'éloignant suivant la courbe, atteint une position telle que les deux tangentes menées en A et en B se rencontrent en un point de l'axe de révolution. Cette propriété fournit donc la condition générale à laquelle doivent satisfaire tous les caténoïdes limites, que leurs bases soient égales ou inégales.

§ 82. Delaunay a donné²⁴, en 1841, une génération extrêmement simple et bien remarquable des lignes méridiennes des surfaces de révolution à courbure moyenne constante: il a fait voir, au moyen du calcul, que ces lignes peuvent être décrites par l'un des foyers d'une section conique, lorsque celle-ci roule sur une ligne droite. Cette ligne droite est alors l'axe de révolution de la surface.

Plus tard M. Lamarle²⁵ a démontré géométriquement le même principe à l'aide de ses méthodes nouvelles et si fécondes.

Ces deux géomètres se contentent de la démonstration du principe dont il s'agit, sans chercher les formes des lignes ainsi tracées; seulement Delaunay rappelle que la chaînette peut être engendrée de cette manière par le foyer d'une parabole; mais il est aisé de voir que les lignes résultant de ce mode de génération présentent toutes les particularités de forme et toutes les modifications que j'ai conclues, ainsi qu'on l'a vu, de l'expérience et du raisonnement, et que Beer avait, de son côté, partiellement déduites du calcul, comme je le dirai bientôt.

En effet, on reconnaît d'abord évidemment que lorsque la courbe roulante est une ellipse, la ligne décrite par l'un quelconque des foyers est une courbe sinueuse se reproduisant périodiquement le long de la droite, et présentant alternativement un maximum et un minimum de distance à cette droite ce sera, par conséquent, la ligne méridienne de l'onduloïde.

Plus le rapport des axes de l'ellipse se rapprochera de l'unité, moins les sinuosités de la ligne décrite seront prononcées, et si ces deux axes sont égaux, c'est-à-dire si la courbe roulante est un cercle, la ligne décrite devient une droite parallèle à la première, la figure de révolution devient un cylindre.

Au contraire, plus le rapport des axes de l'ellipse s'éloignera de l'unité, plus les sinuosités seront fortes. Si, le grand axe conservant une valeur finie, le petit axe diminue jusqu'à s'annuler, de sorte que l'ellipse se réduise à son grand axe, aux extrémités duquel se trouvent alors les foyers, la ligne décrite consistera en une suite de demi-circconférences de cercle qui se touchent sur la droite; la figure de révolution est donc,

²³ *Leçons de calcul des variations*. Paris, 1861, No. 102 à 105.

²⁴ *Sur la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante* (JOURN. DE M. LIOUVILLE, t. VI, p. 309).

²⁵ *Théorie géométrique des rayons et centres de courbure* (BULLET. DE L'ACAD. BELGIQUE, 1857, 2me série, t. II, p. 33).

dans ce cas, une suite de sphères égales tangentes les unes aux autres sur l'axe, et dont rien n'empêche de concevoir l'une quelconque isolée.

Si, l'ellipse étant toujours réduite à son grand axe, on suppose que celui-ci devienne de plus en plus long, mais que, pour chacune de ses longueurs, son extrémité décrivante parte du même point de la droite fixe, la demi-circonférence tracée par une rotation ira en augmentant de plus en plus en dimensions, et, à la limite, c'est-à-dire quand l'autre extrémité du grand axe se sera éloignée à l'infini, la ligne décrite sera une droite perpendiculaire à la droite fixe; ce sera la ligne méridienne du plan.

Si l'on prend de nouveau des ellipses non réduites à leur grand axe, et qu'on les suppose de plus en plus grandes, mais telles que la distance du foyer décrivante au sommet correspondant soit la même, pour toutes, les parties rentrantes des lignes tracées s'approcheront toutes jusqu'à cette même distance de la droite; mais les parties convexes vers l'extérieur présenteront des dimensions de plus en plus étendues, et enfin, à la limite des accroissements de l'ellipse, c'est-à-dire lorsque celle-ci se sera transformée en une parabole, la ligne décrite n'aura plus qu'une seule partie rentrante, toutes les autres s'étant éloignées à l'infini : ce sera une chaînette, et la figure engendrée sera le caténoïde.

Reste le cas où la courbe roulante est une hyperbole. Au premier abord, on ne voit pas bien qu'on puisse faire rouler une hyperbole sur une ligne droite, de manière que l'un des foyers décrive une ligne continue; mais remarquons que lorsque l'une des parties de l'hyperbole aura roulé tout entière sur la droite, de sorte que celle-ci, primitivement asymptotique à l'une des branches, sera devenue asymptotique, à l'autre branche, la seconde partie de l'hyperbole aura en même temps la droite pour asymptote, et pourra être considérée comme la touchant à une distance infinie; il y aura donc continuité mathématique dans le roulement si nous faisons alors rouler sur la droite cette seconde moitié de l'hyperbole, et si, qu'elle aura à son tour roulé en totalité de manière que la droite soit redevenue tangente commune, nous recommençons à faire rouler la première moitié, et ainsi de suite. Or on se convaincra aisément que la ligne tracée dans ces circonstances par un même foyer est une courbe continue qui présente, le long de la droite, une succession indéfinie de noeuds; c'est donc la ligne méridienne du nodoïde, et en faisant varier le rapport des axes de l'hyperbole roulante, on produira toutes les variations de cette figure.

Lorsque l'hyperbole passera à la parabole, la ligne décrite se réduira à une chaînette, et la figure engendrée sera un caténoïde. Lorsque, l'axe réel de l'hyperbole conservant une valeur finie, l'axe imaginaire s'annulera, ce qui placera les foyers aux extrémités du premier et réduira l'hyperbole à deux droites situées dans le prolongement l'une de l'autre et partant de ces mêmes extrémités, on voit sans peine que les noeuds disparaîtront, et que la ligne décrite deviendra une suite de demi-circonférences, de sorte que la figure engendrée sera la suite de sphères. Enfin lorsque, l'axe réel de l'hyperbole conservant encore une valeur finie, l'axe imaginaire croîtra indéfiniment, ce qui ouvrira de plus en plus les deux moitiés de l'hyperbole en éloignant les foyers des sommets, on voit de même facilement que les noeuds de la ligne décrite s'élargiront, puis empiéteront les uns sur les autres, c'est-à-dire que cette courbe éprouvera les modifications dont j'ai parlé dans le § 75, seulement la limite de ces variations, savoir la condensation de la courbe entière en une seule circonférence de cercle, est, au point de vue du roulement, une limite mathématique qui ne peut être atteinte en réalité, puisque alors les foyers sont à des distances infimes de la droite, et que la moitié de l'hyperbole qui s'appuie sur celle-ci est confondue avec elle dans toute son étendue.

Cette discussion du tracé des lignes méridiennes devait naturellement trouver place

après l'exposé du principe de Delaunay; mais je dois dire ici qu'une discussion analogue a déjà été publiée par M. Lindelöf, dans un Mémoire dont je parlerai au § 89.

§ 83. Le calcul de Delaunay et la démonstration de M. Lamarle mentionnée plus haut n'excluent pas la possibilité de surfaces de révolution à courbure moyenne constante autres que celles dont les lignes méridiennes sont tracées comme ci-dessus; mais M. Lamarle est revenu ensuite²⁶ sur le même sujet, et a fait voir, toujours au moyen des méthodes qui lui sont propres, que ce mode de génération est le seul qui puisse donner des surfaces de révolution à courbure moyenne constante. Cette conclusion est, on le voit, entièrement d'accord avec celle que nous avons déduite du raisonnement (§ 78).

§ 84. Beer a consacré à l'état de repos de la masse liquide une partie du second des deux Mémoires où il m'a fait l'honneur d'appliquer le calcul aux expériences de ma première Série²⁷. Il s'occupe uniquement des figures d'équilibre de révolution, et il cherche, au moyen des fonctions elliptiques, l'intégrale complète de l'équation de leurs lignes méridiennes. Comme j'aurai occasion de faire usage de ces résultats, je vais indiquer, en peu de mots, comment Beer parvient à la première et à la seconde intégrale.

Il prend l'axe de révolution pour axe des y . Alors, p et q désignant respectivement les coefficients différentiels du premier et du second ordre, on a, comme on sait, pour représenter la normale, l'expression $\frac{x\sqrt{1+p^2}}{p}$, et, pour le rayon de courbure, $\frac{(1+p^2)^{3/2}}{q}$; en égalant à une constante la somme des inverses de ces deux quantités, on a conséquemment, pour l'équation des figures en question,

$$\frac{q}{(1+p^2)^{3/2}} + \frac{p}{x\sqrt{1+p^2}} = C. \quad [1]$$

Maintenant, si l'on multiplie les deux membres par $x dx$, et qu'on remplace $q dx$ par son équivalent dp , il vient:

$$\frac{x dp}{(1+p^2)^{3/2}} + \frac{p dx}{\sqrt{1+p^2}} = C x dx.$$

or il est facile de voir que le premier membre de l'équation ainsi transformée est la différentielle de $\frac{px}{\sqrt{1+p^2}}$; on aura donc, en intégrant,

$$\frac{px}{\sqrt{1+p^2}} - \frac{Cx^2}{2} + C', \quad [2]$$

C' étant la constante arbitraire. Telle est l'intégrale première cherchée.

Représentant alors par α_1 et α_2 les abscisses respectives minima et maxima de la courbe, Beer transforme cette équation en la suivante

$$dy = \frac{x^2 \pm \alpha_1 \alpha_2}{\sqrt{(\alpha_1^2 - x^2)(x^2 - \alpha_2^2)}} dx; \quad [3]$$

puis il passe à l'intégration par les fonctions elliptiques. Il pose

$$x^2 = \alpha_1^2 \sin^2 \phi + \alpha_2^2 \cos^2 \phi,$$

²⁶Exposé géométrique du calcul différentiel et intégral, 3e partie, 1863, p. 247, (Mem. de l'Acad. de Belgique, collection in-8°, t. XV).

²⁷Tractatus de theoriâ mathematicâ phaenomenorum in liquidis actioni gravitatis detractis observatorum. Bonn, 1857.

et, plaçant l'origine des coordonnées au pied de l'abscisse minima α_1 , il obtient, en définitive, pour représenter la ligne méridienne, l'équation

$$y = \alpha_2 \left\{ E \left(c, \frac{\pi}{2} \right) - E(c, \phi) \right\} \pm \alpha_1 \left\{ F \left(c, \frac{\pi}{2} \right) - F(c, \phi) \right\}. \quad [4]$$

dans laquelle les lettres F et E désignent respectivement les fonctions elliptiques de première et de seconde espèce. Le module c et l'amplitude ϕ sont définis par les relations

$$c = \sqrt{\frac{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}{\alpha_2^2}}, \quad \phi = \arcsin \sqrt{\frac{\alpha_2^2 - x^2}{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}}$$

§ 85. Beer déduit de ces formules les résultats suivants : L'équation [4] représente deux genres de courbes, selon qu'on prend le supérieur ou l'inférieur des deux signes qui affectent l'un des termes du second membre.

Au signe supérieur correspond une ligne ondulée analogue à la sinusoïde, et formée de parties identiques qui se reproduisent indéfiniment le long de l'axe. L'abscisse des points d'inflexion est moyenne proportionnelle entre les abscisses minima et maxima. La tangente en ces mêmes points est égale à $\frac{2\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}{\alpha_2 - \alpha_1}$. La distance entre les abscisses minima et maxima a pour valeur

$$y' = \alpha_2 E \left(c, \frac{\pi}{2} \right) + \alpha_1 F \left(c, \frac{\pi}{2} \right);$$

en doublant cette expression, on a, dans la figure engendrée, l'intervalle entre le cercle de gorge d'un étranglement et celui de l'étranglement suivant. Les limites des variations qu'éprouve cette figure quand on fait varier le rapport entre α_1 et α_2 sont la sphère et le cylindre. On pourra réaliser cette même figure, en faisant adhérer une masse d'huile à un cylindre solide au sein d'un alcool de même densité que l'huile.

En prenant, dans l'équation [4] le signe inférieur, on a également une ligne composée de parties identiques qui se reproduisent le long de l'axe. Si l'on considère l'une de ces parties commençant à un minimum d'abscisse, elle descend d'abord en tournant sa concavité vers le haut, atteint un point inférieur où la tangente est parallèle à l'axe des x et dont l'abscisse est moyenne proportionnelle entre les abscisses minima et maxima, puis remonte, en conservant toujours le même sens de courbure, jusqu'au maximum d'abscisse, au delà duquel elle continue jusqu'à un nouveau x minimum par une portion symétrique à la première. La distance entre les abscisses minima et maxima a pour expression

$$y' = \alpha_2 E \left(c, \frac{\pi}{2} \right) - \alpha_1 F \left(c, \frac{\pi}{2} \right);$$

Les limites des variations de la figure engendrée sont, d'une part, la sphère, et, d'autre part, une circonférence de cercle ayant son centre sur l'axe et son plan perpendiculaire à celui-ci. La ligne méridienne ci-dessus sera celle d'une masse alcoolique entourant, au sein d'une huile de même densité, un cylindre métallique.

§ 86. Présentons ici quelques remarques au sujet de cette partie du travail de Beer. Les deux lignes méridiennes qu'il discute sont celles de l'onduloïde et du nodoïde; mais, on le voit, une autre ligne méridienne, savoir celle du caténoïde, lui a complètement échappé; il l'aurait trouvée en faisant, dans l'intégrale première (éq. [3] du § 84), la quantité α_2 égale à l'infini.

En second lieu, par suite, de cette singulière omission, Beer n'assigne aux variations des figures engendrées par les deux premières que deux limites, au lieu de trois qu'elles ont en réalité.

Du reste, ces lacunes se trouvent remplies dans un ouvrage posthume²⁸ du même auteur, publié en 1869.

En troisième lieu, il trouve, pour la seconde limite de la deuxième figure, une simple circonférence de cercle, tandis que j'ai trouvé un cylindre placé transversalement par rapport à l'axe des nodoïdes dont il dérive. Cette différence tient à ce que Beer considère ce que devient la figure à mesure que les abscisses maxima et minima de la ligne méridienne approchent de l'égalité, mais en conservant des valeurs finies, tandis que, rendant au contraire constante la différence de ces deux abscisses, j'ai supposé qu'elles convergeaient toutes deux vers l'infini, ou, pour parler plus exactement, que l'axe de révolution s'éloignait indéfiniment de la courbe (§ 75). Je n'ai point parlé de la limite consistant en une simple circonférence, parce qu'elle ne peut constituer une figure liquide; c'est une limite mathématique, et non physique.

Enfin, quant au moyen indiqué par Beer pour la réalisation partielle de la deuxième figure, c'est-à-dire du nodoïde, il est exact théoriquement, mais il serait d'une application bien difficile; on peut se convaincre, en effet, par ce que j'ai exposé dans le § 71, qu'une semblable figure liquide dépasserait de beaucoup sa limite de stabilité; on ne pourrait donc l'obtenir qu'en la maintenant par des entraves convenables.

Nous avons donc cherché, Beer et moi, par des moyens essentiellement différents, les formes des figures d'équilibre de révolution. Ainsi qu'on l'a vu (§ 82), on pouvait arriver à ces formes en partant du principe de Delaunay; mais Beer, par la simplicité et l'élégance qu'il a su donner à l'équation différentielle du premier ordre et à l'intégrale elliptique, a facilité l'étude analytique et la construction exacte des lignes méridiennes de l'onduloïde et du nodoïde, et, de mon côté, en réalisant physiquement toutes les figures d'équilibre de révolution, avec leurs variations et les limites de celles-ci, j'ai fourni à la théorie l'appui des vérifications expérimentales. De plus, en n'employant, conjointement avec l'expérience, que le seul raisonnement ou des constructions géométriques très j'ai rendu nettement accessibles à l'esprit les relations entre les formes dont il s'agit et la condition générale de l'équilibre, et j'ai mis la recherche de ces mêmes formes à la portée des personnes qui ne sont point familiarisées avec les hautes mathématiques.

§ 87 Dans le même Mémoire, Beer détermine les expressions du volume et de la surface d'une portion de sa première figure, ou, en d'autres termes, de l'onduloïde, cette portion étant comprise entre deux sections perpendiculaires à l'axe. Pour cela, dans les formules générales qui représentent le volume et la surface d'une figure quelconque de révolution, il remplace dy par son équivalent (équ. [3] du § 84), puis il intègre par les fonctions elliptiques, le module et l'amplitude sont les mêmes que précédemment.

On reconnaît aisément que la substitution ci-dessus permettrait d'intégrer également par les fonctions elliptiques dans le cas du nodoïde.

On s'assurera d'ailleurs sans peine qu'on obtient par une intégration ordinaire le volume et la surface d'une portion de caténoïde; on pourra donc évaluer, pour toutes les figures d'équilibre de révolution, le volume et la surface d'une portion limitée par deux sections quelconques perpendiculaires à l'axe.

§ 88. M. Mannheim a présenté, en 1858, à la Société Philomatique de Paris²⁹, sur la théorie des *roulettes*, une Note dans laquelle il pose d'abord ce théorème:

Lorsqu'une courbe plane ABC roule sur une droite fixe EF, la roulette décrite par un point M lié à la courbe roulante a même longueur que la courbe GPH, lieu des projections du point M sur les tangentes à ABC³⁰.

²⁸ (*Einleitung in die mathematische Theorie der Elasticität und Capillarität*. Leipzig.

²⁹ Journal l'Institut, n° 1260.

³⁰ Plus tard, M. Mannheim a reconnu (JOURN. DE L'ECOLE POLYTECHNIQUE, XLme cahier) que ce

Puis il en déduit plusieurs corollaires, parmi lesquels se trouve le suivant :

La courbe décrite par le foyer d'une ellipse qui roule sur une droite a même longueur que la circonférence décrite, sur le grand axe comme diamètre.

On sait, en effet, que le lieu des projections du foyer d'une ellipse sur les tangentes à celle-ci est une circonférence de cercle ayant le grand axe pour diamètre.

M. Mannheim ne parle point de la courbe décrite par le foyer d'une hyperbole roulante ; mais on sait également que le lieu des projections du foyer d'une hyperbole sur les tangentes est une circonférence de cercle ayant pour diamètre l'axe réel de l'hyperbole, d'où il suit que la courbe tracée par l'un des foyers a même longueur que la circonférence en question. Cette extension à la ligne méridienne du nodoïde a, du reste, été signalée déjà par M. Lindelöf (§ suivant).

Le principe de M. Mannheim permet, on le voit, d'évaluer la longueur de portions déterminées de la ligne méridienne de l'onduloïde et de celle du nodoïde, quand on a le grand axe de l'ellipse roulante et l'axe réel de l'hyperbole roulante; or ces axes sont connus lorsqu'on connaît les distances minima et maxima de la courbe décrite à la droite fixe; en effet, si l'on se représente l'ellipse roulante dans la position où son grand axe est perpendiculaire à la droite fixe, on voit que le foyer décrivant est alors le plus près ou le plus loin de cette droite, et qu'ainsi les distances minima et maxima ci-dessus sont celles de ce foyer aux deux sommets de l'ellipse; le grand axe est donc égal à leur somme. On trouvera de même que l'axe réel de l'hyperbole roulante est égal à la différence des distances maxima et minima de la courbe décrite à la droite fixe.

L'énoncé de M. Mannheim relatif à la ligne méridienne de l'onduloïde se rapporte au développement entier de l'ellipse roulante sur la droite fixe, mais, on le comprend, le théorème général s'applique également à une portion moindre quelconque de ce développement et conséquemment de la courbe décrite.

Du reste, en substituant, dans l'expression générale $\int dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ d'un arc de courbe, la valeur de $\frac{dy}{dx}$ relative aux lignes méridiennes de l'onduloïde et du nodoïde (éq. [3] du § 84), on s'assurera que l'intégration s'effectue aisément par les moyens ordinaires.

Comme la ligne méridienne du caténoïde, ou la chaînette, est rectifiable, on voit qu'on pourra toujours évaluer, soit par une construction géométrique, soit par le calcul, la longueur d'un arc donné de chacune des lignes méridiennes des figures d'équilibre de révolution.

§ 89. En 1863, M. Lindelöf a repris³¹ toute la question des surfaces de révolution à courbure moyenne constante. Partant du théorème de Delaunay (§ 82), il cherche spécialement les relations entre les propriétés des surfaces en question et les éléments de la conique roulante. Il déduit de ses calculs, une suite de résultats presque tous nouveaux que je vais mentionner.

Disons d'abord que l'auteur nomme onduloïde complet et nodoïde complet les portions de l'onduloïde et du nodoïde indéfinis dont les lignes méridiennes correspondent respectivement à une révolution entière de l'ellipse et de l'hyperbole génératrices. Voici maintenant les résultats :

théorème avait été énoncé dès 1840 par Steiner.

Quelques temps après la publication de l'article de M. Mannheim, M. Lamarle adonné (BULLET. DE L'ACAD. DE BELGIQUE, 188, 2me série, t. IV, p. 239), à l'aide de ses nouvelles méthodes, une démonstration extrêmement simple de ce même théorème.

³¹*Théorie des surfaces de révolution courbure moyenne constante* (MÉM. DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES DB FINLANDE).

Un résumé détaillé de ce Mémoire est inséré dans le journal *Les Mondes* (t. III, pp. 394, 414 et 431).

1° La somme des courbures principales en chaque point de la surface est, pour l'onduloïde, égale à la courbure du cercle circonscrit à l'ellipse génératrice, et, pour le nodoïde, égale à la courbure d'un cercle ayant pour diamètre l'axe transverse de l'hyperbole génératrice.

2° Rectification de la ligne méridienne de l'onduloïde complet, donnée antérieurement par M. Mannheim, avec extension à la ligne méridienne du nodoïde complet.

3° Mesure de l'aire du caténoïde engendrée par une portion quelconque de la chaînette méridienne, trouvée déjà par Goldschmidt (§ 80).

4° Le volume du caténoïde terminé par deux plans quelconques perpendiculaires à l'axe égale la moitié de celui du cylindre ayant pour base le cercle de gorge, et pour hauteur la partie de l'axe comprise entre les normales extrêmes à une méridienne.

5° Le volume du caténoïde s'obtient aussi en multipliant la surface de ce caténoïde par le demi-rayon du cercle de gorge.

6° Le volume du caténoïde limite est la moitié de celui du cylindre de même base et de même hauteur³².

7° L'aire d'un onduloïde complet équivaut à celle d'un cylindre dont la base est le cercle circonscrit à l'ellipse génératrice d'une méridienne, et dont la hauteur est la circonférence d'une ellipse ayant pour axes les diamètres du plus grand et du plus petit cercle parallèle.

8° L'aire d'un nodoïde complet équivaut à celle du cylindre dont le diamètre est l'axe transverse de l'hyperbole génératrice d'une méridienne, et dont la hauteur est la circonférence d'une ellipse ayant pour axes les diamètres du plus grand et du plus petit cercle parallèle.

9° Le volume d'un onduloïde complet surpasse à celle du cylindre dont la base est le cercle circonscrit à l'ellipse génératrice d'une méridienne, et dont la hauteur égale la circonférence de l'ellipse ayant pour axes les diamètres du plus grand et du plus petit cercle parallèle, du tiers de l'excès de ce même cylindre sur un second cylindre de même hauteur que l'onduloïde, et dont la base est le cercle inscrit à l'ellipse génératrice.

10° Le volume du nodoïde complet surpasse celui du cylindre dont le diamètre est égal à l'axe transverse de l'hyperbole génératrice d'une méridienne, et dont la hauteur égale la circonférence de l'ellipse ayant pour axes les diamètres du plus grand et du plus petit cercle parallèle, du tiers de la somme de ce même cylindre et d'un second cylindre de même hauteur que le nodoïde, et dont le diamètre est égal à l'axe conjugué de l'hyperbole génératrice.

§ 90. J'ai soumis à l'expérience le résultat 6° du paragraphe précédent. Pour cela, il fallait réaliser, dans le liquide alcoolique, un caténoïde limite plein, puis le convertir en cylindre par le rapprochement des bases. Mais comme toute l'huile du caténoïde devait être contenue dans ce cylindre, il fallait éviter la formation des bases convexes de celui-ci, et conséquemment comprendre la masse liquide entre des disques et non entre des anneaux. Dans ces conditions, le seul moyen à employer pour obtenir le caténoïde limite était d'écartier les disques l'un de l'autre d'une quantité égale à la hauteur du caténoïde limite correspondant à leur diamètre, puis de faire adhérer à leurs faces en regard une masse d'huile en excès, et enfin- d'absorber de ce liquide jusqu'à ce que le cercle de gorge eût le diamètre appartenant à ce même caténoïde limite.

Le diamètre des disques dont j'ai fait usage était de 71 mm,49; la hauteur du caténoïde limite correspondant à ce diamètre devait donc (§ 80) être égale à $71\text{mm},49 \times 0,6627 = 47\text{mm},38$.

³² J'avais trouvé ce résultat longtemps auparavant, et je l'avais communiqué à M. Lindelöf, ainsi qu'il le déclare dans son Mémoire. Ce même résultat n'est pas reproduit dans le résumé du journal *Les Mondes*.

MM. Lindelöf et Moigno ont trouvé³³, pour le rapport du rayon des bases à celui du cercle de gorge, la valeur 1,81017, dont l'inverse est 0,5524 (voir aussi le tableau du § suivant); avec mes disques, le diamètre du cercle de gorge devait donc être égal à $71\text{mm},49 \times 0,5524 = 39\text{mm},49$.

On a réglé l'écartement de ces disques au moyen du cathétomètre, et, pour régler de même le diamètre du cercle de gorge de la figure liquide, on a couché le cathétomètre horizontalement sur des supports convenables.

Une difficulté accidentelle a empêché qu'on n'atteignît l'écartement précis 47mm,38; celui auquel on s'est arrêté était, d'un côté de la figure, 46mm,85, du côté opposé 47mm,05, et conséquemment, en moyenne, 46mm,95, quantité inférieure à la valeur théorique d'un peu moins du centième de celle-ci.

En ce qui concerne le cercle de gorge, on a conduit l'absorption de l'huile jusqu'à ce que le diamètre de ce cercle fût réduit à 39mm,60, quantité qui excède à peine la valeur théorique des trois millièmes de celle-ci.

La figure ainsi obtenue approchait donc extrêmement du caténoïde limite, et conséquemment son volume devait être à fort peu près celui d'un cylindre de même base et d'une hauteur égale à la moitié de la distance des disques, c'est-à-dire égale à 23mm,47; or, après avoir abaissé le disque supérieur jusqu'à ce que la figure parût exactement cylindrique, la mesure de la hauteur de ce cylindre a donné, d'un côté 23mm,00, et, du côté opposé, 23mm;07, moyenne 23mm,03. La différence entre ce résultat et la hauteur théorique 23mm,47 est de 0mm,44, qui n'est pas les deux centièmes de cette hauteur théorique; elle provient sans doute, en grande partie, de ce qu'il y a toujours une petite incertitude sur le point exact où la forme cylindrique est rigoureusement atteinte.

Bien que cette expérience laisse quelque chose à désirer quant à la précision, on peut cependant, je pense, la regarder comme fournissant une vérification suffisante du principe théorique.

§ 91. Dans un article³⁴ publié en 1869, M. Lindelöf rappelle un principe énoncé dans l'ouvrage écrit en commun par lui et par M. Moigno, principe que j'ai mentionné au § 81 ; il en tire des formules générales et des nombres exacts relatifs à la limite de hauteur du caténoïde partiel compris entre des bases dont les diamètres ont entre eux un rapport quelconque, et il consigne ses résultats dans deux tableaux.

Le premier de ces tableaux donne les diamètres des deux bases, la hauteur limite du caténoïde et la distance de la plus petite base au cercle de gorge, quand on suppose le diamètre de ce dernier invariable et pris pour unité, et qu'on fait varier par dixièmes d'unité, depuis 1 jusqu'à 0, le rapport des diamètres des bases.

Le second prend comme quantité constante et égale à l'unité le diamètre de la base inférieure, et fait varier depuis 1 jusqu'à 0 celui de la base supérieure; il contient, dans ces conditions, les hauteurs limites correspondantes du caténoïde, les diamètres du cercle de gorge, et les distances de celui-ci à la base supérieure: Je reproduis ici ce second tableau :

Diamètre de la base inférieure = 1.

³³ Voir la note du § 81.

³⁴ *Sur les limites entre lesquelles le caténoïde est une surface minima* (Annales de mathématiques de MM. Clebsch et Neumann, vol. II, p. 160).

DIAMÉTRE DE LA BASE SUPÉRIEURE.	HAUTEUR LIMITE DU CÂTÉNOÏDE.	DIAMÉTRE DU CERCLE DE GORGE.	DISTANCE DU CERCLE DE GORGE A LA BASE SUPÉRIEURE.
1,0	0,66274	0,55243	0,33137
0,9	0,62835	0,52313	0,29765
0,8	0,59116	0,49009	0,26280
0,7	0,55064	0,45271	0,22696
0,6	0,50609	0,41028	0,19037
0,5	0,45654	0,36199	0,15341
0,4	0,40057	0,30693	0,11668
0,3	0,33595	0,24415	0,08107
0,2	0,25878	0,17268	0,04795
0,1	0,16059	0,09165	0,01941
0,0	0,00000	0,00000	0,00000

§ 92. Pour terminer ce qui est relatif aux surfaces d'équilibre de révolution, j'ajouterai ici que j'ai cherché les expressions des rayons de courbure des lignes méridiennes respectives de l'onduloïde et du nodoïde au minimum et au maximum de distance à l'axe, et que j'ai trouvé ces expressions fort simples.

Voyons d'abord celles qui concernent l'onduloïde. Pour y arriver commodément, partons de la formule générale de l'équilibre en fonction du rayon de courbure et de la normale. Désignons par ρ_1 et ρ_2 les rayons de courbure respectivement correspondants aux deux points dont il s'agit, points pour lesquels, en conservant les notations de Beer (§ 84), les normales sont α_1 et α_2 ; nous aurons ainsi les deux équations

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\alpha_1} &= C \\ \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\alpha_2} &= C \end{aligned} \right\} \quad [a]$$

D'autre part, si nous prenons, comme Beer, l'axe de révolution pour axe des y , et si nous remarquons qu'alors, aux deux points considérés, la tangente est infinie, l'équation [2] du § 84, en y remplaçant successivement x par α_1 et par α_2 nous donnera les deux suivantes:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{C\alpha_1^2}{2} + C', \\ \alpha_2 &= \frac{C\alpha_2^2}{2} + C', \end{aligned} \right\} \quad [b]$$

d'où, par l'élimination de C' , on tire

$$C = \frac{2}{\alpha_2 + \alpha_1};$$

enfin, substituant cette valeur de C dans les deux équations [a], on trouve

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 &= -\alpha_1 \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}, \\ \rho_2 &= \alpha_2 \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}, \end{aligned} \right\} \quad [c]$$

La valeur de ρ_1 est négative, parce que, au point minimum de la ligne méridienne de l'onduloïde, la courbure de cette ligne est concave.

De ces deux expressions on déduit la relation fort simple aussi

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1};$$

ainsi les valeurs absolues des rayons de courbure respectivement correspondants aux distances maxima et minima à l'axe, sont entre elles comme ces mêmes distances.

Appliquons les mêmes considérations au nodoïde. Si l'on regarde la constante C comme positive, ce qui revient à supposer le liquide dans la concavité de la courbe, la normale au point minimum sera évidemment négative; pour cette figure, il faudra donc, dans la première des équations [a] remplacer α_1 par $-\alpha_1$.

Quant à la substitution de α_1 à x dans l'équation [2] du § 84, je dois présenter une remarque. D'après la forme et la position de la courbe, l'abscisse x est toujours positive dans l'équation dont il s'agit, et, par suite, il en sera de même de α_1 , qui joue ici simplement le rôle d'abscisse; mais, dans le premier membre de cette équation, x est multiplié par la quantité $\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$ dont il faut déterminer le signe au point minimum où sa

valeur absolue devient l'unité, or si nous nous reportons à l'expression générale $\frac{x\sqrt{1+p^2}}{p}$ ou $\frac{x}{\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}}$ de la normale, et si nous nous rappelons qu'au point minimum la normale est négative malgré le signe essentiellement positif de x , nous en concluons qu'en ce même point la quantité $\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$ est égale à -1 , et qu'ainsi, quand on remplacera x par α_1 , le premier membre de l'équation deviendra $-\alpha_1$.

Il suffira donc, pour le nodoïde, de changer, dans les équations [a] et [b], α_1 en $-\alpha_1$ et conséquemment, pour avoir les valeurs de ρ_1 et de ρ_2 correspondantes à cette figure, on n'aura qu'à faire le même changement dans les expressions [c] ce qui donnera

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 &= \alpha_1 \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2 + \alpha_1}, \\ \rho_2 &= \alpha_2 \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2 + \alpha_1}, \end{aligned} \right\} \quad [d]$$

d'où l'on déduit aussi

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$$

de sorte qu'ici encore les deux rayons de courbure sont entre eux comme les distances à l'axe. Je n'ai point parlé, à propos de l'onduloïde, de la question ci-dessus relative au signe; parce que dans cette figure la normale est partout positive.

La deuxième des expressions [c] montre qu'à l'équateur des renflements de l'onduloïde, la courbure méridienne est toujours moindre que celle d'un circonférence de cercle qui aurait son centre sur l'axe, et la deuxième des expressions [d] montre que, dans le nodoïde, à l'équateur des portions convexes vers l'extérieur, la courbure méridienne est, au contraire, plus forte que celle d'une semblable circonférence.

§ 93. Avant de passer au deuxième procédé de réalisation des figures d'équilibre, présentons une remarque à l'égard du premier. Il est clair qu'on pourrait substituer à l'huile et au mélange alcoolique deux autres liquides qui ne se mêlent pas et qui sont susceptibles d'être amenés à avoir des densités égales. C'est ce qu'a fait M. Dufour³⁵ en 1861 : il a formé de grosses sphères d'eau suspendues dans un mélange de chloroforme et d'huile; le chloroforme étant plus lourd et l'huile plus légère que l'eau, on

³⁵ Sur la congélation de l'eau et sur la formation de la grêle. (Bibl. univers., arch. des sc., nouvelle période, tome X, page 346).

arrive sans peine, à donner au mélange une densité convenable. M. D'Henry, ancien préparateur de Delezenne, m'a proposé, dans une lettre en 1869, un mélange de sulfure de carbone et d'essence de térébenthine, dans lequel on immerge une masse d'eau; ou bien de l'acide sulfurique dilué, avec une masse de sulfure de carbone immergée.

Ces nouveaux systèmes de liquides offriraient, sur le mien, l'avantage d'éviter la petite action dissolvante mutuelle (§ 5) de l'huile et du liquide alcoolique; mais, d'un autre côté, ils auraient des inconvénients : les vapeurs de chloroforme et de sulfure de carbone sont dangereuses à respirer; l'acide sulfurique dilué attaquerait les petits appareils en fer, et, en outre, des gouttelettes de ce liquide corrosif pourraient être projetées sur les vêtements de l'expérimentateur, enfin je doute beaucoup qu'on obtienne, avec ces liquides, une adhérence aux pièces solides aussi parfaite qu'avec l'huile. Je pense donc que, jusqu'ici, les liquides les meilleurs pour la réalisation de mes expériences sont ceux que j'ai indiqués.

Si M. Dufour s'est servi de chloroforme, c'est que le but de ses expériences exigeait que le liquide immergé fût de l'eau il se proposait de chercher comment se comporterait l'eau en dehors de tout contact solide et durant un refroidissement prolongé au-dessous de 0°; il a vu ainsi les sphères d'eau, quand elles étaient petites, demeurer liquides quelquefois jusqu'à -18°, et même -20°; le mélange dans lequel elles nageaient se composait d'huile d'amande douce, d'huile de pétrole, et de chloroforme. Disons, en passant, que ces expériences ont conduit M. Dufour à une théorie, qui me paraît extrêmement probable, de la formation de la grêle.

M. D'Henry, dans la lettre dont j'ai parlé plus haut, me signale une expérience qui n'est pas sans intérêt: après avoir réalisé, dans de l'acide sulfurique dilué, une grosse sphère de sulfure de carbone, il l'a laissée tomber dans l'acide, au-dessus de cette sphère, une goutte de sulfure de carbone coloré par de l'iode; celle-ci descend à travers l'acide jusqu'à la sphère, à laquelle elle s'incorpore; mais en même temps elle se transforme en un anneau, qui se dirige vers le centre de la sphère en restant parallèle à lui-même; à mesure qu'il avance; il s'élargit, en se fondant peu à peu dans le liquide qui l'entoure.

§ 94. Dans la même lettre encore, M. D'Henry m'engage à essayer l'action d'un puissant électro-aimant sur les figures d'équilibre réalisées avec des liquides de différente nature. Les expériences connues que je vais rappeler montrent que cette action ne probablement pas sans influence.

Il est resté dans mes souvenirs qu'un physicien, après avoir fait en sorte qu'un grand nombre de sphérules d'huile fussent disséminées dans un mélange d'eau et d'alcool de même densité, a soumis cet ensemble à l'action d'un électro-aimant, et a constaté, dans les sphérules, certains mouvements déterminés. L'article où cette expérience est décrite a été publié, je pense, vers 1844, mais je n'ai pu le retrouver.

En 1853, Matteucci a présenté à l'Académie des sciences de Paris un Mémoire³⁶ dans lequel il expose les résultats d'expériences du même genre: les deux liquides d'égale densité qu'il a employés, étaient l'huile d'olive et une solution de proto-chlorure de fer dans l'alcool; l'un de ces liquides était distribué uniformément en gouttes plus ou moins grosses suspendues dans l'autre. En plaçant le vase qui les contenait entre les pôles d'un puissant électro-aimant, Matteucci a vu ces gouttes exécuter des mouvements prononcés, et se ranger suivant des formes constantes.

§ 94bis. Encore une remarque: notre premier procédé peut servir à réaliser sur une grande échelle les phénomènes capillaires ordinaires, c'est-à-dire ceux où la pesanteur

³⁶ Sur les figures d'équilibre et sur les mouvements de certaines masses liquides et gazeuses, quatrième Mémoire, (Comptes-Rendus, tome XXXVI, page 917).

J'ignore ou les trois premiers Mémoires ont été publiés, mais la manière dont l'auteur commence celui-ci me porte à croire que, dans les précédents, il ne s'agissait pas de deux liquides de même densité.

intervient. Il suffit, pour cela, que le mélange alcoolique renferme un très-petit excès d'alcool; alors, en effet, l'huile n'est plus complètement soustraite à l'action de la pesanteur, mais ce qui reste de cette action n'a plus qu'une très-faible intensité, et se trouve ainsi, sur des masses de grandes dimensions, du même ordre que l'action des forces moléculaires.

Dans ces conditions, par exemple, lorsque la masse d'huile est entièrement libre, elle va s'aplatir plus moins sur le morceau d'étoffe qui recouvre le fond du vase, et présente alors, en grand, la même forme qu'une gouttelette de mercure d'un volume convenable déposée sur un plan solide horizontal. Dans les mêmes conditions, la masse suspendue au disque solide des expériences du § 14 s'allonge, et affecte une figure identique à celle d'une goutte d'eau suspendue à l'extrémité inférieure d'une baguette solide, etc.

CHAPITRE III.

CHAPITRE III. Deuxième procédé; démonstration. — Liquide donnant des lames d'une très-grande persistance. — Réalisation, au moyen des lames, des figures d'équilibre de révolution. — Pression exercée par une lame sphérique sur l'air qu'elle contient. — Recherche d'une limite supérieure très-petite du rayon d'activité sensible de l'attraction moléculaire.

§ 95. Démontrons, ainsi que nous l'avons annoncé à la fin du § 3, que, si l'on néglige la très-faible action de la pesanteur, les figures d'équilibre d'une lame liquide mince réalisées dans l'air sont identiquement les mêmes que celles d'une masse liquide pleine non pesante.

Si, par un point de l'une des deux surfaces d'une semblable lame, on conçoit une droite normale à cette surface, il est clair que, vu le peu d'épaisseur de la lame, la droite en question pourra être considérée comme étant également normale à l'autre surface. En outre, si, par cette normale commune on fait passer un plan, il coupera les deux surfaces suivant des courbes qui pourront, sans erreur appréciable, être regardées comme identiques. Par conséquent, aux points où la normale ci perce les deux surfaces, les courbures des deux courbes seront les mêmes; seulement, par rapport au liquide qui forme la lame, l'une de ces courbures sera convexe et l'autre concave. Si donc ρ désigne le rayon de la première, celui de la seconde sera $-\rho$; et comme ce résultat est général, il s'applique également aux courbures principales, de sorte que, si R et R' représentent les deux rayons de courbure principaux à l'un des deux points considérés, les deux rayons de courbure principaux à l'autre point seront $-R$ et $-R'$. D'après cela, les pressions capillaires respectivement correspondantes à ces deux points, et rapportées à l'unité de surface, sont (§ 1), pour le premier,

$$P + \frac{A}{2} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right),$$

et, pour le second,

$$P - \frac{A}{2} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right).$$

Or ces deux pressions étant opposées, elles donnent une résultante égale à leur différence, c'est à

$$A \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right),$$

Maintenant, si la figure laminaire est telle que, dans toute son étendue, la résultante ci soit nulle, il est clair que l'équilibre existera. Si cette condition n'est pas remplie, les résultantes respectivement, correspondantes aux différents points de la figure tendront à chasser ces points dans un sens ou dans l'autre; mais, dans ce cas encore, l'équilibre sera possible si la figure laminaire est fermée, et emprisonne ainsi un volume d'air; car alors, si elle a une forme telle que les résultantes dont il s'agit aient partout la même intensité, ces forces seront évidemment détruites par la résistance du gaz intérieur ou par celle de l'atmosphère. On exprimera donc l'équation générale de l'équilibre des figures laminaires, en établissant la condition que la résultante soit nulle ou constante; et, pour cela, comme le coefficient A est constant et fini, il suffira de poser

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = C$$

la constante C pouvant être nulle ou finie.

Or cette équation générale étant également celle de l'équilibre des masses pleines, il en résulte que les lames prennent, comme je l'ai avancé, identiquement les mêmes figures que ces masses.

Ainsi l'on doit pouvoir former dans l'air, avec des lames liquides minces, telles que celles d'eau de savon, toutes les figures que nous avons obtenues avec des masses d'huile pleines. Comme je l'ai déjà fait remarquer (§ 3), les bulles de savon offrent, en ce qui concerne la figure sphérique, un premier exemple de cette réalisation à l'état laminaire.

Seulement l'identité entre les figures laminaires et celles de nos masses d'huile pleines n'est pas mathématiquement exacte, car, quelque légères que soient les lames, elles ne sont pas absolument dépourvues de poids; mais l'effet de la pesanteur sur les formes qu'elles affectent, est, en général, tout à fait insensible à l'oeil.

§ 96. Ici une remarque est nécessaire relativement au signe de la constante C et à l'interprétation de ce signe. D'après la manière dont je viens d'arriver à l'équation générale de l'équilibre des figures laminaires, il est clair que, dans cette équation, la quantité $\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}$ peut indifféremment, quant à sa valeur absolue, être rapportée à l'une ou à l'autre des deux surfaces de la lame. Si nous convenons de la rapporter à celle de ces deux surfaces qui regarde l'extérieur de la figure, alors, quand cette même quantité, ou, ce qui revient au même, la constante C , sera positive, la pression correspondante à la surface en question sera supérieure à P , c'est-à-dire à celle d'une surface plane, et la pression correspondante à l'autre surface sera moindre que celle d'un plan, et, par suite, moindre que la première; conséquemment la résultante, qui agit nécessairement dans le sens de la plus grande des deux forces, sera dirigée, comme celle-ci, vers l'intérieur de la figure. Avec la même convention, quand C sera négatif, la plus grande des deux pressions appartiendra à la surface qui regarde l'intérieur de la figure, d'où il suit que la résultante sera dirigée vers l'extérieur.

Donc lorsque C sera positif, la figure laminaire exercera une pression sur la masse gazeuse qu'elle emprisonne, et lorsque C sera négatif, la figure laminaire exercera une pression sur l'atmosphère ambiante; mais ces actions seront détruites, dans le premier cas, par l'excès d'élasticité de l'air intérieur, et, dans le second, par l'excès relatif de la pression de l'air extérieur; enfin, lorsque C sera nul, la figure laminaire n'exercera d'action ni dans un sens ni dans l'autre.

§ 97. Ainsi, quand la figure laminaire est fermée, la condition de l'équilibre a toute sa généralité, C pouvant être positif, négatif ou nul; mais si la figure n'est pas fermée, l'équilibre ne peut évidemment subsister que pour $C = 0$. De là résulte cette conséquence remarquable dont nous verrons plus loin un grand nombre d'applications, que lorsqu'une lame liquide mince a ses deux faces en contact avec l'atmosphère libre, elle représente nécessairement une surface à courbure moyenne nulle.

§ 98. Les lames qu'on obtient avec une simple solution de savon n'ont qu'une existence très-courte, à moins qu'elles ne soient enfermées dans un vase: une bulle de savon d'un décimètre de diamètre formée à l'air libre d'une chambre, se rarement deux minutes; le plus souvent elle crève après une minute, ou même après une demi-minute. Il était donc important, pour la réalisation des figures d'équilibre, de chercher quelque liquide meilleur; or, en partant d'une idée que m'avait suggérée M. Donny, j'ai été assez heureux pour arriver, après plusieurs tentatives, à la composition d'un liquide qui fournit des lames d'une persistance remarquable: on le forme en mélangeant, dans des proportions convenables, de la glycérine et une solution de savon; je le nomme *liquide glycérique*. Je donnerai, ci-après, les détails de sa préparation; mais comme le résultat varie plus ou moins avec la qualité des substances employées, je vais indiquer

auparavant le moyen que j'ai adopté pour l'essayer.

J'ai pris comme terme de comparaison la persistance d'une bulle d'un décimètre environ de diamètre déposée, à l'air libre, de l'appartement, sur un anneau en fil de fer de 4 centimètres de diamètre. Cet anneau est porté par trois petits pieds, comme l'un de ceux du § 40; il a été, une fois pour toutes, légèrement oxydé par de l'acide azotique affaibli (§ 110). Quand on veut faire l'expérience, on le plonge dans le liquide pour qu'il en soit bien mouillé, on l'en retire, et on le pose par ses pieds sur une table en face de la porte; il se trouve alors occupé par une, lame plane qu'on y laisse; ensuite, au moyen d'une pipe de terre commune dont on a, préalablement fait tremper l'orifice dans le liquide pendant quelques minutes, on gonfle la bulle, et on la dépose sur cette lame, à la totalité de laquelle sa partie inférieure s'unit aussitôt; enfin on enlève la pipe, et la bulle demeure sur l'anneau. Cela fait, on sort de la chambre, dont on referme la porte avec précaution, et l'on observe de temps à autre la bulle à travers la serrure.

Voici pourquoi j'assigne à la bulle un diamètre déterminé : toutes choses égales d'ailleurs, les lames durent, en général, d'autant moins qu'elles sont plus grandes; il faut donc, quand on veut comparer entre elles les persistances de bulles provenant de divers échantillons de liquide glycérique, donner à ces bulles le même diamètre.

§ 99. Ceci admis, décrivons la préparation du liquide dont il s'agit. Disons d'abord que cette préparation doit s'effectuer en été, et à une époque où la température de la chambre ne descend pas, du moins pendant le jour, au-dessous de 20°; par des températures notablement plus basses, on n'obtient que des résultats mauvais ou médiocres.

Le savon le plus convenable est celui de Marseille, et la glycérine qui m'a toujours paru la meilleure est celle qui se fabrique en Angleterre, et qui est connue sous le nom de glycérine de Price; on se la procure par l'intermédiaire d'un pharmacien. Je supposerai donc, dans ce qui suit, qu'on fasse usage de ces substances, et qu'on choisisse une température suffisante. Il n'est pas impossible de réussir avec d'autres savons et d'autres glycérines, mais alors les proportions doivent changer, et je ne puis plus rien énoncer de général.

Le procédé de la préparation varie suivant le but qu'on se propose. En premier lieu, si l'on tient plus à la simplicité des manipulations qu'à l'excellence du résultat, on opère de la manière suivante:

On prend du savon de Marseille acheté récemment, de sorte qu'il ait conservé toute son humidité; on le taille en très-petits fragments, et l'on en dissout, à une chaleur modérée, une partie en poids dans quarante parties d'eau distillée. Quand la solution est revenue à peu près à la température de la chambre, on la filtre à travers un papier qui ne soit pas trop perméable, afin de l'obtenir limpide; puis on verse dans un flacon trois volumes de cette solution et deux volumes de glycérine de Price; on agite fortement et assez longtemps pour que le mélange soit bien intime, après quoi on laisse celui-ci en repos jusqu'au lendemain. Alors, suivant la qualité du savon de Marseille, il peut arriver que le mélange soit demeuré sensiblement limpide, ou bien qu'il se soit fortement troublé.

Dans le premier cas, on pourra faire servir immédiatement le liquide aux expériences: la persistance maxima des bulles d'essai sera d'une heure et demie environ; mais le liquide perdra de jour en jour de ses propriétés, et, après une quinzaine, la persistance sera réduite à dix minutes.

Dans le second cas, le précipité qui altère la transparence du liquide demeure d'abord en suspension dans toute la masse, mais monte ensuite avec une extrême lenteur, et, après quelques jours, forme une couche nettement séparée à la partie supérieure du liquide; on recueille alors la portion limpide au moyen d'un siphon qui s'amorce par

un tube latéral, et la préparation est terminée. Je dois faire remarquer que lorsqu'on introduit dans le liquide la courte branche du siphon, une portion du dépôt est entraînée, et forme, autour de la surface extérieure du tube, une sorte de cône renversé; il faut donc, avant d'amorcer le siphon, le débarrasser de cette enveloppe. Pour cela, on laisse d'abord le tout en repos pendant un quart d'heure, puis on agite un peu de droite et de gauche la branche plongée du siphon; le cône de dépôt s'en détache par petits grumeaux qui remontent peu à peu et vont rejoindre la couche supérieure. Le liquide recueilli dans ces conditions est beaucoup meilleur que le précédent; on peut l'employer aux expériences aussitôt après l'opération du siphon; les bulles d'essai qu'il fournit ont une persistance maxima de trois heures; enfin il se conserve suffisamment bon pendant un an à peu près.

Tels sont les faits que j'ai observés en faisant usage des procédés simples ci-dessus; mais il est probable qu'on rencontrerait des échantillons de savon de Marseille donnant des résultats intermédiaires.

§ 100. En second lieu, si l'on consent à recourir à une manoeuvre plus compliquée, mais dont le résultat est bien supérieur, voici comment il faut s'y prendre. Après avoir préparé la solution de savon comme précédemment, on en mêle intimement 15 volumes avec 11 volumes de glycérine de Price, ou, ce qui revient au même, 3 volumes avec 2, 2 volumes de cette glycérine, puis on abandonne le mélange à lui-même pendant sept jours. Dans cet intervalle, le liquide peut, suivant la qualité du savon, se troubler ou demeurer limpide, mais on ne s'en inquiète pas. Le matin du huitième jour, on plonge le flacon dans de l'eau qu'on a refroidie en y agitant des morceaux de glace de manière à en abaisser la température à 3° environ, et l'on entretient cette même température pendant six heures par des additions convenables de glace. Si le mélange de glycérine et d'eau de savon est en quantité considérable, il faut le fractionner entre plusieurs flacons, pour que sa température descende plus tôt jusqu'à celle du bain. Pendant cette action prolongée du froid, le liquide se trouble fortement. Les six heures écoulées, on le filtre à travers un papier suffisamment perméable³⁷, et, s'il est en grande masse, on le distribue dans plusieurs filtres placés sur des flacons séparés, et fonctionnant simultanément. Mais il faut empêcher que le liquide contenu dans les filtres ne se réchauffe, sans quoi le précipité que le froid a déterminé pourrait se redissoudre en partie; pour cela, avant de verser dans les filtres, on pose avec précaution dans chacun d'eux un petit bocal allongé plein de morceaux de glace et muni de son bouchon de verre pour lui donner plus de poids; ce bocal doit être incliné de manière à reposer par sa partie latérale contre le filtre; enfin on entoure de morceaux de glace la base de chacun des flacons qui portent les entonnoirs, puis, retirant le liquide du bain, froid, on remplit immédiatement les filtres. Les premières portions de liquide qui passent sont troubles; on les reverse dans les filtres, et il suffit de répéter cette dernière opération deux ou trois fois pour que le liquide recueilli ensuite soit absolument limpide.

Je n'ai pas besoin d'ajouter que si la filtration dure assez longtemps, il faut renouveler de temps à autre la glace des petits bocaux; quant à celle que l'on a disposée autour de la base des flacons, et qui est destinée à prévenir le réchauffement des portions qui passent d'abord en entraînant du précipité, on comprend qu'elle n'est plus nécessaire dès que le liquide se montre limpide.

La filtration terminée, on abandonne encore le liquide à lui pendant dix jours; alors la préparation est complète.

Avec un liquide ainsi préparé, les bulles d'essai peuvent, dans les meilleures conditions, persister 18 heures, c'est-à-dire six fois autant qu'avec le second liquide du

³⁷ J'emploie les filtres à côtes de Prat-Dumas.

paragraphe précédent.

§ 101. Les substances qui entrent dans la composition du liquide sont des produits de l'industrie, et sont, de plus, de nature organique; or de semblables produits varient presque toujours soit avec les époques, soit avec les fabriques d'où ils proviennent; aussi n'ai-je obtenu qu'exceptionnellement le résultat extraordinaire mentionné ci-dessus. Du reste, pour mettre les physiciens à même d'apprécier le degré de confiance que mérite le procédé dont je viens d'exposer le détail, j'ai réuni dans le tableau suivant tous les résultats qu'il m'a fournis; seulement on verra que, pour quelques uns des liquides essayés, les proportions étaient légèrement différentes.

Ces essais ont été effectués pendant quatre étés successifs, et conséquemment avec divers échantillons de glycérine de Price et de savon de Marseille; la quantité de chaque liquide préparé était de 100 à 200 grammes environ. La 3^{me} colonne du tableau donne le nombre de volumes de glycérine pour trois volumes de solution de savon, et la 4^{me} la proportion du savon par rapport à l'eau; la 5^{me} contient les persistances en nombres entiers d'heures; on n'y a pas ajouté la fraction, parce qu'on n'allait en général observer la bulle que d'heure en heure. Quand la persistance était de moins d'une heure, on l'a, pour abrégé, indiquée par le caractère $\bar{1}$; enfin quelques bulles ont dû être abandonnées le soir, à cause de l'heure avancée, et ont éclaté pendant la nuit, de sorte qu'on ignore le nombre total d'heures de leurs persistances; on a indiqué cette circonstance par un signe + placé au-dessus du nombre d'heures observé; ainsi $\bar{7}^+$ signifie que la bulle a été observée pendant sept heures, mais qu'elle a persisté au delà pendant un temps inconnu.

Avant chaque essai pour rendre le liquide aussi homogène que possible, on l'agitait fortement, puis on le laissait en repos pendant dix minutes.

ANNÉES.	N ^o D'ORDRE DES LIQUIDES	VOLUMES DE GLYCÉRINE.	PROPORTION DU SAVON.	PERSISTANCES EN HEURES.
1862	1	2,0	1/40	4, 9, 4.
	2	2,0	1/40	5, 9, 11.
	3	2,0	1/35	7, $\bar{1}$, 8.
	4	2,2	1/35	10, 10.
	5	2,2	1/40	17, 16, 12, 11, 18.
1863	6	2,2	1/40	10, 12, 4, $\bar{7}$, 6.
	7	2,2	1/40	10, 6.
	8	2,2	1/40	$\bar{1}$, 4, 6, 9, 7.
	9	2,2	1/40	2, 3, 4, 4, 5, 3, 4, 4.
1864	10	2,2	1/40	2, 4, 5, 3, 5.
	11	2,0	1/40	$\bar{1}$, 4, 8, 4.
	12	2,2	1/40	2, 6, $\bar{1}$, 7, 7.
	13	2,0	1/40	3, 3, 7.
	14	2,2	1/40	4, 6, 9, 1, 2.
1865	15	2,2	1/40	5, 5, 2.
	16	2,2	1/40	4, 7, 5, 5, 5, 4, 5.
	17	2,2	1/40	10, 7, 1, 8, 6, 6, 7.
	18	2,2	1/40	9, 6, 3, 5, 3, 6, 9, 6, 7, 1, 4, 5.
	19	2,2	1/40	$\bar{10}$, 4, 3, 5, 9, 7, 8.

On voit que les liquides de 1862, de 1863 et de 1865 ont été en général très-bons, mais que ceux de 1864 se sont montrés inférieurs, sans être mauvais; je dois ajouter que les liquides 11, 12 et 13, surtout les deux derniers, ont présenté cette particularité que les bulles se formaient difficilement: plusieurs ont éclaté soit avant même d'être déposées sur l'anneau, soit immédiatement après.

J'ai préparé encore, en 1864, avec un autre échantillon de glycérine, deux liquides qui ne se trouvent pas dans le tableau ; ils étaient décidément mauvais, mais j'ai certaines raisons de soupçonner une erreur dans la pesée du savon, dont la quantité aurait été eux fois trop forte; c'est pour ce motif que je ne les ai point inscrits.; cependant l'erreur dont il s'agit ne m'est pas prouvée, et c'est là ce qui me fait admettre la possibilité d'une nonréussite, tout exceptionnelle d'ailleurs.

Enfin ce qui m'a engagé à considérer comme les proportions les plus efficaces celles que j'ai prescrites dans le § précédent, c'est que, parmi les liquides de 1862, le plus excellent, celui qui m'a donné des persistances de 17 et de 18 heures, c'est-à-dire le 5mo, a été préparé dans ces mêmes proportions.

§ 102. Le liquide glycérique obtenu par le procédé du § 100 commence à se troubler légèrement après un mois environ, puis le trouble augmente insensiblement, et, en même temps, la persistance des lames que fournit le liquide diminue peu à peu. Le précipité qui se forme ainsi ne monte pas, ou ne monte qu'avec une excessive lenteur, et si l'on essaie de clarifier le liquide par filtration, le précipité passe avec lui à travers le filtre. Ce même précipité, qui résulte d'une altération graduelle du liquide sans l'intervention du froid, est probablement d'une autre nature que celui qui apparaît lors du refroidissement à 3°.

Les divers échantillons que j'ai préparés ayant été successivement absorbés par mes expériences ou réunis en une masse unique dont les parties avaient ainsi des âges très—inégaux, je ne puis dire avec certitude pendant combien de temps un liquide obtenu par le procédé dont il s'agit se conserve suffisamment pour la réalisation des figures laminaires. J'ai pu cependant m'assurer que ce temps dépasserait de beaucoup un an : j'avais conservé par hasard une petite quantité d'un liquide assez bon, quoique préparé dans des circonstances qui n'étaient pas les plus favorables; je l'ai repris, et essayé de nouveau environ deux ans et demi plus tard; il s'est laissé, sans trop de difficulté, gonfler en bulles d'un décimètre; quelques unes de celles ont éclaté immédiatement, mais une dernière est demeurée sur l'anneau, et a persisté heures. On peut donc croire qu'un liquide fait dans les conditions normales, se maintiendrait mieux encore.

§ 103. Le savon de Marseille consiste, on le sait, en un mélange d'oléate, de stéarate et de margarate de soude, et je me suis assuré, par quelques expériences, que c'est au premier de ces sels que la solution de savon doit la propriété de se laisser gonfler en grosses bulles. J'ai été conduit, en outre, à regarder comme probable que le précipité déterminé par le froid dans la préparation du liquide glycérique (§ 100), et dont la séparation à l'aide du filtre améliore si considérablement ce liquide, est formé de stéarate et de margarate de soude. J'ai conclu de tout cela qu'en substituant l'oléate de soude pur au savon de Marseille, on devait réaliser, par un procédé bien plus simple, un liquide supérieur même aux meilleurs liquides préparés au savon; or c'est ce que l'expérience confirme pleinement: il m'a suffi, en effet, de dissoudre simplement, à une chaleur modérée, l'oléate de soude dans l'eau distillée, puis de mêler la glycérine à cette solution.

Dès le lendemain ou le surlendemain, les liquides étaient propres aux expériences, et ils m'ont donné des bulles (toujours d'un décimètre et à l'air libre), dont la persistance maxima a dépassé 24 heures. Comme je pouvais le prévoir, le liquide glycérique à l'oléate de soude ne se trouble pas par le froid; en outre, j'ai de fortes raisons de croire qu'il se conserve beaucoup plus longtemps que le liquide au savon; cependant il se trouble aussi après un temps plus ou moins long.

Le liquide à l'oléate de soude est donc le véritable liquide glycérique, il l'emporte

de beaucoup sur le liquide au savon, et sa préparation est des plus faciles. Malheureusement l'oléate de soude pur ne se trouve pas dans le commerce, et il faut, pour s'en procurer, recourir à un chimiste.

Je dois les échantillons dont j'ai fait usage à l'obligeance de M. Rottier, préparateur de chimie à l'Université de Gand; il les avait obtenus par le procédé décrit dans le *Précis de chimie organique* de M. Gerhardt. Insistons, à l'égard de cette préparation, sur un point important: si l'on veut que l'oléate soit propre à la confection d'un bon liquide glycérique, il faut que le chimiste emploie, pour le précipiter et l'avoir ainsi isolé, du sel marin parfaitement purifié soit par des cristallisations successives, soit par un autre moyen, avec le sel du commerce, l'oléate recueilli donne, dissous dans l'eau, un liquide trouble qu'on ne parvient pas à clarifier suffisamment.

§ 104. J'ai employé l'oléate de soude sous deux états savoir: 1° humide et ayant la consistance du savon de Marseille, 2° complètement desséché. J'ai eu à ma disposition deux échantillons différents d'oléate humide; tous les deux ainsi que l'oléate desséché donnaient des solutions parfaitement limpides; celles des oléates humides se troublaient, à la vérité, après quelques heures, mais elles se clarifiaient d'elles-mêmes en deux ou trois jours par le dépôt du précipité, de sorte qu'on n'avait plus qu'à les décanter.

Les proportions d'oléate qui m'ont paru les plus efficaces sont, pour l'oléate humide, une partie en poids dissoute dans cinquante parties d'eau distillée, et, pour l'oléate sec, une partie en poids dans soixante parties d'eau distillée; quant à la glycérine, j'ai obtenu d'excellents résultats en la mêlant à la solution du second oléate humide, et à celle de l'oléate sec, dans la même proportion que pour les liquides au savon, c'est-à-dire 2,2 volumes de glycérine pour 3 de solution d'oléate; mais, avec le premier oléate humide, j'ai dû renforcer un peu la quantité de glycérine. Comme on le verra par le tableau ci-après, ce même oléate m'a donné aussi de très-grandes persistances avec des proportions assez différentes, savoir la solution faite à et une quantité plus forte encore de glycérine.

Je dois présenter une remarque à l'égard de l'oléate sec : celui qui a servi pour les liquides ci-dessus avait subi la dessiccation en masse. M. Rottier en a desséché une autre portion à l'état de poudre grossière, et celle-ci s'est montrée beaucoup moins bonne; il paraît, d'après cela, que la dessiccation altère l'oléate superficiellement; cette altération a peu d'influence quand la substance est en gros morceaux, parce qu'alors la surface est petite relativement au volume, mais elle produit une détérioration considérable quand cette même substance est à l'état de grande division.

Voici maintenant le tableau des résultats; il est disposé comme celui du § 101, et ne contient que les résultats correspondants à de bonnes proportions; tous ont été obtenus dans l'été de 1863.

ÉTAT DE L'OLEATE	N° D'ORDRE DES LIQUIDES	VOLUMES DE GLYCÉRINE.	PROPORTION DU SAVON.	PERSISTANCES EN HEURES.
Humide	1	2,4	1/50	14, 23, 5, 8.
Id	2	2,7	1/40	⁺ 13, 22, 12, 9, 7, 10, 6, 12, 7.
Id	3	2,6	1/50	3, 7, 12, 5, 23, 20, 12. ⁺
Id	4	2,4	1/50	⁺ 12, ⁺ 13.
Sec	5	2,2	1/60	19, 23, 10.
Id	6	2,2	1/60	23, 17, 10, 13.
Humide	7	2,2	1/50	24, 3, 10, 4, 17, 4. ⁺

Bien que ces liquides m'aient donné, on le voit, de très-grandes persistances, je

suis convaincu qu'il est possible d'aller beaucoup plus loin encore. En effet, on peut remarquer que les persistances d'un même liquide sont en général fort inégales, ce qui me porte à croire que mes essais relatifs aux proportions n'ont pas été assez nombreux, et que, pour plusieurs des liquides, celles indiquées dans le tableau ne sont pas les meilleures.

§ 105. Je crois devoir insister sur la grande importance des proportions, tant pour le liquide au savon que pour le liquide à l'oléate de soude; les expériences qui m'ont conduit à celles que j'ai indiquées, me donnent la certitude que si l'on effectuait au hasard la solution de savon ou d'oléate et son mélange avec la glycérine, on pourrait avoir un liquide peu supérieur ou même inférieur à la simple eau de savon. Par exemple, j'ai préparé, à la fin de l'été de 1865, dans de bonnes conditions de température, un liquide au savon où la solution était, comme pour les autres, à $\frac{1}{40}$, mais où il n'y avait que 1,8 volume de glycérine pour 3 volumes de cette solution; or, sur sept bulles de ce liquide, une seule a atteint une heure de durée, et, pour plusieurs des autres, la persistance n'a pas même été d'une demi-heure.

§ 106. On sait que les bulles de savon persistent beaucoup plus longtemps en vase clos qu'à l'air libre; or il en est de même des bulles de liquide glycérique; seulement, pour que l'expérience ait une complète réussite à l'égard de ces dernières, il faut que le vase dans lequel on en ferme la bulle ait des dimensions considérables relativement au volume de celle-ci.

J'ai employé comme vase une cage cubique en verre de 30 centimètres de côté; le liquide était formé du mélange des nos 17 et 18 du tableau du § 101; il a donné à l'air libre, les persistances 5, 3, 4, 5, 9, 1, 5 et 6 heures, et, dans la cage de verre, 33, 15, 27 et 21 heures.

On augmente encore beaucoup la persistance en plaçant dans le vase clos une substance qui absorbe l'humidité de l'air : après avoir obtenu les résultats ci-dessus, j'ai recommencé les expériences en déposant préalablement des fragments de chlorure de calcium sur le fond de la cage; mais il fallait éviter la grande quantité de vapeur aqueuse que chasse dans l'intérieur de la bulle l'insufflation au moyen de la bouche; pour cela, on a adapté le tuyau de la pipe à une balle creuse en caoutchouc, puis, après avoir comprimé celle-ci pour en expulser l'air, on a introduit la tête de la pipe dans un bocal contenant une certaine quantité de chlorure de calcium, et on a laissé la balle se regonfler par son élasticité, en aspirant ainsi l'air à peu près sec de ce bocal; cela fait, on s'est servi de cet instrument pour former la bulle; celle-ci a persisté 7 heures.

J'ai soumis ensuite aux mêmes expériences un liquide préparé à l'oléate de soude, mais avec un oléate qui n'était pas très-bon³⁸; il a donné, à l'air libre, les persistances 10, 10, 12, 10⁺ et 8⁺ heures, et pouvait conséquemment être assimilé aux meilleurs liquides préparés au savon. Dans la cage de verre, sans chlorure de calcium, une première bulle a duré 10, une autre 24, et une dernière 41 heures; avec l'emploi du chlorure de calcium, la persistance a été de 54 heures.

Je dois dire ici que la cage de verre avait son ouverture tournée en bas, et se posait simplement sur une tablette, de sorte que, pour gonfler la bulle, il fallait d'abord enlever la cage, et qu'ainsi, pendant l'opération, la bulle se trouvait exposée à l'air libre de la chambre; en outre, la quantité de chlorure de calcium était insuffisante pour couvrir tout le sol de la cage; enfin le bord de celle-ci ne joignait qu'imparfaitement à la tablette en certains endroits. Il suit de là que l'air dans lequel la bulle demeurait plongée n'était pas bien desséché; mais, en essayant de produire un dessèchement plus complet, je

³⁸ C'est pour cette raison qu'il n'est pas inscrit dans le tableau du § 104.

n'ai obtenu que des persistances moindres; il en a de même quand, pour gonfler la bulle avec de l'air parfaitement sec, j'ai interposé, entre le tuyau de la pipe et la balle de caoutchouc, un tube de verre plein de fragments de chlorure de calcium.

Il paraît donc que, pour atteindre les plus grandes persistances, il ne faut dessécher que jusqu'à un certain point l'atmosphère du vase clos et l'air qui gonfle la bulle. Nous verrons plus loin (§ 303) que la nécessité d'un vase de grandes dimensions et d'un, dessèchement imparfait de l'air s'explique complètement.

§ 107. J'ai dit (§ 99) qu'avec d'autres savons et des glycérines d'autres provenances, il n'était pas impossible de se procurer un bon liquide, mais qu'alors les proportions devaient être modifiées; en voici des exemples:

En premier lieu, en employant le savon de Marseille et une glycérine française qui m'avait été vendue dans un flacon portant les noms *Lamoureux et Gendrot*, le liquide, préparé dans les proportions qu'exige la glycérine de Price, n'a donné que des persistances d'un quart-d'heure; mais j'ai essayé ensuite des proportions différentes, et j'ai réussi en prenant une partie de savon dissoute dans 30 parties d'eau distillée, et des volumes égaux de glycérine et de cette solution; les persistances ont été : 2, 4, 6, 9 et 8 heures.

En second lieu, j'ai réussi également avec le savon de Windsor et la glycérine de Price; mais je dois dire que ce savon, comme la plupart des autres savons de toilette, présente un grave inconvénient: quand on l'a dissous dans l'eau distillée, la solution se prend, par le refroidissement, en une masse gélatineuse. Je suis cependant parvenu, après beaucoup de tâtonnements, à le faire servir à la préparation; mais le procédé est trop compliqué pour que je l'indique ici, et je ne mentionne l'emploi de ce savon que pour montrer la possibilité d'obtenir un bon liquide avec des savons autres que celui de Marseille.

Voici, en outre, une préparation recommandée comme facile par M. Böttger³⁹ je traduis la partie essentielle de l'article:

«On introduit, dans un grand flacon renfermant de l'eau distillée froide, du savon d'huile de palme taillé en très-petits fragments, on secoue fortement, et l'on se procure ainsi une solution aussi saturée que possible; on la filtre à travers du papier suffisamment perméable, et l'on y mêle un tiers environ de son volume de glycérine chimiquement pure et concentrée. ...

Des bulles d'un pied, et au delà, de diamètre, convenablement soustraites aux agitations de l'air et aux ébranlements, persistent souvent 5 à 10 minutes, mais des bulles de 1 à 3 pouces (26mm à 78mm) durent des heures entières et même fréquemment 10 à 20 heures. »

J'ignore s'il est plus aisé de se procurer du savon d'huile de palme que de l'oléate de soude pur; mais, à coup sûr, il doit être fort difficile d'avoir de la glycérine chimiquement pure. On voit, du reste, que le liquide de M. Böttiger est inférieur au liquide à l'oléate de soude (§ 104).

J'ajouterai ici que j'ai essayé inutilement de préparer un liquide convenable en employant des glycérines allemandes du commerce; peut-être n'ai-je pas varié suffisamment les proportions. J'insiste donc encore pour que les personnes qui voudront préparer mon liquide, se servent de glycérine de Price.

§ 108. Les bulles de liquidé glycérique manifestent toujours, quand elles persistent assez longtemps, deux phénomènes bien remarquables:

³⁹*Leichte Anfertigung einer Flüssigkeit zur Erzeugung der Plateau'schen Gleichgewichtsfiguren ohne Schwere* (Jahres-Bericht des physikalischen Vereins zu Frankfurt am Main, 1868-1869, p. 10).

En premier lieu, la lame qui constitue une semblable bulle, prend après une heure ou deux, une épaisseur sensiblement égale dans toute son étendue, sauf, bien entendu, la petite portion inférieure interceptée par l'anneau métallique. On le reconnaît à la disposition des teintes: en effet, quand on observe une de ces bulles en tenant l'oeil à la hauteur ça centre, on voit, au milieu de sa surface, un large espace circulaire d'une couleur uniforme, et, autour de celui-ci, un ou deux anneaux concentriques dont chacun présente une autre couleur. La teinte de l'espace central est évidemment celle de la lame sous l'incidence normale et sous les incidences voisines; quant aux teintes des anneaux, elles résultent de l'obliquité plus forte des rayons visuels. Je dois ajouter que souvent le haut de l'anneau coloré extérieur offre, sur une certaine étendue, une nuance un peu différente du reste, et qui indique, au sommet de la bulle, une ténuité tant soit peu plus grande de la lame.

En second lieu, les teintes dont il s'agit montent d'abord lentement vers les premiers ordres, puis redescendent, lentement aussi, jusqu'au rouge et au vert des derniers, et même quelquefois presque jusqu'au blanc; d'où résulte cette conséquence singulière que l'épaisseur de la lame, après avoir diminué jusqu'à un certain point, va ensuite en augmentant.

§ 109. L'uniformité d'épaisseur à laquelle parvient la lame peut, me semble-t-il, s'expliquer de la manière suivante: lorsque notre bulle est déposée sur l'anneau solide, l'amincissement graduel de la lame doit marcher avec une lenteur croissante, car, toutes choses égales d'ailleurs, plus cette lame est mince, moins les portions de liquide qui descendent incessamment vers l'anneau métallique ont de masse, et conséquemment plus leur mouvement doit être entravé par la résistance que la viscosité lui oppose; or, par la même raison évidemment, si la lame présente une épaisseur inégale, la descente du liquide sera moins lente dans les portions plus épaisses, d'où il suit que la lame tendra vers une minceur uniforme.

Il est inutile de rappeler que je fais toujours abstraction de la petite calotte interceptée par l'anneau solide, calotte que cet anneau rend indépendante du reste.

A la vérité, dans les premiers temps de l'existence de la bulle, l'épaisseur est d'autant plus grande que l'on considère des points plus voisins de l'anneau solide, et comme, à mesure qu'on se rapproche de celui-ci, l'inclinaison de la lame est de plus en plus forte, la pesanteur agit par une composante de plus en plus faible; mais il suffit d'admettre que l'influence de l'augmentation de masse l'emporte sur celle de l'amoindrissement de la composante en question.

Pour rendre l'explication complète, il faut encore donner la raison de la circonstance mentionnée ci-dessus, que l'épaisseur est d'abord plus grande dans le bas de la bulle; or on comprend que, tant que la lame a partout une épaisseur assez notable, l'influence des différences de masse se fait moins sentir, et qu'ainsi le liquide qui descend vers la moitié inférieure de la bulle peut, pendant quelque temps, y demeurer plus ou moins accumulé. C'est ce que vient appuyer l'expérience suivante: on réalise une lame plane dans un anneau en fil de fer de 7 centimètres de diamètre, par exemple, ce qui se fait en plongeant horizontalement cet anneau dans le liquide et le retirant de la même manière. Si l'anneau est maintenu ensuite dans une position horizontale, la lame plane en question se montre incolore, du moins pendant un certain temps; mais si, dès qu'elle est formée, on incline l'anneau et qu'on le maintienne ainsi, elle se partage bientôt en bandes horizontales nombreuses et colorées, dont les teintes indiquent un accroissement d'épaisseur de la partie la plus haute jusqu'à la partie la plus basse. Ces lames n'ont jamais une très-grande persistance, sans quoi elles arriveraient probablement peu à peu à une teinte uniforme. On verra, du reste, plus loin que, dans

des circonstances convenables, une lame plane et inclinée finit par devenir entièrement noire.

Quant à la rétrogradation des teintes, elle provient de ce que le liquide glycérique absorbe l'humidité de l'air ambiant; en effet, quand la bulle est formée en vase clos, si l'on a fait en sorte, en mouillant d'eau les parois intérieures de ce vase, que la bulle soit entourée d'une atmosphère très-humide, les teintes ne sortent pas du rouge et du vert des derniers ordres; et si, au contraire, on a déposé au fond du vase une substance absorbante, les teintes montent sans rétrograder. C'est que, dans une atmosphère très-humide, l'absorption de l'eau par la lame répare continuellement la diminution d'épaisseur due à la descente du liquide, tandis que, dans une atmosphère desséchée, cette réparation ne peut avoir lieu. Enfin, à l'air libre, il faut admettre que l'effet de la descente du liquide l'emporte d'abord sur celui de l'absorption, et qu'ensuite c'est l'inverse qui se produit. J'aurai à revenir sur ce phénomène, et je l'expliquerai alors plus nettement.

§ 110. Maintenant que nous sommes en possession d'un liquide qui se laisse développer en lames très-durables, faisons servir ces lames à la réalisation des figures d'équilibre de révolution. Les appareils nécessaires sont les suivants: 1° un système d'anneaux en fil de fer de 7 centimètres de diamètre, pareil à celui du § 40; seulement les pieds de l'anneau inférieur sont fixés sur une plaque solide, afin que l'ensemble ait un certain poids. 2° Un second système semblable, mais dont les anneaux n'ont que 3 centimètres de diamètre. 3° Le système de disques de 7 centimètres du § 63. 4° Une tablette à vis calantes. 5° Un support consistant en une tige verticale le long de laquelle glisse, à frottement doux, un bras horizontal, c'est à l'extrémité de celui-ci que l'on fixe soit l'un des anneaux supérieurs par le bout de la queue de sa fourche, soit le disque supérieur par le bout du fil de fer qui le soutient, j'ai pris, pour ce support, un cathétomètre, l'anneau ou le disque s'attachait, à l'aide d'une pièce intermédiaire, à l'extrémité de la lunette; on avait ainsi, outre les autres conditions, la faculté de lire, sur la graduation de l'instrument, la quantité dont on élevait ou dont on abaissait l'anneau ou le disque.

Quand les anneaux et les disques sont neufs, le liquide glycérique y adhère mal, et les figures laminaires crèvent pendant qu'on essaie de les former, ou presque immédiatement après leur formation; mais on écarte cette difficulté de la manière suivante: on plonge les appareils dont il s'agit dans de l'acide azotique étendu de quatre fois son volume d'eau, on les y maintient jusqu'à ce que leur surface soit notablement oxydée, ce qui n'exige que deux minutes environ, puis on les lave soigneusement dans de l'eau pure, on les essuie en y promenant une bande de papier à filtre, et on les laisse sécher; ils sont alors rendus propres à servir indéfiniment, et donnent toujours des figures bien persistantes.

Voici maintenant comment on prépare les expériences. On rend d'abord le cathétomètre bien vertical, et l'on y adapte l'anneau ou le disque supérieur; si cet anneau ou ce disque ne paraît pas tout à fait horizontal, on en corrige la position en courbant légèrement avec une pince le fil de fer qui le soutient. On place ensuite sur la tablette à vis la pièce inférieure, anneau ou disque, de manière qu'elle soit à peu près verticalement sous l'autre, puis, au moyen des vis calantes et par de petits déplacements de la pièce inférieure, on parvient sans peine à faire en sorte qu'en descendant la supérieure, les deux anneaux ou les deux disques se recouvrent exactement. Alors, après avoir remonté le supérieur, on mouille soigneusement chacun d'eux avec du liquide glycérique. Pour l'anneau inférieur on se sert, à cet effet, d'un pinceau bien imbibé, et, pour le supérieur, on soulève jusqu'à lui une capsule contenant du même liquide, dans

lequel on le fait plonger. Après qu'on a retiré la capsule, l'anneau se trouve occupé par une lame plane, mais on la crève. Quant aux disques, on étend le liquide avec le pinceau sur la totalité des deux faces en regard, puis on amène en contact avec la face mouillée du disque supérieur le liquide contenu dans la capsule, enfin on enlève celle-ci.

§ 111. Supposons actuellement qu'il s'agisse de réaliser le caténoïde. On prend le système d'anneaux de 7 centimètres, et, après avoir disposé les choses comme je viens de l'indiquer, on abaisse l'anneau supérieur jusqu'à ce qu'il ne soit plus séparé de l'autre que d'une fraction de millimètre; puis on promène à plusieurs reprises le pinceau bien trempé de liquide glycérique tout le long de l'ensemble des deux anneaux, afin de remplir le petit espace laissé entre eux. On élève alors l'anneau supérieur, et l'on voit un caténoïde laminaire s'étendre de l'un à l'autre. Je rappellerai ici qu'entre deux anneaux égaux dont l'écartement est moindre que l'écartement limite, il y a (§ 58 et 80) deux caténoïdes possibles inégalement rentrés, et que lorsqu'on réalise, avec de l'huile au sein du liquide alcoolique, un caténoïde plein, c'est toujours (§ 60) le moins rentré qui se produit, d'où j'ai conclu que le plus rentré est instable; or, comme on devait s'y attendre, le caténoïde laminaire de notre expérience est toujours aussi le moins rentré.

En continuant à faire monter graduellement l'anneau, on atteint bientôt un point où l'équilibre cesse: on voit le caténoïde se resserrer rapidement en son milieu, et se convertir en deux lames planes occupant respectivement les deux anneaux. La lecture au cathétomètre donne alors, pour l'intervalle des deux anneaux, environ 46 millimètres, c'est-à-dire à fort peu près les deux tiers du diamètre des anneaux, ou la hauteur du caténoïde limite (§ 80).

C'est que la figure étant ouverte, et conséquemment formée d'une lame en contact par ses deux faces avec l'atmosphère libre, elle doit nécessairement (§ 97) représenter une surface à courbure moyenne nulle, ou, en d'autres termes, l'une de celles que les géomètres ont appelées surfaces à aire minima; or, d'après la démonstration de Goldschmidt (§ 80), au delà de l'écartement limite, il n'y a plus d'autre surface de révolution à aire minima pouvant s'appuyer sur les deux anneaux, que l'ensemble de deux plans occupant respectivement ces derniers. Remarquons, en passant, que les lames qui, après la transformation, remplissent les deux anneaux, offrent un exemple de la réalisation laminaire du plan.

J'ai déjà appelé (§ 60) l'attention sur le fait qu'un caténoïde limite plein, formé avec de l'huile dans le liquide alcoolique, loin de s'altérer spontanément, est, au contraire, très-stable; je ferai voir, en son lieu (§ 387), à quoi tient cette différence entre la figure pleine et la figure laminaire.

§ 112. Pour réaliser le cylindre avec les mêmes anneaux de 7 centimètres, on procède comme suit: après avoir monté l'anneau supérieur à une hauteur suffisante, on gonfle une bulle de 10 centimètres environ de diamètre, et on la dépose sur l'anneau inférieur, auquel elle adhère immédiatement; puis on abaisse l'anneau supérieur jusqu'à ce qu'il vienne toucher la bulle, qui s'attache également à tout son contour; il est inutile de rappeler que les deux anneaux doivent avoir été préalablement mouillés de liquide glycérique (§ 110); enfin on remonte graduellement l'anneau supérieur, et la bulle qui, ainsi verticalement étirée, perd de plus en plus sa courbure méridienne latérale, se convertit, pour un certain écartement des anneaux, en un cylindre parfaitement régulier, présentant des bases convexes comme les cylindres d'huile pleins.

On peut donner à la bulle un diamètre un peu plus grand; mais quand il est trop considérable, on n'arrive plus à la forme cylindrique, soit parce que le cylindre que l'on

voudrait obtenir dépasse sa limite de stabilité, soit parce que, s'il est encore en deçà de cette limite, il commence à en approcher : dans ce dernier cas, en effet, les forces figuratrices devenant très-peu intenses, le faible poids de la lame exerce une influence sensible, et la figure se montre plus ou moins renflée dans sa moitié inférieure et étranglée dans sa moitié supérieure. Le cylindre le plus élevé que l'on puisse réaliser d'une manière régulière avec les anneaux indiqués, a une hauteur de 17 centimètres environ, et l'on voit qu'il est en deçà de la limite de la stabilité, puisque celle-ci correspond à une hauteur un peu plus grande que le triple du diamètre (§ 46).

§ 113. Veut-on obtenir un onduloïde partiel étranglé en son milieu (§ 55)? On dépose sur l'anneau inférieur une bulle n'ayant qu'environ 9 centimètres de diamètre, on la saisit, comme précédemment, avec l'anneau supérieur, puis on remonte de même ce dernier, mais on va au delà du point où la figure devient cylindrique; cette figure s'étrangle alors en son milieu, d'autant plus profondément qu'on élève davantage l'anneau, et constitue ainsi l'onduloïde cherché. Celui-ci se montre, comme le cylindre, parfaitement régulier, et ses bases sont également des calottes sphériques convexes.

En élevant toujours l'anneau supérieur on atteint un point où l'équilibre ne peut plus exister, et alors la figure se resserre rapidement en son milieu, où elle se désunit pour se transformer en deux bulles sphériques respectivement attachées aux deux anneaux.

Si c'est un onduloïde partiel renflé en son milieu (§§47 , 52 et 54) que l'on se propose de réaliser, on fait usage du système d'anneaux de 3 centimètres. On forme une bulle d'environ 8 centimètres de diamètre, et, après l'avoir déposée sur l'anneau inférieur, puis l'avoir saisie avec l'anneau supérieur, on élève ce dernier; la bulle passe ainsi par degrés à une figure composée d'un renflement entre deux portions d'étranglements et ayant encore pour bases des calottes sphériques convexes; c'est conséquemment l'onduloïde en question.

Dans cette expérience, il faut s'arrêter à un degré d'écartement des anneaux pour lequel les tangentes aux points extrêmes de la ligne méridienne sont encore notablement inclinées sur l'axe, et, avec cette condition, la figure paraît régulière comme les précédentes. Si l'on va jusqu'à approcher du point où ces tangentes seraient verticales, la figure avoisine sa limite de stabilité (§ 52), et, comme à l'égard du cylindre, la diminution des forces figuratrices laisse au poids de la lame une action sensible; le renflement se montre alors un peu plus bas que le milieu de la hauteur de la figure.

§ 114. Enfin la réalisation du nodoïde exige l'emploi du système de disques. On commence par gonfler une bulle de 3 à 4 centimètres de diamètre, on l'amène en contact avec la face mouillée du disque inférieur, à laquelle elle adhère aussitôt en s'étalant plus ou moins, et l'on continue à la gonfler jusqu'à ce quelle fasse partie d'une sphère d'environ 10 centimètres de diamètre, puis on enlève la pipe; la lame part alors du bord même du disque. On abaisse ensuite le disque supérieur jusqu'à ce qu'il vienne toucher le sommet de la bulle; celle-ci s'ouvre immédiatement en cet endroit, et la lame gagnant également le bord du dernier disque, forme, d'un bord à l'autre, une portion de renflement d'onduloïde. Les choses étant en cet état, on continue à descendre le disque supérieur, et, quand on a dépassé le point où la figure constituerait une zone sphérique, on a le nodoïde partiel cherché (§ 71). Si l'on descend encore le disque, on atteint, absolument comme avec le nodoïde d'huile plein, un point au delà duquel la figure cesse d'être de révolution, et se porte latéralement d'autant plus que le disque s'abaisse davantage.

§ 115. Toutes ces expériences sont fort curieuses; il y a un charme particulier à contempler ces légères figures presque réduites à des surfaces mathématiques, qui se montrent parées des plus brillantes couleurs, et qui, malgré leur extrême fragilité,

persistent pendant si longtemps.

Ces mêmes expériences s'exécutent promptement et de la manière la plus commode. On n'a plus ici les embarras qui, dans les expériences avec les masses d'huile pleines, résultent de l'égalisation des deux densités, des variations de la température, et de la petite action mutuelle des deux liquides. Seulement il y a certaines expériences qui exigent impérieusement l'emploi de l'huile et du liquide alcoolique: telle est, par exemple, la réalisation de la figure engendrée par un noeud entier de la ligne méridienne du nodoïde (§ 67).

Lorsqu'on a terminé une série d'expériences avec le liquide glycérique, on lave les anneaux ou les disques en les agitant dans de l'eau de pluie, puis, pour les sécher, on dépose les premiers sur du papier à filtre, et on essuie les seconds.

Indiquons encore une précaution utile: quand on effectue un grand nombre d'expériences de suite, il est bon de remouiller de temps à autre de liquide glycérique l'anneau supérieur.

§ 116. Avant de passer aux figures d'équilibre qui ne sont pas de révolution, nous allons nous occuper de deux questions ayant trait aux sphères laminaires.

La surface extérieure d'une semblable sphère ayant tous ses rayons de courbure égaux et positifs, la lame presse (§ 96) sur l'air qu'elle emprisonne. Or la pression correspondante à un point d'une figure laminaire a , comme nous l'avons vu (§ 95), pour expression:

$$A \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) ;$$

mais, dans le cas de la figure sphérique, on a $R = R'$ = le rayon de la sphère; si donc nous désignons par d le diamètre de la bulle, la valeur de la pression deviendra simplement $\frac{4A}{d}$, en négligeant, bien entendu, la petite épaisseur de la lame; d'où il suit que l'intensité de la pression exercée par une bulle sphérique laminaire sur l'air qu'elle emprisonne, est en raison inverse du diamètre de la bulle.

Le fait de cette pression est connu depuis longtemps, et, dès 1844, M. Henry, dans une communication verbale faite à la Société Américaine⁴⁰ *Sur la cohésion des liquides*, avait déduit, de considérations autres que les précédentes, la loi que nous venons d'énoncer.

Maintenant, reprenons encore l'expression générale de la pression correspondante à un point quelconque d'une surface liquide, savoir:

$$P + \frac{A}{2} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right).$$

Pour une surface de courbure sphérique convexe, si l'on désigne par d le diamètre de la sphère à laquelle appartient cette surface, l'expression ci-dessus devient:

$$P + \frac{2A}{d},$$

et, pour une surface sphérique de courbure concave appartenant à une sphère du même diamètre, on aura:

$$P - \frac{2A}{d}.$$

Ainsi, dans le cas de la surface convexe, la pression totale est la somme de deux forces agissant dans le même sens, forces dont l'une désignée par P est la pression

⁴⁰ Philos. 1845, vol. XXVI, page 541.

qu'exercerait une surface plane, et dont l'autre représentée par $\frac{2A}{d}$ est l'action qui dépend de la courbure. Au contraire, dans le cas de la surface concave, la pression totale est la différence entre deux forces agissant en sens opposés, et qui sont encore l'une l'action P d'une surface plane, et l'autre $\frac{2A}{d}$ qui dépend de la courbure. On voit par là que la quantité qui représente, comme nous l'avons montré ci-dessus, la pression exercée par une lame sphérique sur l'air qu'elle emprisonne, est égale au double de l'action qui provient de la courbure de l'une ou de l'autre surface de la lame.

Maintenant, lorsqu'un liquide s'élève dans un tube capillaire et que le diamètre de celui-ci est suffisamment petit, on sait que la surface qui termine la colonne soulevée ne diffère pas sensiblement d'une demi-sphère concave, dont le diamètre est par conséquent égal à celui du tube. Rappelons, en outre, une partie des raisonnements par lesquels on arrive, dans la théorie de l'action capillaire, à la loi qui lie la hauteur de la colonne soulevée au diamètre du tube. Supposons un canal excessivement délié partant du point le plus bas de la surface hémisphérique dont il s'agit, descendant verticalement jusqu'au-dessous de l'orifice inférieur du tube, se recourbant ensuite horizontalement, et enfin se relevant pour aboutir verticalement à un point de la surface plane du liquide extérieur au tube; les pressions correspondantes aux deux orifices de ce petit canal seront, d'une part, P , et, de l'autre, $P - \frac{2A}{\delta}$, en désignant par δ le diamètre de la demi-sphère concave, ou, ce qui revient au même, celui du tube. Or les deux forces P se détruisant mutuellement, il ne reste que la force $-\frac{2A}{\delta}$, qui ayant un signe contraire à celui de P , agit conséquemment de bas en haut au point inférieur de l'hémisphère concave, et c'est elle qui soutient le poids du filet moléculaire contenu dans la première branche du petit canal entre ce même point et un point situé à la hauteur du niveau extérieur.

Cela posé, remarquons que la quantité $\frac{2A}{\delta}$ est l'action qui provient de la courbure de la surface concave. Le double de cette quantité, ou $\frac{4A}{\delta}$ exprimera donc la pression qu'exercerait sur l'air contenu une sphère laminaire ou bulle creuse du diamètre δ et formée du même liquide. Il résulte de là que cette pression constitue une force capable de soutenir le liquide à une hauteur double de celle à laquelle il s'élève dans le tube capillaire, et que, par conséquent, elle ferait équilibre à la pression d'une colonne du même liquide ayant cette hauteur double. Supposons, pour fixer les idées, δ égal à un millimètre, et désignons par h la hauteur à laquelle le liquide s'arrête dans un tube de ce diamètre; nous aurons ce nouveau résultat, que la pression exercée, sur l'air contenu, par une bulle creuse formée d'un liquide donné et ayant 1mm de diamètre, ferait équilibre à celle qu'exercerait une colonne de ce liquide d'une hauteur égale à $2h$.

Mais, la pression exercée par une bulle étant en raison inverse du diamètre de celle-ci, il s'ensuit que la colonne liquide qui ferait équilibre à la pression exercée par une bulle d'un diamètre quelconque d , aura une hauteur égale à $\frac{2h}{d}$.

Il semble d'abord que cette dernière expression devrait s'appliquer également bien aux liquides qui s'abaissent dans les tubes capillaires, h désignant alors cet abaissement, toujours dans un tube de 1 mm de diamètre; mais il n'en est pas tout à fait ainsi, car cela exigerait, comme on le voit aisément par la nature des raisonnements qui précèdent, que la surface qui termine la colonne déprimée dans le tube capillaire fût sensiblement un hémisphère convexe; or on sait que, dans le cas du mercure, cette surface est moins courbe d'après les observations de M. Bède⁴¹, sa hauteur n'est qu'environ la moitié du rayon du tube; d'où il suit que l'évaluation de la pression don-

⁴¹Mémoires de l'Acad. de Belgique, tome XXV des Mémoires couronnés et des Mémoires des savants étrangers.

née par notre formule serait trop petite à l'égard de semblables liquides. On pourra, du reste, la considérer comme une première approximation.

§ 117. Prenons pour mesure de la pression exercée par une bulle, la hauteur de la colonne d'eau à laquelle elle ferait équilibre. Alors, si ρ désigne la densité du liquide dont est formée la bulle, celle de l'eau étant 1, les hauteurs des colonnes d'eau et du liquide dont il s'agit qui feraient équilibre à la même pression seront entre elles dans le rapport inverse des densités, et conséquemment, si la hauteur de la seconde est $\frac{2h}{d}$, celle de la première sera $\frac{2h\rho}{d}$. Ainsi en désignant par p la pression exercée par une sphère laminaire sur l'air qu'elle emprisonne, nous obtenons en définitive :

$$p = \frac{2h\rho}{d},$$

ρ étant, comme nous l'avons vu, la densité du liquide qui constitue la lame, h la hauteur à laquelle ce liquide s'élève dans un tube capillaire de 1 mm de diamètre, et d le diamètre de la bulle.

Si, par exemple, la bulle est formée d'eau pure, on a $\rho = 1$, et, d'après les mesures prises par les physiiciens, on a, à fort peu près, $h = 30\text{mm}$; la formule ci-dessus donnera donc, dans ce cas, $p = \frac{60}{d}$. Si l'on pouvait former une bulle d'eau pure d'un décimètre, ou 100mm, de diamètre, la pression qu'elle exercerait serait conséquemment égale à 0mm,6, ou, en d'autres termes, ferait équilibre à la pression d'une colonne d'eau de 0mm,6 de hauteur; la pression qu'exercerait une bulle du même liquide d'un centimètre, ou 10mm, de diamètre, ferait équilibre à celle d'une colonne d'eau de 6mm.

Pour le mercure, on a $\rho = 13,59$, et, d'après le mémoire de M. Bède, à peu près $h = 10\text{mm}$; la formule donnerait donc, pour une bulle de mercure, $p = \frac{271,8}{d}$; mais, d'après la remarque qui termine le paragraphe précédent, cette valeur est trop faible, et ne peut être regardée que comme une première approximation. Elle nous apprend qu'à égalité de diamètre, la pression d'une bulle de mercure surpasserait quatre fois et demie celle d'une bulle d'eau pure.

Pour l'éther sulfurique, on a $\rho = 0,715$, et l'on conclut des mesures prises par Frankenheim⁴² à très-peu près $h = 10\text{mm},2$; d'où résulte $p = \frac{14,6}{d}$, et l'on voit qu'à égalité de diamètre, la pression d'une bulle d'éther sulfurique ne serait que le quart de celle d'une bulle d'eau pure.

§ 118. Déjà en 1830, un savant américain, le Dr Hough, avait essayé d'arriver à la mesure de la pression exercée soit sur une bulle d'air contenue dans un liquide indéfini, soit sur l'air renfermé dans une bulle de savon⁴³. Il se fait une idée assez juste de la cause de ces pressions, que, du reste, il ne distingue pas l'une de l'autre, et, pour les évaluer, il part, comme je l'ai fait, de la considération de la surface creuse qui termine une colonne du même liquide soulevée dans un tube capillaire; mais, bien qu'observateur ingénieux, il n'était pas au courant de la théorie de l'action capillaire; aussi parvient-il par un raisonnement dont l'erreur est palpable, à des valeurs et à une loi nécessairement fausses.

Dans la communication verbale dont j'ai parlé (§ 116), M. Henry a décrit des expériences au moyen desquelles il a cherché à mesurer la pression exercée sur l'air intérieur par une bulle de savon d'un diamètre donné. Voici essentiellement, d'après le compte rendu de cette communication, comment a opéré M. Henry: une bulle de savon était gonflée à l'extrémité de l'une des branches d'un tube de verre en U partiellement rempli d'eau; la différence de niveau dans les deux branches donnait alors la mesure de

⁴²Die Lehre von der Cohäsion. Breslau, 1835.

⁴³Inquiries into the principles of liquid attraction. (Journ. de Silliman, 1re série, vol. XVII, page 86).

la pression. Malheureusement le compte rendu, qui laisse d'ailleurs à désirer quant à la clarté, ne fait point connaître les nombres obtenus, et je ne pense pas que M. Henry les ait publiés ultérieurement.

Dans un travail présenté à la Société philomatique en 1856 et imprimé en 1859 dans les *Comptes rendus*, M. De Tesson avance⁴⁴ que si la vapeur qui forme les nuages et les brouillards était composée de vésicules, l'air enfermé dans une vésicule de 0mm,02 de diamètre y serait soumis, de la part de celle-ci, à une pressions équivalente à $\frac{1}{7}$ d'atmosphère.

M. De Tesson ne dit pas, dans ce travail, comment il a obtenu l'évaluation ci-dessus, mais il m'apprend, par une lettre dont il m'a honoré en 1869, qu'il a pris pour mesure de la pression dont il s'agit la hauteur à laquelle l'eau, serait soutenue dans un tube capillaire d'un diamètre intérieur égal à celui de la vésicule; il était donc parti de la même idée que moi, seulement on voit qu'il s'est trompé en ce sens qu'il n'a eu égard qu'à la surface intérieure delà pellicule liquide. En effet, d'après la formule du paragraphe précédent, la pression exercée sur l'air intérieur par une bulle d'eau de 0mm,02 de diamètre équivaldrait à celle d'une colonne d'eau de 3 mètres de hauteur, ce qui égale à peu près les $\frac{2}{7}$ de la pression atmosphérique; M. De Tesson n'a donc trouvé que la moitié de la valeur réelle.

Ainsi qu'on le verra au § 156, Sir W. Thomson a donné, dès 1858, en fonction d'un autre élément que la hauteur capillaire et la densité, une expression exacte de la pression d'une bulle sur l'air contenu.

Enfin, en 1866, M. Tait a calculé⁴⁵, au moyen du même élément, d'une part les pressions auxquelles seraient respectivement soumises, dans l'eau, des bulles d'air de diamètres déterminés très-petits, et, d'autre part, les pressions à l'intérieur des vésicules de vapeur d'eau de diamètres également déterminés.

§ 119. Après avoir obtenu l'expression générale de la pression exercée par une sphère laminaire sur l'air qu'elle emprisonne, il me restait à soumettre ma formule au contrôle de l'expérience. J'ai employé, pour cela, le procédé de M. Henry, c'est-à-dire que la pression a été mesurée directement par la hauteur delà colonne d'eau à laquelle elle faisait équilibre.

De notre formule, on déduit $pd = 2hp$; pour un même liquide et à une même température, le produit de la pression par le diamètre de la bulle doit donc être constant, puisque h et ρ le sont. C'est cette constance que j'ai d'abord cherché à vérifier pour des bulles de liquide glycérique de diamètres très-différents.

L'appareil dont j'ai fait usage est représenté fig. 52, en projection verticale. ab est la partie supérieure d'un support dont la hauteur totale est de 40 centimètres. Sur ce support est fixé un tube en cuivre cdf , à l'extrémité c duquel est mastiqué un tube recourbé en verre $cqhk$ destiné à servir de manomètre et dont le diamètre intérieur est d'un centimètre environ; la longueur q est de 20 centimètres. Le tubé de cuivre a , en l , un embranchement horizontal, qui n'a pu être dessiné dans la même figure parce qu'il est dirigé vers le spectateur, mais qu'on voit à part en lm (fig. 53); à l'extrémité m est mastiqué un tube en verre mn qui n'a qu'environ 2 millimètres de diamètre intérieur. Enfin à l'extrémité f du tube de cuivre (fig. 52) est soudé un ajutage en fer fp , évasé inférieurement en un petit entonnoir dont le bord a 5 millimètres de diamètre; cet entonnoir a été légèrement oxydé par de l'acide azotique affaibli (§ 110).

Pour employer cet appareil, on commence par introduire de l'eau distillée dans

⁴⁴ *Comptes rendus*, tome XLVIII, p. 1045.

⁴⁵ *Note on the compression of air in an air-bubble under water.* (Proceedings of the Royal Soc. of Edinburgh, vol. V, 1865-66, p. 563).

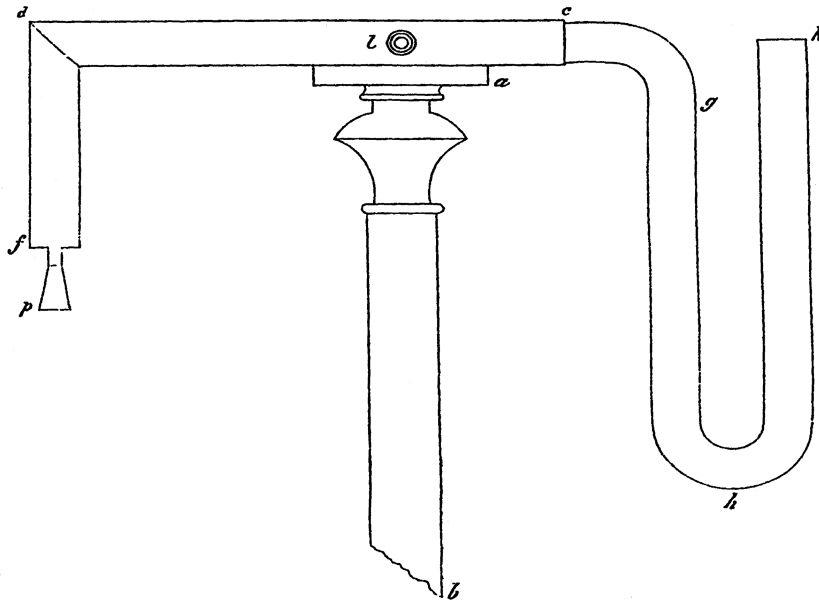


Fig. 52

le manomètre ghk en quantité suffisante pour occuper une hauteur de quelques centimètres dans les deux branches; puis on porte sous l'ajutage fp une capsule contenant le liquide destiné à former les bulles, on y fait plonger le bord p du petit entonnoir, et l'on abaisse la capsule; enfin, appliquant la bouche à l'orifice n du tube de verre de l'embranchement (fig. 53), on souffle avec ménagement. Une bulle apparaît au à l'ajutage; on lui donne, avec des précautions que j'indiquerai bientôt, le diamètre que l'on juge convenable,

et, dès qu'elle l'a atteint, on bouche soigneusement l'orifice avec une petite boule de cire. L'eau est alors un peu plus élevée dans la branche hk du manomètre (fig. 52) que dans la branche hg , par suite de la pression qu'exerce la bulle, et il ne reste plus qu'à mesurer la différence de niveau ci-dessus et le diamètre de la bulle. Pour la première de ces mesures, on se sert d'un cathétomètre à la manière ordinaire, et, pour la seconde, on couche le même instrument dans une position horizontale, en le plaçant sur des supports convenables.

§ 120. Ces expériences, fort simples en principe, offrent des difficultés notables d'exécution. En premier lieu, l'air qu'on insuffle dans l'appareil est plus chaud que l'air ambiant, de sorte que la bulle, après sa formation, se contracte un peu par le refroidissement graduel de l'air contenu dans son intérieur et dans les tubes de l'instrument; il faut donc attendre quelque temps avant de procéder à la mesure du diamètre.

En second lieu, les bulles de grand diamètre n'exerçant qu'une pression très—faible,

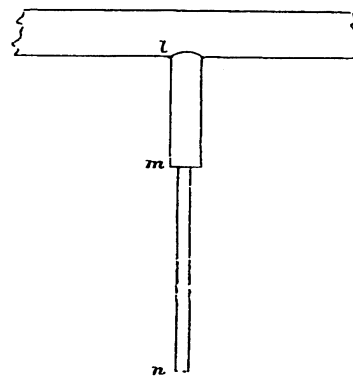


Fig. 53

une petite erreur dans la mesure de celle-ci a une influence considérable sur le produit pd ; il faut donc, si l'on veut que les résultats n'oscillent pas trop autour de la véritable valeur, s'arrêter à une certaine limite de diamètre.

En troisième lieu, les bulles très-petites ont aussi leurs inconvénients: pour les amener au diamètre voulu, et pour obvier, en même temps, à la contraction par le refroidissement, on les gonfle d'abord beaucoup au-delà de la grosseur qu'elles doivent avoir, et on les laisse ensuite diminuer spontanément par l'expulsion d'une partie de l'air qu'elles contiennent; or, quand cette diminution est arrivée à un certain degré, elle devient très-rapide, et il faut beaucoup d'adresse pour appliquer la boule de cire à l'instant précisément convenable. En outre, dans mes expériences, ces petites bulles ont paru persister moins longtemps que les grosses; elles éclataient fréquemment avant qu'on pût achever les mesures.

Enfin, bien que le manomètre de mon instrument ait un centimètre de diamètre intérieur, l'équilibre ne s'y établit que très lentement, et l'on commettrait de grandes erreurs si l'on n'avait égard à cette circonstance.

Remarquons encore que, lorsqu'on vient de former une bulle, il y a en général, au bas de celle-ci, une goutte suspendue, goutte dont le poids allonge un peu la bulle dans le sens vertical. Pour se débarrasser, sans faire éclater la lame, de cette petite masse additionnelle, on amène doucement en contact avec elle l'un des angles d'un morceau de papier à filtre; la goutte est alors partiellement absorbée, et l'on répète la même opération avec d'autres angles du même papier, jusqu'à ce que l'excès de liquide ait entièrement ou sensiblement disparu.

Ajoutons une dernière remarque. Lorsqu'on veut former une bulle, si l'on plongeait dans le liquide tout l'entonnoir de l'ajutage, le liquide monterait, par l'action capillaire, dans l'intérieur du tube étroit qui surmonte cet entonnoir, et ne serait qu'en partie expulsé par le souffle, de sorte qu'après le gonflement de la bulle, il pourrait se rassembler en petite masse à la partie inférieure du tube dont il s'agit, et interrompre ainsi la communication entre la bulle et le manomètre. Pour éviter cet inconvénient, on commence par mouiller de liquide glycérique toute la surface extérieure du petit entonnoir, puis on se borne à plonger le bord extrême de celui-ci.

Voici maintenant comment on a procédé. Pour les plus grands diamètres du tableau du paragraphe suivant, on gonflait d'abord la bulle jusqu'à 6 centimètres environ, on appliquait la boule de cire, puis on attendait cinq minutes, après quoi l'on ouvrait de nouveau le tube d'insufflation, on laissait diminuer la bulle jusqu'à ce qu'elle parût avoir le diamètre voulu, et on l'arrêtait alors au moyen de la cire. Pour tous les diamètres moindres, on commençait par gonfler la bulle jusqu'à 4 centimètres à peu près, et, après avoir appliqué la cire, on attendait dix minutes avant de laisser s'effectuer la diminution. Des essais préalables avaient montré qu'avec ces précautions, le diamètre demeurait ensuite invariable. La bulle sur laquelle on se proposait d'opérer ayant ainsi atteint la dimension, désirée, on enlevait la goutte suspendue à sa partie inférieure, on inclinait l'instrument à droite et à gauche afin de bien mouiller les deux branches du manomètre un peu au-dessus des deux niveaux, et l'on mesurait le diamètre. On attendait alors que dix minutes au moins se fussent écoulées depuis que l'instrument était en repos, afin de laisser à l'équilibre du manomètre un certain temps pour s'établir, puis on mesurait la pression, et, cinq minutes après, on la mesurait encore. Si les résultats de ces deux mesures n'étaient pas exactement les mêmes, on prenait une troisième mesure après un nouvel intervalle de cinq minutes, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on obtînt deux résultats successifs identiques ou que la différence fût en sens contraire des précédentes; dans le premier cas, les deux derniers résultats étaient considérés comme

donnant la valeur de la pression; dans le second, leur différence devant être attribuée à une petite erreur d'observation, on prenait, pour valeur de la pression, la moyenne de ces deux mêmes résultats.

§ 121. Le tableau suivant renferme les résultats de ces expériences; je les ai rangés non dans l'ordre où ils ont été obtenus, mais dans l'ordre croissant des diamètres, et je les ai distribués en groupes de diamètres analogues. Pendant la durée des opérations, la température a varié de $18^{\circ},5$ à 20° .

DIAMÈTRES, OU VALEURS DE d .	PRESSIONS, OU VALEURS DE p .	PRODUITS, OU VALEURS DE pd
7mm,55	3mm,00	22,65
10,37	2,17	22,50
10,55	2,13	22,47
23,35	0,98	22,88
26,44	0,83	21,94
27,58	0,83	22,89
46,60	0,48	22,37
47,47	0,48	22,78
47,85	0,43	20,57
48,10	0,55	26,45

La moyenne générale des produits est 22,75, et l'on voit que, sauf dans les deux derniers, les écarts d'avec cette moyenne générale sont partout peu notables; on voit, en outre, qu'ils sont irrégulièrement distribués. Comme d'ailleurs le premier diamètre est à ceux du dernier groupe à peu près comme 1 à 6, ces résultats suffisent, je pense, pour établir nettement la constance du produit pd , et, par suite, pour vérifier la loi d'après laquelle la pression est en raison inverse du diamètre. On verra plus loin (§§175 et 179) une autre vérification de cette même loi.

Je dois dire ici que, dans les mesures relatives à la plus petite bulle, c'est à celle de 7mm,55 de diamètre, j'ai été contraint de faire une légère exception à la marche indiquée à la fin du paragraphe précédent: la seconde mesure de la pression excédait la première de 0mm,02; on se proposait donc de prendre une troisième mesure après un nouvel intervalle de cinq minutes; mais, pendant ce temps, la bulle a crevé. On a essayé plusieurs fois, de renouveler l'expérience, et toujours l'une ou l'autre des circonstances que j'ai signalées à l'égard des très petites bulles a empêché la réussite. Comme la différence 0mm,02 était si minime qu'elle pouvait être attribuée à une erreur d'observation, comme d'ailleurs, par suite de cette petitesse, il était extrêmement peu probable qu'un nouvel excès se fût montré dans une troisième mesure, comme enfin, avec un diamètre de cet ordre, de si faibles différences n'ont d'influence que sur la partie décimale du produit, j'ai cru pouvoir considérer la seconde mesure comme donnant la valeur de la pression, et conserver le résultat de l'expérience.

Quant à la moyenne générale 22,75 des résultats du tableau, sa partie décimale est nécessairement un peu trop forte, à cause de la valeur excessive 26,45 du dernier produit. Comme ce produit et celui qui le précède sont les seuls qui s'écartent notablement de 22 dans leur partie entière, on admettra, je pense, qu'on approchera davantage de la valeur véritable en négligeant ces deux produits et prenant la moyenne des autres, moyenne qui est 22,56; nous adopterons ce dernier nombre pour valeur du produit pd à l'égard du liquide glycérique.

§ 122. Restait à vérifier si cette valeur satisfait à notre formule, d'après laquelle on a $pd = 2hp$, les quantités p et h étant respectivement, comme on l'a vu, la densité du liquide et la hauteur qu'atteindrait, ce même liquide dans un tube capillaire d'un

millimètre de diamètre. Pour cela, il fallait donc chercher les valeurs de ces deux quantités à l'égard du liquide glycérique.

La densité a été déterminée au moyen de l'aréomètre de Fahrenheit, à la température de 17°, température peu inférieure à celles des expériences précédentes, et l'on a trouvé ainsi

$$\rho = 1,1065.$$

Pour déterminer la hauteur capillaire, on a employé le procédé de Gay-Lussac, c'est-à-dire la mesure au cathétomètre, en prenant toutes les précautions connues pour assurer l'exactitude du résultat. L'expérience a été faite à la température de 19°. Je m'étais procuré un tube capillaire dont le diamètre intérieur n'était que d'une fraction de millimètre, on verra bientôt pourquoi. On a tracé d'abord à la lime un petit trait sur ce tube, à trois centimètres et demi environ de l'une de ses extrémités, distance que l'on savait, par une essai préalable fait sur un autre fragment du même tube, être un peu supérieure à la hauteur de la colonne capillaire soulevée; ensuite on a mouillé parfaitement le tube à l'intérieur en le plongeant à plusieurs reprises jusqu'au fond du vase contenant le liquide glycérique, et le secouant chaque fois qu'on l'avait retiré; enfin, après l'avoir essuyé extérieurement, on l'a mis en place, en l'enfonçant dans le liquide jusqu'à ce que l'extrémité de la colonne soulevée parût s'arrêter très-près de la marque, et l'on a abaissé la pointe d'acier pour lui faire affleurer le liquide extérieur. Alors on a amené le fil horizontal de la lunette du cathétomètre en contact avec l'image du point le plus bas du ménisque concave, et l'on a observé de cinq en cinq minutes, en rétablissant chaque fois le contact, jusqu'à ce que le point en question parût stationnaire; on a attendu encore, et l'on n'a effectué la mesure qu'après avoir constaté pendant une demi-heure entière l'immobilité parfaite du sommet de la colonne. Les mouvements avaient été très-petits, de sorte que la colonne se terminait encore près de la marque. La lecture au cathétomètre a donné, pour la distance du point le plus bas du ménisque concave au niveau extérieur, 27mm,35.

Cette mesure prise, on a enlevé le tube, on l'a coupé à la marque, et l'on a procédé à la mesure du diamètre intérieur en ce point, au moyen d'un microscope muni d'un micromètre donnant directement les centièmes de millimètre. On a reconnu que la section intérieure du tube était légèrement elliptique; le plus grand de ses diamètres a été trouvé de 0mm,374 et le plus petit de 0mm,357; on a pris la moyenne, savoir 0mm,3655 pour représenter le diamètre intérieur du tube supposé cylindrique.

Pour avoir la vraie hauteur de la colonne capillaire, il faut, comme on sait, ajouter à la hauteur du point le plus bas du ménisque le sixième du diamètre du tube, ou, dans le cas actuel, 0mm,06; la vraie hauteur de notre colonne était conséquemment 27mm,41.

Maintenant, pour obtenir la hauteur h , à laquelle le même liquide s'élèverait dans un tube ayant exactement un millimètre de diamètre intérieur, il suffit, en vertu de la loi connue, de multiplier la hauteur ci-dessus par le diamètre du tube, et l'on trouve ainsi, en définitive,

$$h = 10mm,018.$$

C'est ici le lieu de dire par quelle raison j'ai choisi, pour l'expérience, un tube dont le diamètre intérieur fût notablement moindre qu'un millimètre. Le raisonnement par lequel je suis arrivé (§ 116) à la formule, suppose que la surface qui termine la colonne capillaire est hémisphérique; or cela n'est jamais rigoureusement vrai, mais dans un tube aussi étroit que celui dont je me suis servi, la différence est nécessairement tout à fait insensible, de sorte qu'en calculant ensuite, par la loi de la raison inverse de l'élévation au diamètre, la hauteur pour un tube d'un millimètre de diamètre, on devait

avoir cette dernière hauteur telle qu'elle serait si la sur face supérieure était exactement hémisphérique.

Les valeurs de ρ et de h étant ainsi déterminées, on en tire

$$2hp = 22,17$$

nombre qui diffère bien peu de 22,56, obtenu dans le paragraphe précédent comme valeur du produit pd . La formule $pd = 2hp$ peut donc être regardée comme vérifiée par l'expérience, et la vérification paraîtra plus complète encore si l'on considère que les deux résultats sont respectivement déduits d'éléments tout à fait différents.

§ 123. Abordons actuellement la seconde des questions annoncées au commencement du § 116; celle-ci a pour objet la recherche d'une limite très-petite au-dessous de laquelle se trouve, au moins dans le liquide glycérique, la valeur du rayon d'activité sensible de l'attraction moléculaire.

L'idée d'une évaluation approximative de ce rayon a été émise pour la première fois, je pense, en 1841, par de Maistre⁴⁶. En suspendant des gouttes d'eau à l'extrémité inférieure de baguettes de verre verticales, il trouve que la goutte a le plus grand volume quand le diamètre de la baguette est de 2 1/2 lignes, et que la goutte est hémisphérique. Admettant alors qu'une molécule d'eau en contact avec la surface du verre soutient toutes les molécules situées verticalement au-dessous d'elle, il en conclut que, dans l'eau, l'attraction moléculaire s'étend au moins 3 la distance de 1 1/4 ligne. Je n'ai pas besoin d'insister sur l'erreur de cette déduction.

Exposons maintenant les résultats de nos propres recherches: l'exactitude de la formule $p = \frac{2hp}{d}$ suppose, comme nous allons le montrer, que la lame qui constitue la bulle n'a pas, en tous ses points, des épaisseurs moindres que le double du rayon d'activité sensible de l'attraction moléculaire.

On a vu (§ 116) que la pression exercée par une bulle sur l'air qu'elle emprisonne est la somme des actions dues séparément aux courbures de ses deux faces. D'autre part, on sait que, dans le cas d'une masse liquide pleine, la pression capillaire exercée par le liquide sur lui-même émane de tous les points d'une couche superficielle ayant pour épaisseur le rayon d'activité en question. Maintenant, si l'épaisseur de la lame qui constitue une bulle est partout supérieure ou égale au double de ce rayon, chacune des deux faces de la lame aura sa couche superficielle non altérée, et la pression exercée sur l'air contenu aura la valeur qu'indique notre formule. Mais si, en tous ses points, la lame a des épaisseurs inférieures au double de ce même rayon, les deux couches superficielles n'ont plus leur épaisseur complète, et le nombre des molécules comprises dans chacune d'elles étant ainsi amoindri, ces deux couches doivent nécessairement exercer des actions moins fortes, et conséquemment la somme de celles-ci, c'est-à-dire la pression sur l'air intérieur, doit être plus petite que ne l'indique la formule.

Il suit de là que si, dans les expériences des §§120 et 121, l'épaisseur des lames qui formaient les bulles était descendue, dans toute l'étendue de ces dernières, au-dessous de la limite dont il s'agit, les résultats auraient été trop faibles; mais, dans ce cas, on aurait remarqué des diminutions progressives et continues dans les pressions, ce qui n'est jamais arrivé, bien que les couleurs des bulles accusassent une grande ténuité. Tous les physiciens admettent, du reste, que le rayon d'activité sensible de l'attraction moléculaire est excessivement minime.

Mais ce qui précède permet d'aller plus loin, et de déduire de l'expérience une donnée sur la valeur, du rayon d'activité sensible, au moins dans le liquide glycérique.

⁴⁶ Notice sur la cause qui fait surnager une aiguille d'acier sur la surface de l'eau (Bibi Univ, nouv. série, t. XXXV, p 192).

Après que la lame a acquis une minceur uniforme (§ 108), sauf, bien entendu, à la partie tout à fait inférieure, où il y a toujours une petite accumulation de liquide, si la pression exercée sur l'air intérieur éprouvait une diminution, celle-ci serait accusée par le manomètre, et on la verrait progresser d'une manière continue au fur et à mesure de l'atténuation ultérieure de la lame. Dans ce cas, l'épaisseur qu'avait la lame quand la diminution de pression a commencé, se déterminerait, au moyen de la teinte que présentait en ce moment l'espace central (ibid.), et la moitié de cette épaisseur serait la valeur du rayon d'activité sensible de l'attraction moléculaire. Si, au contraire, la pression demeure constante jusqu'à la disparition de la bulle, on conclura de la teinte de l'espace central l'épaisseur finale de la lame, et la moitié de cette épaisseur constituera, du moins, une limite très au—dessous de laquelle se trouve le rayon dont il s'agit.

§ 124. J'ai fait, dans ce sens, un grand nombre d'expériences, dont je vais rendre compte. On donnait d'abord à la bulle un diamètre d'environ quatre centimètres, on la laissait ensuite diminuer jusqu'à deux centimètres à peu près, et quelquefois jusqu'à un centimètre, puis on appliquait la boule de cire; alors, dans les premières expériences, on enlevait la goutte, et l'on introduisait l'ajutage avec la bulle dans l'intérieur d'un petit bocal dont on fermait simplement l'orifice avec un disque de carton traversé en son milieu par le tube; enfin on établissait le contact du fil horizontal de la lunette du cathétomètre avec le sommet de l'image de la surface de l'eau dans l'une des branches du manomètre, et comme l'équilibre n'avait pas lieu immédiatement (§ 120), on rétablissait de temps à autre le contact, jusqu'à ce qu'il devînt stationnaire.

Huit bulles observées dans ces circonstances ont pu être suivies jusqu'à leur disparition. Sept d'entre elles ont éclaté avant d'avoir dépassé les premières couleurs du deuxième ordre; une seule a paru atteindre l'indigo de ce même ordre, mais il y a quelque incertitude à cet égard. La plus grande persistance a été de 14 heures.

Quant au contact du fil de la lunette avec l'image de la surface de l'eau, il n'a jamais, à une seule exception près, varié dans le sens d'une diminution de pression; mais, chose singulière, il a quelquefois varié de petites quantités dans le sens opposé. Pour l'une des bulles, on s'est assuré, par des mesures prises avant et après ces variations, que la pression avait réellement augmenté quelque peu. Lorsqu'une semblable variation se produisait, c'était avec une certaine rapidité, et le manomètre demeurait ensuite stationnaire, soit jusqu'à la disparition de la bulle, soit jusqu'à une nouvelle variation de même sens.

Ces variations ne sont pas dues à des changements dans la température, car celle de la chambre était bien constante; elle ne proviennent pas non plus d'une application imparfaite de la cire, car, dans ce cas, l'augmentation de pression serait continue et accélérée.

§ 125. Ces expériences auraient déjà pu me fournir un résultat; mais j'ai cherché à faire en sorte que les couleurs des bulles allassent plus loin. Conduit à soupçonner qu'une petite action chimique entre le fer de l'ajutage et le liquide altérerait un peu la constitution de ce dernier dans le voisinage de l'orifice, j'ai fait adapter à celui-ci, avec de la cire à cacheter, un bout de tube de verre de même diamètre extérieur, et à parois assez minces, et l'on a gonflé une bulle à l'extrémité libre de ce tube, bulle que l'on a introduite comme précédemment dans le petit bocal. Alors les couleurs ont marché jusque dans le troisième ordre, après quoi elles ont peu à peu rétrogradé (§ 108); la bulle a persisté 24 heures. Pour empêcher (§ 109) la rétrogradation des teintes, on a placé au fond du bocal quelques morceaux de potasse caustique, et, par l'application de petits bourrelets de saindoux autour des joints, on a fait en sorte qu'après l'introduction de la bulle, le bocal fût hermétiquement fermé.

De plus, comme le peu de liquide qui s'accumule toujours par degrés au bas de la bulle, doit contribuer par son poids à faire éclater celle-ci, on avait cette fois attendu dix minutes avant d'enlever la goutte; la lame était donc déjà plus mince quand on l'a introduite dans le bocal, et l'accumulation résultant de la descente ultérieure du liquide devait être beaucoup moindre. Or, dans ces conditions, la diminution d'épaisseur de la lame a été continue, la bulle a persisté près de trois jours, et, lorsqu'elle a éclaté, elle était parvenue au passage du jaune au blanc du premier ordre; elle présentait alors un espace central jaune pâle, entouré d'un anneau blanc. Le niveau de l'eau dans la branche observée du manomètre a éprouvé de petites oscillations, tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre, mais dont la dernière était dans le sens d'une augmentation de pression. Bien que, pendant la longue durée de cette bulle, la température de la chambre ait nécessairement subi de petits changements, les oscillations ci-dessus ne peuvent leur être entièrement attribuées, car, si cela était, on aurait dû voir, après chacune des trois nuits, un mouvement du manomètre dans le sens d'une augmentation de pression; or on a observé le contraire après les deux premières nuits; ce n'est qu'après la troisième qu'il y a eu mouvement dans ce sens.

Il résulte de la marche de ces mêmes mouvements que si la pression a varié, c'est d'une manière irrégulière, dans les deux sens, et pour aboutir, non, à une diminution, mais à une augmentation au moins relative; on peut donc admettre, je pense, que l'épaisseur finale de la lame était encore supérieure au double du rayon d'activité sensible de l'attraction moléculaire⁴⁷.

§ 126. Voyons actuellement ce que l'on déduit de cette dernière expérience. D'après le tableau donné par Newton, l'épaisseur d'une lame d'eau pure qui réfléchit le jaune du premier ordre est, en millionnièmes de pouce anglais, $5 \frac{1}{3}$, ou 5,333, et, pour le blanc du même ordre, $3 \frac{7}{8}$, ou 3,875. On peut donc prendre la moyenne, savoir 4,604, comme valeur très approchée de l'épaisseur correspondante, toujours dans le cas de l'eau pure, au passage entre ces deux couleurs; et, le pouce anglais étant égal à 25mm,4, cette épaisseur équivaut à $\frac{1}{8554}$ de millimètre. Cela posé, on sait que, pour, deux substances différentes, les épaisseurs de lames qui réfléchissent la même teinte sont entre elles en raison inverse des indices de réfraction de ces substances. Pour avoir l'épaisseur réelle de notre lame de liquide glycérique, il suffit donc de multiplier le dénominateur de la fraction précédente par le rapport de l'indice du liquide glycérique à celui de l'eau. J'ai mesuré approximativement le premier au moyen d'un prisme creux à liquides, et je l'ai trouvé égal à 1,377. Celui de l'eau étant 1,336, on obtient enfin, pour l'épaisseur de la lame glycérique, $\frac{1}{8811}$ de millimètre. La moitié de cette quantité, ou $\frac{1}{17622}$ de millimètre, constitue donc la limite fournie par l'expérience en question; mais, pour nous placer plutôt au delà, nous adopterons $\frac{1}{17000}$.

Nous arrivons ainsi à cette conclusion très-probable que, dans le liquide glycérique, le rayon d'activité sensible de l'attraction moléculaire est moindre que $\frac{1}{17000}$ de millimètre.

§ 127. Toute la recherche précédente est extraite de ma 5me Série, publiée en 1861. De son côté, Dupré est arrivé, en 1866, dans le § 173 de son 5 Mémoire *Sur la théorie mécanique de la chaleur*⁴⁸, par une route absolument différente, à la conclusion que,

⁴⁷ J'ai dit que le bocal dans lequel on a introduit la bulle était petit, et qu'on avait fermé hermétiquement les joints. Cela pourrait paraître en contradiction avec ce que j'ai avancé dans le § 106, savoir que, pour atteindre le maximum de persistance, il faut employer un vase de dimensions considérables par rapport à la bulle, et ne pas en dessécher complètement l'atmosphère intérieure. C'est que, dans l'expérience actuelle, il s'agissait d'obtenir, non la plus grande persistance, mais bien la plus grande atténuation de la lame, ce qui exigeait qu'on empêchât, autant que possible, toute absorption de vapeur aqueuse par cette lame.

⁴⁸ *Ann. de Chim. et de Phys.* de Paris, 4me série, Tome VII.

dans l'eau, le rayon de l'attraction moléculaire est de beaucoup supérieur à $1/5000000$ de millimètre; en outre, dans un ouvrage sur le même sujet, ouvrage qui a paru en 1869 et dont je parlerai plus loin (§ 164), Dupré est conduit à admettre qu'à partir d'une épaisseur égale au double du rayon dont il s'agit jusqu'à une épaisseur égale à ce rayon lui-même, la pression qu'une bulle exerce sur l'air intérieur varie extrêmement peu, d'où il suivrait que j'aurais dû prendre, pour ma limite supérieure, non la moitié de l'épaisseur de la lame, mais cette épaisseur entière; d'après cela, Dupré adopte, comme limite supérieure, $1/9000$ de millimètre.

Mais, en 1869 aussi, M. Quincke a publié une Note⁴⁹ où il expose une méthode extrêmement ingénieuse au moyen de laquelle il parvient, non à une limite supérieure ou inférieure, mais à une valeur approchée du rayon en question : il la trouve égale à environ $0\text{mm},000050 = 1/200000$ de millimètre.

Voici essentiellement en quoi consiste sa méthode : quand un liquide s'appuie contre une paroi verticale solide qu'il ne mouille pas, il aboutit à cette paroi sous un angle qui, on le sait, dépend à la fois de la nature du solide et de celle du liquide. D'après cela, imaginons, appliquée sur une portion de l'une des faces d'une plaqué de verre verticale une couche cunéiforme, comme le dit l'auteur, d'une autre substance solide, l'arête du coin étant verticale, et l'épaisseur, excessivement petite à cette arête, augmentant par degrés insensibles à partir de là. Si alors un liquide s'appuie contre la plaque, de façon qu'une partie de son bord aboutisse au verre et une autre partie à la couche cunéiforme, l'angle de contact de cette seconde partie variera depuis l'arête jusqu'à une certaine distance, car, au voisinage de cette arête, l'action moléculaire mutuelle du verre et du liquide se fera encore sentir; mais, au delà de la distance où l'épaisseur de la couche est égale au rayon de cette action mutuelle, l'angle de contact se montrera constant, ne dépendant plus que de l'action mutuelle du liquide et de la substance qui forme la couche.

Or M. Quincke a réussi à obtenir, sur le verre, de ces couches cunéiformes de différentes substances, et à déterminer, dans chaque cas, l'épaisseur qui remplit la condition indiquée. Avec une couche d'argent métallique et le liquide étant de l'eau, il a trouvé, en désignant par l l'épaisseur en question, $l > 0\text{mm},000054$; avec une couche de sulfure d'argent et en substituant le mercure à l'eau, l'expérience lui a donné $l = 0\text{mm},000048$; avec le mercure et une couche d'iodure d'argent, $l = 0\text{mm},000059$; avec le mercure et une couche de collodion, $l < 0\text{mm},000080$. M. Quincke conclut de ses expériences qu'on peut adopter, en moyenne, $l = 0\text{mm},000050$.

Il paraît donc résulter de ces mêmes expériences: en premier lieu, que le rayon d'activité sensible de l'attraction moléculaire ne varie pas beaucoup avec les différentes substances, et qu'on peut adopter, pour sa valeur moyenne approximative, de $1/20000$ millimètre; en second lieu, que la limite supérieure trouvée par moi, savoir de $1/17000$ millimètre, est très-voisine de la vraie valeur; en troisième lieu enfin, que, dans mes expériences, contrairement à ce que pensait Dupré, c'était bien la moitié de l'épaisseur de la lame qu'il fallait prendre.

Avertissons, en passant, que, dans cette Note, M. Quincke m'attribue une opinion que je n'ai point manifestée : il me fait dire que, selon moi, une lame liquide ne peut plus subsister quand son épaisseur devient inférieure au double du rayon de l'attraction moléculaire; on peut voir, par le contenu des paragraphes qui précèdent, qu'une idée de ce genre ne s'est pas présentée à moi. Du reste, cette idée, qui appartient en réalité à M. Quincke, doit être vraie en thèse générale; j'y reviendrai plus loin (§ 165).

⁴⁹ *Ueber die Entfernung in welcher die Molecularkräfte der Capillarität noch wirksam sind.* (Ann. de M. Poggendorff, vol. CXXXVII, p. 402)

CHAPITRE IV.

Figures d'équilibre qui ne sont pas de révolution. Principe général concernant la réalisation des surfaces à courbure moyenne nulle. Résultats des géomètres, et vérifications expérimentales.

§ 128. Arrivons aux figures d'équilibre qui ne sont pas de révolution; et d'abord énonçons un principe général qui permet de réaliser, à l'état laminaire, toute surface à courbure moyenne nulle dont on a soit l'équation en coordonnées finies, soit la génération géométrique.

Une surface à courbure moyenne nulle étant donnée, concevez-y tracé un contour fermé quelconque, astreint aux seules conditions 1° qu'il circonscrive une portion finie de la surface, et 2° que cette portion n'excède pas la limite de stabilité, si la surface donnée a de telles limites; ployez un fil de fer de manière qu'il figure exactement le contour fermé en question; oxydez-le légèrement par de l'acide azotique affaibli; plongez-le entièrement dans le liquide glycérique, et retirez-le; vous le trouverez occupé par une lame représentant la portion de surface dont il s'agit.

En effet, la lame qui s'est développée dans le contour solide, et qui remplit nécessairement celui-ci, a ses deux faces dans l'air libre; elle doit donc (§ 97) se façonner de manière à représenter une portion finie de surface à courbure moyenne nulle passant par le contour en question, c'est-à-dire, conséquemment, une portion, de la surface donnée. On réalise ainsi, comme par enchantement, des surfaces qui, pour la plupart, sont fort remarquables; nous en verrons bientôt des exemples.

Dans l'énoncé du principe ci-dessus, j'ai assigné, comme première condition du contour fermé, qu'il soit de nature à comprendre dans son intérieur une portion finie de la surface donnée; c'est qu'en effet, on peut concevoir des contours fermés qui ne satisfont pas à cette condition : si, par exemple, on choisissait, comme contour fermé tracé sur un caténoïde, la section par un plan perpendiculaire à l'axe, il est clair que ce contour ne circonscrirait aucune portion finie de la surface, celle-ci s'étendant indéfiniment de part et d'autre de ce même contour.

Quant à la seconde condition, elle est évidente si la surface donnée a, par rapport au genre de contour qu'on adopté, une limite de stabilité, et si cette limite est dépassée par la portion circonscrite, il est clair que la réalisation de celle-ci sera impossible, et que la lame développée représentera un portion d'une surface différente. Dans ce cas, il y a conséquemment deux surfaces distinctes satisfaisant l'une et l'autre aux conditions d'être à courbure moyenne nulle, de passer par le contour fermé, et d'avoir une portion finie circonscrite par ce contour; mais pour l'une seulement la portion finie est stable, et c'est elle qui se réalise. Nous verrons aussi un exemple remarquable du cas dont il s'agit.

§ 129. Meusnier avait signalé⁵⁰ comme surface telle qu'en chaque point les deux rayons de courbure principaux soient égaux entre eux et de signes contraires, ou, ce qui revient au même, comme surface à courbure moyenne nulle, l'hélicoïde gauche à plan directeur, c'est-à-dire l'hélicoïde engendré par une droite qui glisse d'un mouvement uniforme le long d'une autre droite à laquelle elle est perpendiculaire, tandis qu'elle tourne, d'un mouvement également uniforme, autour de cette même droite.

En 1842, M. Catalan⁵¹ a démontré que, parmi les surfaces réglées; le plan et l'hélicoïde ci-dessus sont les seules dont la courbure moyenne est nulle.

⁵⁰ *Mémoire sur la courbure des surfaces* (MEM. DE L'ACAD DES SCIENCES DE PARIS, savants étrangers, 1785, P. 477).

⁵¹ *Sur les surfaces réglées dont l'aire est un minimum* (Journ. DE M. LIOUVILLE, t. VII, p. 203.)

En 1859, M. Lamarle a repris la question sous un point de vue plus étendu, au moyen de ses méthodes géométriques⁵² il a cherché d'une manière générale quelles sont les surfaces réglées dont la courbure moyenne est constante; il retrouve ainsi, pour le cas de la courbure moyenne nulle, le résultat de M. Catalan, et il fait voir que, dans le cas d'une courbure moyenne finie et constante, il n'y a qu'une seule, surface réglée, savoir le cylindre de révolution.

§ 130. J'ai réalisé, à l'état laminaire, l'hélicoïde gauche à plan directeur. La charpente solide employée dans cette expérience est représentée en projection verticale par la fig. 54: elle se compose d'un fil de fer droit servant, d'axe, autour duquel circule un autre fil de fer courbé en hélice régulière; ce dernier fil est replié à chacune de ses extrémités de manière à aboutir à l'axe par une portion rectiligne et perpendiculaire à ce même axe; ces prolongements rectilignes, qui représentent les deux positions extrêmes de la droite génératrice, sont soudés à l'axe, et maintiennent ainsi l'hélice. Les fils de fer ont environ un millimètre d'épaisseur, le diamètre de l'hélice est de 10 centimètre et la distance d'une spire à la suivante de 6 centimètres; enfin il y a deux spires complètes. Ajoutons que tout l'ensemble a été oxydé par l'acide azotique affaibli (§ 110).

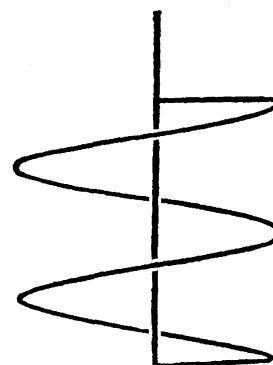


Fig. 54

Quand, après avoir plongé cette charpente dans le liquide glycérique et l'y avoir laissée pendant quelques secondes, on l'en retire, on la trouve occupée par une belle lame s'étendant partout de l'axe aux spires, et constituant d'une manière parfaite l'hélicoïde gauche en question.

En effet, l'ensemble formé par l'hélice en fil de fer, les deux parties qui la rattachent à l'axe, et la portion de celui-ci comprise entre ces deux droites, constitue un contour fermé qu'on peut évidemment concevoir tracé tout entier sur un hélicoïde gauche à plan directeur, et qui en comprendrait dans son intérieur une portion finie; or la lame forcée, d'une part, d'adhérer à tout ce contour, et, d'autre part, de se façonner en surface à courbure moyenne nulle, doit nécessairement prendre la figure qui satisfait à ces deux conditions, c'est-à-dire celle de l'hélicoïde dont il s'agit.

Cette expérience est, on le voit, une première application du principe général du § 128.

§ 131. M Lamarle, considérant d'une manière générale les hélicoïdes engendrés par une courbe plane qui se meut uniformément le long d'une droite fixe située dans son plan, tandis qu'elle tourne, d'un mouvement uniforme aussi, autour de cette même droite, a cherché⁵³ quels étaient ceux qui pouvaient satisfaire à la condition d'une courbure moyenne constante, et il a trouvé ainsi, outre l'hélicoïde gauche à plan directeur, quatre autres surfaces. Ces cinq hélicoïdes correspondent respectivement à cinq des figures d'équilibre de révolution, savoir au plan, à la sphère, à l'onduloïde, au caténoïde et au nodoïde. Quant à celui qui correspond au cylindre, c'est le cylindre lui-même.

L'équation différentielle des courbes génératrices de ces hélicoïdes s'intègre par les moyens ordinaires dans les cas correspondants au plan et au caténoïde ; dans ce

⁵²*Théorie géométrique des centres et axes instantanés de rotation* (BULLET. DE L'ACAD. DE BELGIQUE 2me série, t. VI, p. 412).

⁵³*Sur une classe particulière de surfaces à aire minima* (BULLET. DE L'ACAD. DE BELGIQUE, 1859, 2me série, t. VI, p. 329).

dernier, elle donne une surface déjà connue; et dont nous reparlerons. Dans les autres cas, l'équation s'intègre par les fonctions elliptiques.

Chacune des lignes méridiennes des figures d'équilibre de révolution, à l'exception de celles, du plan et du cylindre, passe à la courbe génératrice de l'hélicoïde correspondant, en s'étendant simplement dans la direction de l'axe suivant une certaine loi, et en conservant les distances de ses différents points à cet axe. D'après ce résultat, la demi-circconférence qui constitue la ligne méridienne de la sphère devient une courbe plus allongée, dont le sommet est distant de l'axe d'une quantité égale au rayon de la demi-circconférence en question; la ligne méridienne de l'onduloïde se change en une autre courbe ondulée, qui s'approche et s'éloigne autant de l'axe, mais dont les ondulations sont plus longues; etc. La ligne méridienne du plan étant une droite perpendiculaire à l'axe, ne peut subir de modifications dans le sens de celui-ci, elle reste telle qu'elle est, et engendre l'hélicoïde gauche à plan directeur; enfin la ligne méridienne du cylindre ne peut non plus se modifier, et elle engendre, comme hélicoïde, ce même cylindre.

Ajoutons que la solution de M. Lamarle comprend nécessairement les figures de révolution, celles-ci étant ce que deviennent les hélicoïdes dont il s'agit quand la vitesse de translation de la courbe génératrice est nulle.

§ 132. La courbe génératrice de l'hélicoïde dérivé de la sphère, courbe pour laquelle M. Lamarle a trouvé une construction assez simple, aboutit à l'axe sous des angles aigus; il faut donc, pour la continuité, la concevoir se prolongeant de l'autre côté de l'axe par des arcs symétriques au précédent, puis repassant du premier côté, et ainsi de suite, en formant une ligne ondulée indéfinie, symétriquement coupée par l'axe dans toute son étendue. Dans un cas particulier calculé par M. Lamarle, où chacun de ces arcs, pendant qu'il glisse d'une quantité égale à la longueur de sa corde, effectue à fort peu près sept neuvièmes de révolution, la courbe est celle que représente la fig. 55. Si l'on coupe par un plan perpendiculaire à l'axe l'hélicoïde engendré, la section a la forme représentée fig. 56; a est le point par où passe l'axe.

J'ai réalisé, partiellement ce même hélicoïde, en ne prenant que la figure engendrée par un seul des arcs de la courbe de la fig. 55. Alors la section S transversale n'est que la moitié de la courbe de la fig. 56, savoir la courbe $abcdfa$. J'ai fait façonner, en fil de fer, trois courbes égales de cette dernière forme, plus deux plaques de fer ayant encore la même ligne pour contour, et destinées à servir de bases à la figure liquide. Ces pièces avaient des dimensions environ doubles de celles de la 56; elles ont été fixées transversalement, chacune par son point a , et dans des azimuts différant successivement l'un de l'autre de 90° , en cinq points équidistants d'un fil de fer droit vertical; celui-ci était entouré de fil de coton, et porté sur un petit pied. Chacun des intervalles entre ces mêmes pièces était, en conséquence du calcul de M. Lamarle, les $0,324$ de la corde de l'un des arcs de la courbe génératrice (fig. 55). Ce système ayant été placé dans le mélange alcoolique, on a fait adhérer à l'ensemble des cinq courbes, en employant des précautions convenables, une masse d'huile en excès; puis on a enlevé graduellement de ce dernier liquide, jusqu'à ce que la surface de la figure passât exactement et d'une manière continue par les contours des cinq

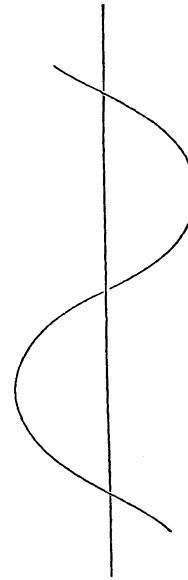


Fig. 55

courbes. Ce point atteint, la figure liquide réalisait parfaitement une, spire complète de l'hélicoïde qu'il s'agissait d'obtenir. Je n'ai point figuré le résultat ici, à cause de la difficulté de le bien représenter par la gravure; mais on s'en fera aisément une idée.

Les parties *ba* et *fa* (fig. 56) de la courbe forment, en *a*, un angle rentrant, et il est impossible, avec un système solide composé de fils de fer nus, de réaliser une figure d'huile présentant un angle de cette espèce (§ 31) : toujours l'huile passe au delà de l'arête, et vient remplir en plus ou moins grande quantité l'ouverture de l'angle; c'est pour écarter cet inconvénient que l'on entoure de fil de coton le fil de fer droit qui sert d'axe à l'hélicoïde; l'huile ne peut franchir l'obstacle que lui oppose le coton imbibé de liquide alcoolique, et l'angle rentrant se maintient.

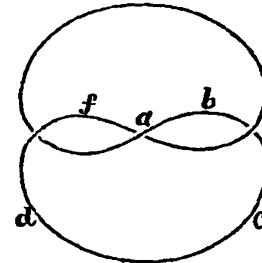


Fig. 56

§ 133. L'équation différentielle générale des surfaces à courbure moyenne nulle, c'est-à-dire l'équation [3] du § 2 dans laquelle la constante C est égale à zéro, a été, de la part des géomètres, le sujet de nombreux travaux.

Nous allons passer en revue ceux dont la publication a précédé 1870, en nous bornant à ce qui peut offrir de l'intérêt pour notre ouvrage, et nous décrirons en même temps plusieurs vérifications expérimentales.

On se rappellera que les surfaces dont il s'agit sont indifféremment appelées (§ 2) surfaces à courbure moyenne nulle, surfaces à aire minima, et surfaces dont les rayons de courbure, en chaque point, sont égaux et de signes contraires.

Monge a donné le premier⁵⁴ une intégrale de leur équation; mais cette intégrale est d'une forme compliquée, qui en rend l'usage très-difficile.

Cependant M. Scherk, qui s'était déjà occupé de la question dans un premier Mémoire⁵⁵ publié vers 1831, l'a reprise en 1835 dans un second travail⁵⁶ et, partie au moyen d'une méthode spéciale partie en traitant l'intégrale de Monge, il parvient à trouver, en coordonnées finies, outre les équations de l'hélicoïde gauche à plan directeur et du caténoïde, déjà connus par les recherches de Meusnier⁵⁷, celles de cinq autres surfaces; voici ces équations :

$$e^{Dz} = \frac{\cos Dy}{\cos Dx} ;$$

$$z = bl \frac{\sqrt{\rho^2 + a^2} + \sqrt{\rho^2 - b^2}}{a} - a \operatorname{arcc} \left[\operatorname{tg} = \frac{b}{a} \sqrt{\frac{\rho^2 + a^2}{\rho^2 - b^2}} \right] + a\theta + c,$$

où

$$x = \rho \cos \theta, \quad \text{et} \quad y = \rho \sin \theta;$$

$$\frac{1}{2} e^{2z - \frac{y}{x} \sqrt{2\rho + 2l} + x \sqrt{2\rho - 2l}} + \frac{1}{2} e^{-2z + \frac{y}{x} \sqrt{2\rho + 2l} - x \sqrt{2\rho - 2l}} = \rho + \frac{y^2}{x^2} + \frac{x^2}{4},$$

⁵⁴ Sur le calcul intégral des équations aux différences partielles (MÉM. DE L'ACAD. DES SCIENCES DE PARIS, 1784, p. 118).

⁵⁵ De proprietatibus superficiei qua hac continetur æquatione: $(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0$ *disquisitiones analyticæ* (ACTA SOCIET. JABLONOVIANÆ vol. IV, P. 204, Leipzig).

⁵⁶ Bemerkungen ueber die kleinste Fläche innerhalb gegebener Grenzen (JOURNAL DE CRELLE, t. XIII, p. 183).

⁵⁷ Voir la première note du § 129.

où

$$t = 1 + \frac{y^2}{x^2} - \frac{x^2}{4} = \rho \cos \theta, \quad \text{et} \quad y = \rho \sin \theta ;$$

$$\frac{1}{2} e^{x + \sqrt{\frac{1}{2}\rho + \frac{1}{2}t} \operatorname{cosec} \frac{1}{2}x} + \frac{1}{2} e^{-x - \sqrt{\frac{1}{2}\rho + \frac{1}{2}t} \operatorname{cosec} \frac{1}{2}x} = \frac{4 \sin^2 \frac{1}{2}x + \rho}{y^2},$$

où

$$t = 4 \sin^2 12x + y^2 \cos x = \rho \cos \theta, \quad \text{et} \quad y^2 \sin x = \rho \sin \theta ;$$

$$\sin Dz = \pm \frac{e^{Dx} - e^{-Dx}}{2} \cdot \frac{e^{Dy} - e^{-Dy}}{2}.$$

Ajoutons que l'auteur parvient à déduire de la première de ces équations, cette autre plus générale:

$$e^{Bz \sin(\beta - \alpha)} = A \frac{\cos B[x \cos \alpha + y \sin \alpha + a]}{\cos B[x \cos \beta + y \sin \beta + b]}.$$

Il annonce que, dans un Mémoire ultérieur, il soumettra à une recherche particulière la première des équations ci-dessus, dans ses rapports avec la dernière; j'ignore si ce Mémoire a été publié; je n'ai pu le trouver.

§ 134. En 1843, M. Björling⁵⁸ a cherché, comme M. Scherk, à tirer parti de l'intégrale de Monge; mais il astreint la surface à passer par une courbe donnée, et, pour particulariser cette même surface, il soumet à une loi également donnée la direction de la normale le long de la courbe en question. Sa méthode doit probablement conduire à des équations finies représentant de nouvelles surfaces; mais l'application qu'il choisit comme exemple ne fournit que le caténoïde.

§ 135. M. Ossian Bonnet, en employant un système de coordonnées auxiliaires, est parvenu en 1853 à une intégrale générale⁵⁹, qui ne présente pas l'inconvénient de celle de Monge; on pourra, sans doute, déduire de ses formules, en coordonnées ordinaires et sous forme finie, les équations d'un grand nombre de nouvelles surfaces.

M. Bonnet signale, comme exemple des résultats qu'on tire de son intégrale, une surface qui, pour certaines valeurs des constantes, se réduit, d'une part, à l'hélicoïde gauche, et, d'autre part, au caténoïde; cette surface était déjà connue; c'est celle qui est représentée par la seconde des équations de M. Scherk; c'est aussi celui des hélicoïdes de M. Lamarle (§ 131) qui correspond au caténoïde.

En 1855 et 1856, M. Bonnet a, en outre, appliqué sa méthode⁶⁰ au problème déjà traité par M. Björling; mais il ne donne non plus l'équation, en coordonnées finies, d'aucune nouvelle surface.

Il a repris ces questions en 1860, dans un Mémoire développé⁶¹; il y expose une génération géométrique de la surface mentionnée plus haut; voici cette génération:

Concevons, dans le plan des xy , l'hyperbole représentée par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

⁵⁸In *integrationem æquationis derivatarum partialium superficiei, cujus in puncto unoquoque principales ambo radii curvedinis æquales sunt signoque contrario* (ARCHIVES DE GRUNERT, 1844, vol. IV).

⁵⁹Note sur la théorie générale des surfaces (COMPTE RENDUS t. XXX VII, p. 529).

⁶⁰Sur la détermination des fonctions arbitraires qui entrent dans l'équation intégrale des surfaces à aire minima (COMPTE RENDUS, t. XL, p. 1107). – *Nouvelles remarques sur les surfaces à aire minima* (Ibid., tome XLII, page 532).

⁶¹Mémoire sur l'emploi d'un nouveau système de variables dans l'étude des propriétés des surfaces courbes JOURN. DE M. LIOUVILLE, 2me série, t. V, page 153).

et prenons la partie située du côté des x positifs pour base d'une surface cylindrique parallèle aux z . Sur cette surface traçons une courbe telle que la coordonnée z de l'un quelconque M de ses points soit dans un rapport constant égal à $-\frac{2}{b}$ avec le secteur hyperbolique compté à partir du demi-axe réel qui aboutit au sommet ($x = a, y = 0$), et terminé au demi-diamètre qui aboutit à la projection du point M sur le plan des xy ; enfin donnons à cette espèce d'hélice hyperbolique un mouvement hélicoïdal direct autour de l'axe des z , de façon que les hélices décrites par ses différents points aient toutes $2\pi b$ pour pas; la surface ainsi obtenue sera la surface cherchée.

§ 136. En 1855, M. Serret a indiqué⁶² une transformation de l'intégrale de Monge, qui permet de représenter toutes les surfaces à courbure moyenne nulle passant par des droites données non situées dans le même plan. Son Mémoire, du reste, ne contient pas de nouvelles équations en coordonnées finies.

§ 137. M. Catalan a publié, en 1855 encore⁶³, deux Notes dans lesquelles il arrive à des surfaces particulières.

La première de ces surfaces coïncide avec la première de celles de M. Scherk; mais M. Catalan en détermine la forme, qu'il décrit de la manière suivante :

La surface dont il s'agit coupe le plan des xy suivant des droites qui font des angles de 45° avec les axes des x et des y , et qui partagent tout le plan en carrés égaux; deux de ces droites se coupent à l'origine des coordonnées. La surface admet, en outre, un système de droites perpendiculaires à ce même plan, et qui divisent en deux parties égales les côtés des carrés ci-dessus. Elle est composée d'une infinité de nappes identiques dont chacune est comprise tout entière entre quatre plans asymptotiques formant un canal à section carrée de longueur indéfinie; les arêtes de tous ces canaux sont les droites du dernier système. On peut se représenter la section de l'ensemble de ces mêmes canaux par le plan des xy comme un échiquier indéfini, dans lequel les cases noires répondraient aux canaux renfermant les nappes de la surface, et les cases blanches à des espaces vides; les cases noires contiendraient à leurs centres les sommets des premiers carrés dont il a été question plus haut. Toutes les nappes étant identiques, il suffit d'en considérer une, et nous prendrons celle qui entoure l'axe des z . Elle est coupée par le plan des xz suivant une courbe située tout entière au-dessus de l'axe des x , qui touche cet axe à l'origine, qui a pour axe de symétrie l'axe des z , et qui présente deux branches infinies ayant pour asymptotes les sections du canal rectangulaire par le plan des xz . La même nappe est coupée par le plan des yz suivant une courbe identique à la précédente, mais renversée, et située tout entière au-dessous de l'axe des y , qu'elle touche aussi à l'origine. Si l'on imagine que la première de ces courbes glisse sur la seconde en demeurant parallèle à elle-même, elle engendrera la nappe dont il s'agit. On se fera donc aisément une idée de celle-ci, et comme il est clair que toutes les nappes se relient entre elles par les droites du dernier système ci-dessus, on pourra se figurer l'ensemble de la surface. On voit que chacune des nappes prise isolément a une grande analogie avec le parabolôïde hyperbolique.

La seconde des surfaces de M. Catalan est donnée par un système de quatre équations, entre lesquelles il faudrait éliminer trois quantités; mais cette élimination, si tant est qu'elle soit possible, serait certainement fort difficile. L'équation de la troisième surface coïncide encore avec la deuxième de celles de M. Scherk.

M. Catalan a présenté, en outre, dans la même année, à l'Académie des Sciences

⁶²Sur la moindre surface comprise entre des lignes droites données, non situées dans le même plan (COMPTES RENDUS, tome XL, p. 1078).

⁶³Sur une surface dont les rayons de courbure, en chaque point, sont égaux et de signes contraires (COMPTES RENDUS, t. XLI, p. 35), et Sur deux surfaces qui ont, en chaque point, leurs rayons de courbure égaux et de signes contraires (Ibid., p. 274).

de Paris, un Mémoire⁶⁴ dans lequel il parvient, d'une autre manière que M. Bonnet, à l'intégrale, sous forme réelle, de l'équation générale. Des solutions, qu'il tire de ses calculs, l'une se réduit, par une transformation convenable, à la dernière des équations de M. Scherk; trois autres sont données par des systèmes d'équations entre lesquelles il faudrait effectuer des éliminations difficiles, mais, pour l'une de ces dernières, M. Catalan parvient, sans faire l'élimination, à la génération de la surface, génération que voici:

Concevez une circonférence de cercle roulant sur une ligne droite et dont un point S décrit ainsi une cycloïde; concevez, en outre, la cycloïde enveloppe du rayon mobile passant par le point S, et soit P le point de contact; imaginez enfin, dans un plan perpendiculaire à celui de ces cycloïdes, une parabole dont la directrice soit projetée en P, et qui ait S pour sommet; cette dernière courbe, variable de grandeur, engendrera la surface.

Enfin, en 1838, a paru le Mémoire in extenso⁶⁵ dont les articles que je viens de résumer étaient des extraits développés.

§ 138. J'ai réalisé, toujours par le procédé des lames, une portion de l'une des nappes de la première des surfaces ci-dessus, savoir de celle qui coïncide avec la première de M. Scherk. J'ai choisi une portion terminée à égale distance au-dessus et au-dessous du plan des xy .

On comprend, par la description de la surface, qu'il suffira de former la charpente solide de quatre fils de fer droits égaux en longueur, disposés comme, les quatre arêtes latérales d'un prisme droit à base carrée, et dont les extrémités soient réunies d'une manière convenable par des fils de fer transversaux arqués suivant des courbes déduites de l'équation de la surface. Pour nous exprimer plus nettement, supposons la charpente placée de façon que les quatre fils de fer droits soient verticaux, et que, par rapport à l'observateur, deux de ces fils soient en avant des deux autres; il faudra qu'à la partie inférieure du système, un fil transversal réunisse les extrémités des deux fils verticaux antérieurs, et un autre les extrémités des deux fils verticaux postérieurs, et qu'à la partie supérieure, un fil transversal réunisse l'extrémité du fil vertical antérieur de droite à celle du fil vertical postérieur de droite, tandis qu'un autre réunit de même l'extrémité du fil vertical antérieur de gauche à celle du fil vertical postérieur de gauche. Les milieux des fils transversaux supérieurs seront d'ailleurs réunis par une fourche, afin qu'on puisse tenir la charpente pour la plonger dans le liquide.

La courbure des fils transversaux varie nécessairement avec le rapport entre la hauteur et la largeur de la charpente. J'ai pris d'abord la hauteur égale à la largeur; en d'autres termes, j'ai considéré la portion de la nappe qui s'étend au-dessus et au-dessous du plan des xy d'une quantité égale à la demi-largeur de cette nappe. M Catalan met l'équation de la surface sous la forme:

$$z = \log \frac{\cos y}{\cos x}. \tag{4}$$

Si, pour plus de simplicité, on considère en particulier la nappe qui entoure l'axe des z , on verra sans peine que, dans l'équation ci-dessus, la demi-largeur de cette nappe est représentée par $\frac{\pi}{2}$; il faudra donc, pour avoir l'équation

⁶⁴Sur les surfaces dont les rayons de courbure, en chaque point, sont égaux et de signes contraires (COMPTES RENDUS, t. XLI, p. 1019).

⁶⁵Mémoire sur les surfaces dont les rayons de courbure, en chaque point, sont égaux et le signe, contraires (JOURN. DE L'ECOLE POLYTECHN. 37me cahier, p. 129).

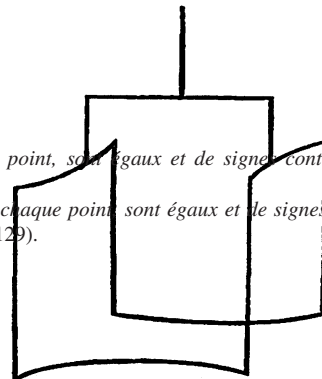


Fig. 57

des courbes qui doivent terminer supérieurement et inférieurement la charpente solide, faire $z = \pm \frac{\pi}{2}$, d'où l'on déduira

$$\cos y = e^{\pm \frac{\pi}{2}} \cdot \cos x \quad (5)$$

J'ai supposé à la charpente solide une largeur et une hauteur de 9 centimètres; les courbes ont été dessinées en conséquence d'après l'équation [2] et j'ai fait construire la charpente; elle est représentée en perspective par la fig. 57. Quand on la retire du liquide glycérique, la lame qu'elle contient offre aux yeux la réalisation parfaite de la portion cherchée de la surface. La fig. 58 montre, en projection verticale suivant deux directions rectangulaires, le résultat ainsi obtenu.

Ici, comme dans le cas de l'hélicoïde gauche à plan directeur (§ 130), la charpente en fil de fer constitue un contour fermé qu'on peut se figurer entièrement tracé sur la surface dont nous nous occupons, et la lame, qui doit passer par tout ce contour et avoir une courbure moyenne

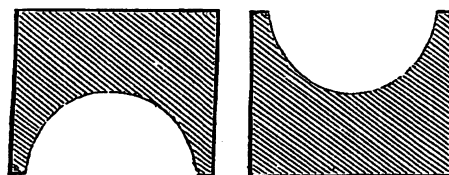


Fig. 58

nulle, est obligée de se façonner suivant la surface qui remplit cette double condition; c'est donc là encore une application de mon principe général (§ 128).

On peut se demander si la surface se réaliserait de même pour un rapport beaucoup plus grand entre la hauteur et la largeur de la charpente solide; cette réalisation suppose, en effet, que la nappe, prise ainsi sur une partie plus considérable de son étendue, ne devient point instable. Afin d'essayer la chose, j'ai fait construire une seconde charpente ayant 10 centimètres de hauteur et 2,5 de largeur, c'est une hauteur quadruple de la largeur. En cherchant l'équation des portions courbes qui conviennent à ce rapport, ce qui s'obtient en faisant, dans l'équation [1], $z = 2\pi$, j'avais trouvé que ces courbes se réduisaient sensiblement à des lignes droites, de sorte que la nouvelle charpente ne se compose que de parties rectilignes. Or la lame qui s'y est formée n'a point réalisé la surface décrite par M. Catalan: elle a pris une figure consistant encore en deux parties creuses disposées à angle droit l'une par rapport à l'autre; mais leur sommet commun, au lieu d'être au milieu du système, se trouvait environ quatre fois plus éloigné de l'une des extrémités que de l'autre; en outre, en répétant l'expérience plusieurs fois, on a vu ce sommet commun se placer tantôt vers l'extrémité supérieure, tantôt vers l'extrémité inférieure. J'ai dû conclure de là que la nappe de la surface décrite par M. Catalan a une limite de stabilité et que j'avais dépassé cette limite.

L'expérience que je viens de décrire nous offre donc un exemple du cas où la seconde condition énoncée dans le principe général du § 128 n'est pas satisfaite⁶⁶.

⁶⁶ Bien que je me sois fait une règle de clore mes indications historiques à la fin de 1869, je dirai cependant ici que M. Schwarz, dans une note annexée à son Mémoire publié en 1871 (voir le no 13 du § 508), considère cette instabilité comme due à ce que la charpente étant formée de fils d'une épaisseur notable, et présentant nécessairement de petites irrégularités, la surface en question ne saurait s'y réaliser rigoureusement; sans ces imperfections de la charpente, la surface, avec son sommet au milieu, serait, selon M. Schwarz, en conséquence d'une démonstration mathématique, parfaitement stable. S'il en est réellement ainsi, l'instabilité

Je me suis dit alors qu'on donnerait probablement de la stabilité à la figure cherchée en profitant de la propriété consistant en ce que la nappe contient, comme on l'a vu, deux droites dirigées suivant les diagonales de la section du canal rectangulaire par le plan des xy ; j'ai pensé qu'en rendant solide l'une de ces diagonales, on obligerait le sommet commun des deux parties creuses à demeurer au centre du système. J'ai donc fait adapter, au milieu de la hauteur de la nouvelle charpente, un fil de fer très-mince qui traverse celle-ci, comme on le voit dans la fig. 59, et, en effet, par ce moyen, la surface de M. Scherk et Catalan s'est parfaitement réalisée dans la charpente en question.



Fig. 59

§ 139. M. Van der Mensbrugge, appliquant, de son côté, mon principe général, a réalisé⁶⁷, en 1866, la cinquième des surfaces de M. Scherk. La discussion de l'équation lui a montré que la charpente la plus simple à employer devait se composer de deux rectangles égaux ayant leurs grands côtés quadruples des petits, et se coupant à angles droits par les milieux de ces grands côtés (fig. 60). A la rigueur, les petits côtés devraient être courbes; mais, avec le rapport ci-dessus, leur courbure serait si faible, qu'on peut les laisser droits sans qu'il en résulte de différence appréciable entre la surface laminaire produite et la surface théorique; cela tient à ce que les plans des rectangles sont asymptotiques de cette dernière.

La charpente ainsi construite ne représente pas un seul contour fermé, comme le voudrait mon principe, mais bien l'ensemble de deux de ces contours; et ceux-ci ne sont pas les deux rectangles eux-mêmes, car on s'assure aisément, par la discussion, qu'aucun de ces derniers ne satisfait à la condition, exigée par mon principe, de circonscrire une portion finie de la surface. Si l'on considère isolément la partie de la charpente composée d'une moitié de l'un des rectangles et d'une moitié de l'autre, on aura le premier des deux contours fermés réels, et la partie opposée sera le second; et, en effet, quand on retire la charpente du liquide glycérique, c'est dans ces deux parties opposées que se trouve logée la figure laminaire.

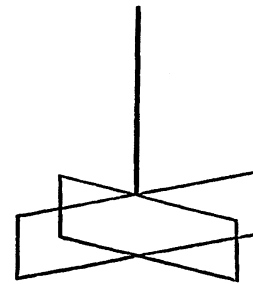


Fig. 60

Ces mêmes parties comprennent, on le voit, deux des quatre angles dièdres droits formés par les rectangles, et il est clair qu'il n'y a pas plus de raison pour que la figure laminaire se développe dans ces deux angles que dans les deux autres; aussi, quand la charpente est bien construite, et qu'on répète plusieurs fois l'expérience, c'est tantôt l'un des couples d'angles opposés, tantôt l'autre, qui se trouve occupé.

La charpente s'écartant de mon principe en ce qu'elle présente deux contours fermés au lieu d'un seul, le système laminaire réalisé contient une lame supplémentaire; celle-ci est plane, elle a la forme d'un ovale dont les sommets sont aux deux points d'intersection des rectangles, et dont le plan est bissecteur des deux angles dièdres qui renferment toute la figure; pour obtenir le résultat que l'on cherche, c'est-à-dire une portion de la surface de M. Scherk, il suffit de crever la lame supplémentaire dont je viens de parler; la figure laminaire offre alors en son milieu un espace vide, et c'est

que j'ai constatée appartiendrait, non à la surface de M. Scherk, mais à une autre surface qui en serait très-voisine.

⁶⁷ Discussion et réalisation expérimentale d'une surface particulière à courbure moyenne nulle (BULLET. DE L'ACAD. DE BELGIQUE, 2me série, t. XXI, p. 552).

aussi ce qu'on déduit de l'équation.

On pourrait façonner séparément un seul des deux contours fermés, de sorte qu'on se trouverait rigoureusement dans les conditions de mon principe; alors il ne se formerait qu'une lame unique, et celle-ci représenterait exactement la moitié de la figure que fournit la charpente entière après la rupture de la lame additionnelle; si M. Van der Mensbrugge a réuni les deux contours fermés, c'est afin de réaliser une portion plus complète de la surface. Il s'est assuré d'ailleurs, par des mesures au cathétomètre, que la lame produite coïncidait, sans erreur appréciable, avec la surface théorique.

Enfin il a poursuivi, au moyen de l'équation, la surface au delà des grands côtés des rectangles, et il a fait voir comment on pouvait étendre la réalisation hors des mêmes limites, à l'aide d'une charpente convenable munie de fils supplémentaires, sans lesquels la figure ainsi agrandie serait instable; le résultat est fort curieux, mais sa description exigerait trop de place.

§ 140. M. Mathet a fait connaître⁶⁸, en 1863, une méthode au moyen de laquelle on peut former l'équation différentielle de toutes les surfaces à courbure moyenne nulle qui passent par une courbe plane donnée.

§ 140bis. Dans un Mémoire⁶⁹ de l'année 1864, M. Enneper a exposé une méthode nouvelle pour l'intégration de l'équation générale des surfaces à courbure moyenne nulle, et il en déduit, comme application, l'équation algébrique suivante:

$$\left[k^2 \cdot \frac{y^2 - x^2}{z} + \frac{2}{3} + \frac{8}{9} k^4 z^2 \right]^3 = 6 \left[k^2 \cdot \frac{y^2 - x^2}{2z} + \frac{2}{9} - k^4 \left(x^2 + y^2 + \frac{8}{9} z^2 \right) \right]^2.$$

La surface représentée par cette équation contient deux droites situées dans le plan des xy , et bissectrices des angles entre les axes des x et des y .

§ 141. En 1865, M. Schwarz a communiqué à l'Académie de Berlin une Note⁷⁰ dans laquelle il résume une partie des résultats qu'il a obtenus à l'égard d'une surface particulière à aire minima. Cette surface est astreinte à passer par le contour formé de quatre arêtes d'un tétraèdre régulier, choisies de manière à constituer un quadrilatère gauche. M. Schwarz a réalisé, à l'état laminaire, la portion comprise dans ce contour, au moyen d'une solution de gélatine : la lame, devenue solide par l'évaporation de l'eau, lui a donné ainsi une figure permanente.

Cette figure est, comme on devait s'y attendre, en forme de selle; outre les côtés du quadrilatère gauche, elle admet deux autres droites encore, savoir celles qui joindraient respectivement le milieu de chacun de ces côtés au milieu du côté opposé. Enfin M. Schwarz parvient à poursuivre la surface au delà du contour indiqué, et à en déterminer la disposition générale: la surface totale est formée de portions identiques à celle ci-

⁶⁸Étude sur un certain mode de génération des surfaces d'étendue minimum (JOURNAL DE M. LIOUVILLE, 2me série, t. VIII, p. 923).

⁶⁹Analytisch-geometrische Untersuchungen (ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK DE SCHLÖMILCH, 9me année, p. 96).

⁷⁰Ueber die Minimumfläche deren Begrenzung als ein von vier Kanten eines regulären Teträeders gebildetes windschiefes Viereck gegeben ist. BULLET. DE L'ACAD. DE BERLIN, séance du 6 Avril).

dessus, juxtaposées d'une certaine façon, et elle est fort curieuse⁷¹.

§ 142. Un Mémoire posthume de Riemann⁷², publié en 1867, contient une recherche générale des surfaces à aire minima passant par plusieurs lignes limites. L'auteur applique sa méthode d'abord au cas où ces limites sont des droites, dont plusieurs peuvent se couper, par exemple en formant un quadrilatère gauche; puis à celui où les limites sont deux circonférences de cercle quelconques situées d'une manière quelconque dans des plans parallèles. Ses résultats sont exprimés par des systèmes d'équation renfermant des intégrales indiquées, et il ne donne l'équation complète d'aucune surface en coordonnées finies.

§ 143. En 1867 également, dans un Mémoire couronné par l'Académie de Berlin⁷³, M. Schwarz a repris le problème de la surface à aire minima passant par quatre droites qui forment un quadrilatère gauche; mais, dans la première partie de ce Mémoire, il traite un cas plus général que dans sa communication de 1865: les côtés du quadrilatère n'appartiennent plus à un tétraèdre régulier; seulement deux côtés adjacents sont égaux entre eux, et les deux autres sont de même égaux entre eux. Dans la seconde partie, l'auteur trouve, pour le cas spécial du tétraèdre régulier, que l'équation finie de la surface est exprimée rationnellement par des fonctions elliptiques des coordonnées. Il traite de même une seconde surface qu'il fait dériver de la première par une flexion de celle-ci; enfin il a joint à son travail des modèles en plâtre de chacune de ces deux surfaces. Le Mémoire in-extenso n'était pas encore imprimé à la fin de 1869.

Le même savant a présenté, en 1867 et 1868, sur les surfaces à aire minima, d'autres Mémoires qui n'étaient pas non plus imprimés à la fin de 1869, et qui renferment des résultats fort remarquables; il a bien voulu me donner communication des principaux, en m'autorisant à les mentionner. Voici ceux qui m'ont paru offrir le plus d'intérêt:

1° Lorsqu'une surface à aire minima est telle qu'on peut y concevoir tracée une ligne droite, il y a symétrie par rapport à celle-ci, en ce sens que si l'on considère à part toute la portion de la surface qui s'étend d'un côté de la droite, et qu'on la fasse tourner de 180° autour de cette droite comme axe, on obtient la portion située de l'autre côté. C'est ce qu'on vérifie aisément, par exemple, à l'égard de l'hélicoïde gauche à plan directeur, de la première des surfaces discutées par M. Catalan (§ 137), et de celle que M. Van der Mensbrugge a partiellement réalisée (§ 139).

Une conséquence immédiate de ce beau théorème, c'est que si l'on réalise une figure laminaire au moyen d'un contour solide fermé qui ne se compose que de lignes droites, on peut prolonger idéalement la surface au delà de ce contour c'est ainsi, par exemple, qu'on trouve ce que devient, à l'extérieur du quadrilatère gauche, la surface qui s'appuie sur les côtés de celui-ci.

2° On peut déterminer complètement, par les fonctions elliptiques, la surface qu'on réalise partiellement en soulevant hors du liquide glycérique, parallèlement à la surface de ce dernier, un carré en fil de fer, et en s'arrêtant à une hauteur moindre que celle où

⁷¹ M. Schwarz a eu l'obligeance de m'envoyer des modèles en plâtre de portions étendues de la surface en question. On comprendra de la manière suivante le contour de l'un de ces modèles: qu'on trace un hexagone régulier, supposé horizontal pour fixer les idées; que, dans le même plan, on construise, sur chacun des côtés comme base, un triangle équilatéral ayant son sommet en dehors de l'hexagone; qu'on imagine trois de ces triangles, non adjacents, tournant autour de leurs bases comme charnières, jusqu'à ce que chacun d'eux fasse, avec le plan de l'hexagone et au-dessus de celui-ci, un angle égal aux angles dièdres d'un tétraèdre régulier; qu'on imagine de même les trois autres triangles tournant autour de leurs bases de la même quantité que les premiers, mais au-dessous du plan de l'hexagone; enfin qu'on supprime les bases de tous les triangles, on aura le contour cherché; je l'ai fait construire en fil de fer, et j'ai réalisé ainsi parfaitement, avec du liquide glycérique, la portion comprise de la surface discutée par M. Schwarz.

⁷² *Ueber die Fläche vom kleinsten Inhalt beiegebener Begrenzung.* (Mém. de Göttingue, vol. XIII)

⁷³ *Mém. de l'Acad. de Berlin pour l'année 1867*, introduction historique, page IX.

la figure se modifierait spontanément⁷⁴.

On détermine de même, à l'aide des fonctions elliptiques, la surface partiellement réalisée par M. Van der Mensbrugge, dans le cas où le rapport entre la longueur commune des deux rectangles solides et leur hauteur est quelconque, grand ou petit.

Enfin M. Schondorff a traité, de son côté, dans un Mémoire⁷⁵ couronné aussi en 1867, mais par la Société de Göttingue, la question de la surface à aire minima qui s'appuie sur un quadrilatère gauche; ce quadrilatère est astreint à la même condition que celui de M. Schwarz.

§ 143bis. En 1867 encore., M. Enneper a donné⁷⁶ l'équation suivante:

$$\cos bz = k^2 \cdot \frac{e^{\frac{bx}{k}} + e^{-\frac{bx}{k}}}{2} - k'^2 \cdot \frac{e^{\frac{bx}{k'}} + e^{-\frac{bx}{k'}}}{2}.$$

Cette équation, si l'on y fait $k = k' = \frac{1}{\sqrt{2}}$, peut être mise sous la forme:

$$4 \cos bz = \left(e^{\frac{b(x-y)}{\sqrt{2}}} - e^{-\frac{b(x-y)}{\sqrt{2}}} \right) \left(e^{\frac{b(x+y)}{\sqrt{2}}} - e^{-\frac{b(x+y)}{\sqrt{2}}} \right),$$

et si, dans cette dernière, on fait $\frac{x-y}{\sqrt{2}} = x'$, $\frac{x+y}{\sqrt{2}} = y'$, et $bz = \frac{\pi}{2} - bz'$, ce qui revient à faire tourner de 45° les plans des xz et des yz , et à déplacer l'origine, sur l'axe des z , d'une quantité égale à $\frac{\pi}{2b}$, on retrouve la dernière des équations de M. Scherk (§ 133); l'équation de M. Enneper est donc une généralisation de celle-ci. Je dois cette remarque, et l'indication des transformations ci-dessus, à l'obligeance de M. Schwarz.

§ 144. C'est ici le lieu de décrire deux vérifications expérimentales qui me paraissent dignes d'intérêt. Il est permis d'inférer des recherches des géomètres que, par un contour déterminé quelconque, peuvent passer une infinité de surfaces à courbure moyenne nulle, du moins lorsqu'on n'introduit aucune autre condition. D'après cela, si l'on construit, en fil de fer légèrement oxydé, un contour fermé non plan et de telle forme qu'on voudra, qu'on le plonge dans le liquide glycérique et qu'on l'en retire, on doit croire qu'une surface de ce genre pourra toujours s'y réaliser à l'état laminaire, et que, par conséquent, on devra le trouver occupé par une lame unique qui le remplit entièrement.

Or c'est ce que l'expérience confirme: j'ai fait façonner en fil de fer les contours fermés les plus divers et les plus bizarres, et, à leur émergence du liquide glycérique, chacun d'eux s'est toujours montré, soit immédiatement, soit après une petite manoeuvre dont je vais parler, rempli en totalité par une seule lame.

⁷⁴ Je ne puis résister au désir d'énoncer, à propos de cette surface, un second théorème trouvé par M. Schwarz, théorème aussi remarquable que le précédent, mais qui, je crois, n'a pas été publié; le voici:

Lorsqu'une surface à courbure moyenne nulle peut être coupée par un plan de telle manière que, tout le long de la section, elle ait ses éléments perpendiculaires à ce plan, elle présente, par rapport à celui-ci, la symétrie qui existe entre un objet posé sur un miroir plan et l'image de cet objet.

Ce théorème est applicable à la surface dont il s'agit, car lorsqu'on a soulevé le carré en fil de fer, les éléments de la lame sont tous verticaux le long de la crête de la petite masse qui la rattache au liquide, et sont conséquemment perpendiculaires au plan horizontal qui passerait par cette crête. Si maintenant l'on considère que la surface contient les quatre droites dont les côtés du carré font partie, on voit qu'on peut lui appliquer également le premier théorème, et l'on arrive de la sorte à la concevoir dans tout son ensemble indéfini. Prise ainsi dans sa totalité, elle jouit de cette propriété singulière que, si on l'envisage comme appartenant à une masse liquide, l'espace qu'elle laisse vide constitue, en creux, une figure identique à celle de l'espace plein.

Les deux théorèmes de M. Schwarz procurent donc une merveilleuse facilité pour la prolongation d'un grand nombre de surfaces à courbure moyenne nulle au delà des limites données.

⁷⁵ *Ueber die Minimalfläche die von einem doppelt-gleichschenkligen räumlichen Vierech begrenzt wird.* Göttingue, 1868.

⁷⁶ *Analytisch-Geometrische Untersuchungen* (Bullet. de la Soc. Roy. de Göttingue, 1867, p. 237).

Quand le contour fermé a une certaine complication, la lame qui s'y développe est souvent accompagnée de lamelles additionnelles; mais il suffit alors de crever celles-ci, ce qui se fait aisément avec une pointe de papier à filtre, pour ne plus avoir qu'une lame unique.

Quelquefois aussi une portion de la lame prend, pendant que le système sort du liquide, une mauvaise direction, et va s'attacher, au moyen d'une arête liquide, à une autre portion de cette même lame; dans ce cas, on ne peut crever; mais, en variant la position du contour solide pendant qu'on le retire, on finit par éviter l'inconvénient dont il s'agit. Avec ces précautions, on réussit constamment à réaliser une lame unique attachée à la totalité du contour solide, et l'on produit ainsi, par un moyen fort simple, des surfaces très-belles et très-variées.

Pour donner une idée de la singularité et de la complication des contours fermés que j'ai soumis à l'expérience, j'en décrirai ici deux en peu de mots : le premier consiste en un noeud semblable à celui qu'on ferait au milieu d'un cordon sans le serrer, de manière que ses différentes parties soient notablement distantes les unes des autres, et en rejoignant les deux extrémités libres. Quant au second, le fil de fer, d'abord droit et vertical, se recourbe ensuite en formant un peu plus de deux spires d'une hélice dont l'axe est parallèle à la portion droite, puis se contourne en une autre hélice également de deux spires, dont l'axe est horizontal, et qui enveloppe la première à une distance suffisante; il s'arrondit alors en une troisième hélice de deux spires aussi, à axe vertical entourant le système des deux autres avec un intervalle convenable; enfin il va s'attacher en un point du fil droit, et ferme ainsi le contour. C'est avec ce dernier contour que la réussite a été le plus difficile : il se formait des lamelles dont la disposition était telle qu'on ne pouvait les crever sans faire éclater le tout, et ce n'est qu'en variant la manière dont on retirait le contour du liquide, qu'on est arrivé au résultat cherché.

§ 145. En second lieu, bien que, avec un contour donné, la surface laminaire qu'on réalise ainsi se montre toujours la même dans les essais successifs convenablement effectués, l'expérience permet encore de constater qu'il y a une infinité d'autres surfaces à courbure moyenne nulle qui peuvent s'appuyer sur le même contour. Si, après avoir réalisé une lame dans un contour fermé non plan et choisi arbitrairement, on fait adhérer à cette lame un anneau en fil de fer muni d'une fourche par laquelle on le tient, et préalablement mouillé de liquide glycérique, puis qu'on tire cet anneau dans une direction perpendiculaire à son plan, comme si on voulait l'écarter de la lame, celle-ci ne s'en détache pas, de sorte qu'elle s'étend alors entre le contour primitif et ce même anneau; seulement, si l'on éloigne trop ce dernier, l'équilibre se détruit, la portion de la lame qui aboutit à l'anneau s'étrangle rapidement, il y a séparation, et la lame se rétablit dans son état antérieur, tandis qu'une lame plane va occuper l'anneau; mais, en deçà de cette limite d'écartement, la figure est parfaitement stable. Or, dans cette dernière condition, comme la lame continue à s'appuyer sur le contour primitif et que sa forme est modifiée, elle représente une nouvelle surface à courbure moyenne nulle passant par ce même contour. On peut employer simultanément deux anneaux qu'on fait adhérer à deux portions différentes de la lame et qu'on écarte en même temps, la lame s'étend vers l'un et vers l'autre à la fois; on peut, en outre, substituer aux anneaux circulaires des anneaux de tout autres formes, et toujours l'expérience réussit. On produit de cette manière autant de surfaces différentes qu'on le veut, et qui toutes passent par le premier contour.

Si l'on conçoit, par la pensée, l'une de ces nouvelles surfaces prolongée au delà de l'un des anneaux, on se convaincra, avec un peu de réflexion, que, puisque ses deux rayons de courbure principaux doivent être partout égaux et de signes contraires,

le prolongement dont il s'agit ne peut se fermer, et doit conséquemment s'étendre à l'infini. Il résulte de là qu'aucune de ces surfaces ne saurait remplir le contour primitif par une portion finie.

Mais les résultats du paragraphe précédent permettent d'énoncer ce nouveau principe :
Un contour fermé absolument quelconque, plan ou non plan, étant donné, parmi toutes les surfaces à courbure moyenne nulle qui peuvent s'appuyer sur sa totalité, il y en a toujours au moins une dont une portion finie peut le remplir entièrement.

CHAPITRE V.

Tension des surfaces et des lames liquides: historique. — Systèmes laminaires. Lois auxquelles ils sont soumis; comment ils se développent; principe général qui régit leur constitution. Démonstration théorique de leurs lois.

§ 146. La couche superficielle des liquides possède une propriété singulière consistant en ce qu'elle se trouve dans un état continu de tension, et, par suite, fait incessamment effort pour se contracter. Afin de mettre dans tout son jour cette propriété, qui joue un grand rôle dans les phénomènes dont nous nous occupons, nous allons en tracer l'historique jusqu'à la fin de 1869.

L'idée d'une tension dans la couche superficielle des liquides a été émise, pour la première fois, je pense, en 1751, par Segner, qui l'emploie surtout à la détermination de la figure des gouttes. Dans le Mémoire dont j'ai déjà parlé (note du § 3), Mémoire fort remarquable pour l'époque où il a été écrit, Segner considérant une goutte liquide posée sur une surface solide qu'elle ne mouille pas, discute les actions mutuelles des molécules qui la composent, et arrive à des résultats dont la vérité est aujourd'hui démontrée: il trouve que les actions d'où dépend la figure de la goutte résident dans une couche superficielle dont l'épaisseur est égale au rayon de l'attraction moléculaire, et que ces mêmes actions produisent des pressions normales dont l'intensité est d'autant plus grande qu'elles émanent de portions plus courbes de la surface; enfin il conclut à l'existence, dans la couche dont il s'agit, d'une tension ayant partout la même intensité, tension qu'il fait dériver des attractions des molécules suivant le sens tangentiel, et de la courbure. Mais cette discussion, toute de raisonnement, est longue, embarrassée, peu intelligible, selon moi, en plusieurs points, et je doute qu'elle ait pu convaincre personne de la réalité de la tension; elle renferme, en outre, des erreurs qui tiennent à l'insuffisance des notions qu'on possédait alors; aussi Young dit-il à ce sujet: «Segner a montré de quelle manière le principe peut être déduit de la doctrine de l'attraction; mais sa démonstration est compliquée et n'est pas parfaitement satisfaisante.»

Quoi qu'il en soit, Segner, appliquant ensuite à ses déductions une méthode ingénieuse de calcul et d'expérience, parvient à cet autre résultat, que, dans des gouttes formées du même liquide, mais ayant des figures et des dimensions différentes, la tension a la même valeur, ce qui revient, à dire qu'elle est indépendante des courbures; ce principe est également reconnu vrai aujourd'hui.

Enfin, Segner va jusqu'à chercher le rapport entre la tension du mercure et celle de l'eau, et il le trouve égal à 3,5 environ; mais comme il manque de la notion de la courbure moyenne, et ne tient compte, dans ses calculs, que de la courbure méridienne, ses résultats numériques sont nécessairement inexacts, et le rapport ci-dessus est beaucoup trop petit.

§ 147. En 1756, Leidenfrost⁷⁷ a signalé la force contractile des bulles de savon; il se fonde sur le fait qu'il a, je pense, décrit le premier, que si on laisse ouvert le tube d'insufflation, la bulle revient graduellement sur elle-même jusqu'à s'annuler, en expulsant par le tube l'air qu'elle contient.

Mais Leidenfrost ne rapporte pas cette force contractile à une propriété générale des surfaces liquides; il l'attribue à la partie grasseuse du savon, laquelle, selon lui, se sépare des autres éléments de la solution, et constitue une pellicule mince sur la face extérieure de la bulle; d'ailleurs, selon lui encore, la partie aqueuse de la lame possède une force de nature opposée, savoir une force explosive; c'est cette dernière qui fait éclater la bulle.

⁷⁷ *De aquae communis nonnullis qualitatibus tractatus*. Duisburg.

Monge⁷⁸, en 1787, parle de la tension, mais d'une manière simplement hypothétique; il avance qu'elle pourrait servir à rendre raison des phénomènes capillaires.

§ 148. Young, dans un travail célèbre⁷⁹ publié en 1805, part du principe de la tension pour expliquer un grand nombre de phénomènes capillaires. Il ne tombe pas dans la même erreur que Segner, c'est-à-dire qu'il considère à la fois les effets des deux courbures rectangulaires: la tension détermine, en chaque point de la surface liquide, une pression ou une traction normale proportionnelle à la somme de ces deux courbures, et c'est de là que naissent les phénomènes: dans un tube capillaire, par exemple, lorsque le liquide est soulevé et présente ainsi une surface concave, les tractions normales dues à la tension soutiennent le poids de la colonne, et lorsque le liquide est déprimé, sa surface étant alors convexe, les pressions normales produites par la tension font équilibre à la pression hydrostatique du liquide environnant, qui tend à faire monter la colonne.

Quant à la légitimité du principe de la tension, Young s'appuie simplement sur ce que les phénomènes capillaires, pouvant être rapportés aux attractions mutuelles des seules particules superficielles, les surfaces liquides. « doivent être composées de courbes de la nature de la chaînette, lesquelles sont supposées être le résultat d'une tension uniforme dans une surface qui résiste à la pression d'un fluide. » Enfin il essaie de faire voir qu'on peut trouver une cause de pressions et tractions normales dans le seul jeu des attractions et répulsions des molécules, et il laisse ainsi dans le doute si la tension existe en réalité, ou si, par l'effet de ces actions normales, les choses se passent comme sous l'influence d'une tension.

Laplace⁸⁰ rappelle les recherches de Segner et de Young, mais il signale l'inexactitude des raisonnements du premier, et fait remarquer que le second n'a pas tenté de dériver ses hypothèses de l'attraction moléculaire.

§ 149. Le docteur Hough, dont j'ai déjà mentionné (§ 118) les recherches, publiées en 1830, paraît être arrivé, de son côté, sans connaître les travaux de Segner et de Young, à l'idée d'une force contractile ou tension existant à la surface des liquides et faisant constamment effort pour amoindrir cette surface; il semble y avoir été conduit simplement par la considération de la forme sphérique des gouttes liquides et des bulles de savon. Il donne comme exemple des effets de cette tension l'élasticité des globules de mercure, lesquels, lorsqu'on augmente leur surface en les comprimant et qu'on les abandonne ensuite à eux-mêmes, reprennent la forme sphérique.

Pour expliquer la tension, Hough fait remarquer que les molécules de la surface ne sont pas en présence de molécules extérieures de même espèce qui puissent contrebalancer leurs attractions mutuelles, tandis qu'à l'intérieur du liquide chaque molécule étant complètement entourée de molécules similaires, les attractions sont neutralisées dans tous les sens. Il ajoute qu'on peut, jusqu'à un certain point, estimer les tensions relatives des différents liquides, en comparant les grandeurs des plus grosses gouttes de ces liquides qui conservent sensiblement la forme sphérique quand elles reposent sur des substances qui ont pour elles la moindre attraction, ou quand elles sont suspendues à des corps qui ont pour elles la plus forte attraction.

Il fait dépendre aussi de la force contractile l'élévation et la dépression des liquides dans les espaces capillaires, ainsi que les attractions et répulsions apparentes des corps

⁷⁸ *Mémoire sur quelques effets d'attraction ou de répulsion apparente entre les molécules de matière* MÉM. DE L'ACAD. DES SC. DE PARIS).

⁷⁹ *An essay on the cohesion of fluids* (PHILOS. TRANSACT. 1805).

⁸⁰ *Exposition du système du monde*. Paris. — La première édition est de 1796; mais les remarques de Laplace étant postérieures au travail de Young, ont d'être insérées pour la première fois dans une édition moins ancienne; celle que j'ai consultée est de 1813.

légers flottants; mais, ignorant les recherches antérieures, il essaie d'établir une théorie de ces phénomènes, théorie erronée, dans laquelle intervient la pression atmosphérique. Enfin il admet, comme conséquence de la tension, une pression exercée soit sur l'air qui constitue une bulle dans l'intérieur d'un liquide, soit sur celui que renferme une sphère laminaire ou une calotte sphérique laminaire; mais, ainsi que je l'ai dit, il parvient, à l'égard de la relation entre cette pression et le diamètre, à une loi tout à fait inexacte.

§ 150. Disons quelques mots d'un Mémoire⁸¹ de Mile, qui a paru en 1838. L'auteur expose une théorie des phénomènes capillaires, dans laquelle il fait aussi intervenir la tension; mais, telle qu'il la considère, celle tension obéirait à des lois aujourd'hui inadmissibles. Il part de ce principe que, dans un liquide homogène, les molécules cherchent à s'arranger d'une manière régulière et identique partout; or il montre que cette identité est possible uniquement quand la surface du liquide est plane, et il en conclut que, par suite de l'arrangement anormal des molécules, les surfaces courbes font constamment effort pour devenir planes; que cet effort, d'où résultent des tensions, est d'autant plus énergique que les courbures sont plus prononcées, que ce même effort détermine, sur la masse, une pression dans le cas des surfaces convexes, et une traction dans le cas des surfaces concaves; enfin que de là naissent les phénomènes capillaires. Suivant Mile, on le voit, la tension n'existerait que dans les surfaces courbes, et elle varierait avec les courbures.

§ 150bis. Mossotti, dans un ouvrage⁸² de l'année 1843, applique, comme Young, mais d'une manière plus complète, le principe de la tension aux phénomènes capillaires. Il établit l'indépendance entre la tension et les courbures, et l'on peut conclure de son analyse que le coefficient constant qui, dans l'expression générale de la pression capillaire, multiplie la somme $\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}$ des deux courbures principales, n'est autre chose que la tension par unité de longueur, c'est-à-dire l'effort exercé par la couche superficielle du liquide des deux côtés d'une section normale dont la longueur est l'unité. Ses formules permettent d'évaluer cette tension, pour un liquide donné, en fonction de la densité de celui-ci et de la hauteur à laquelle il s'élève dans un tube capillaire de diamètre déterminé, et Mossotti est, je pense, le premier qui ait cherché de semblables évaluations; il trouve ainsi, par exemple, les valeurs suivantes, qui expriment, pour différents liquides, la tension en milligrammes par millimètre de longueur:

eau	7,56,
mercure	44,40,
alcool	2,59,
essence de térébenthine	2,86,
huile d'olive	46;

seulement il ne donne aucune indication concernant la température.

Enfin il admet l'existence d'une tension à la surface commune de deux liquides en contact qui ne se mêlent pas, il la fait entrer dans ses formules relatives aux liquides superposés dans un même tube capillaire, et il obtient, en partant des mesures prises dans ces cas de superposition, les évaluations qui suivent:

huile et eau	0,79,
mercure et eau	37,67,
mercure et alcool	36,04.

⁸¹ *Versuch einer neuen physikalischen Theorie der Capillarität* (ANN. DE M. POGGENDORFF, vol. XLV, pp. 287 et 501).

⁸² *Lezioni elementari di Fisica matematica*. Florence.

Quant à la cause de la tension, Mossotti, en considérant le jeu des actions attractives et répulsives entre les molécules, arrive à une conclusion identique à celle de Poisson, savoir que, à partir de la surface jusqu'à une profondeur très égale au rayon d'activité de l'attraction moléculaire, la densité est inférieure à celle de l'intérieur du liquide, et il admet que, de cet écartement plus grand des molécules résulte, dans la couche dont il s'agit, un excès d'attraction dans le sens parallèle à la surface; c'est cet excès qui, selon lui, constitue la tension.

§ 151. C'est du principe de la tension que M. Henry, dans sa communication verbale (année 1844) sur la cohésion des liquides (§ 116), déduit la cause de la pression d'une bulle creuse sur l'air emprisonné, et la loi qui régit cette pression (ibid.). Seulement il considère la bulle comme pouvant être assimilée à une sphère pleine réduite à sa surface pressante, c'est-à-dire qu'il attribue le phénomène à la tension de la face extérieure de la lame, sans tenir compte de celle de l'autre face.

Il ajoute : « On manifeste aisément la force contractile de la surface de la bulle en soufflant une grosse bulle à l'extrémité d'un large tube (soit d'un pouce de diamètre); dès qu'on éloigne la bouche, on voit la bulle diminuer rapidement, et en même temps un courant d'air intense est chassé par le tube contre le visage. Cet effet n'est pas dû à l'ascension de l'air chaud des poumons qui a servi à gonfler la bulle, car il se produit de même quand on emploie de l'air froid, et aussi quand on tient la bulle verticalement au-dessus du visage, de sorte que le courant soit descendant. »

Il est, en effet, impossible de concevoir ce retrait de la lame et cette expulsion de l'air intérieur, sans admettre que la lame soit tendue; le fait sur lequel s'appuie M. Henry peut donc être regardé comme une preuve expérimentale de la réalité de la tension, au moins dans les lames.

§ 152. Dans un travail⁸³ de 1845, M. Hagen applique, comme Young et Mossotti, d'une manière rigoureuse aux phénomènes capillaires le principe de la tension, bien qu'il ne considère cette force que comme hypothétique, et il arrive à plusieurs des résultats déjà donnés par Mossotti.

Prenant pour point de départ la seule condition qu'il doit y avoir équilibre entre les actions hydrostatiques et la tension, il démontre mathématiquement l'uniformité de cette dernière force dans deux cas simples, savoir celui d'un liquide soulevé ou abaissé entre deux plans solides, et celui d'un liquide soulevé ou abaissé dans un tube cylindrique.

M. Hagen cherche, par trois procédés différents, la valeur de la tension à la surface de l'eau. En premier lieu, il effectue une série de mesures de l'élévation du liquide entre deux plans verticaux parallèles, dont il fait varier la distance dans des limites étendues. Par des moyens qu'il indique, il détermine chaque fois, dans une section verticale perpendiculaire aux deux plans, l'écartement de ceux-ci, la hauteur du point le plus bas de la surface liquide comprise entre eux, et celle des points où cette surface vient les toucher; puis, appliquant à ces trois éléments une méthode rigoureuse de calcul, il en tire une valeur de la tension.

En second lieu, il mesure également l'élévation de l'eau dans des tubes cylindriques dont le diamètre intérieur varie de 1mm,23 à 3mm,42, et, par un calcul également précis, il en déduit encore la tension. Ce second procédé lui fournit des résultats plus concordants que le premier, et il en tire, en moyenne, pour la température de 10°, une valeur qui, traduite en milligrammes pour un millimètre de longueur, est égale à 7,53.

Il constate, en même temps, qu'une variation de quelques degrés dans la tempéra-

⁸³ *Ueber die Oberfläche der Flüssigkeiten.* (MÉM. DE L'ACAD. DE BERLIN, 1845, et ANN. DE M. POGGENDORFF, 1846, vol. LXVII, pp. 1 et 152).

ture est sans influence sensible sur la tension.

Le troisième procédé est fondé sur l'écoulement du liquide goutte à goutte: la tension est égale au poids d'une goutte divisé par le périmètre extérieur de l'orifice. Le poids d'une goutte s'obtient en recevant un nombre déterminé de ces gouttes dans un petit vase, et pesant le liquide recueilli. M. Hagen fait remarquer que ce procédé est moins exact que les précédents, parce que chaque goutte, en se détachant, laisse à l'orifice une petite portion de son volume.

Les mesures ci-dessus conduisent le physicien allemand à cette conclusion singulière, que la tension de l'eau va en décroissant jusqu'à une certaine limite, quand le liquide demeure exposé à l'air: la valeur 7,53 correspond à une surface fraîche.

Enfin M. Hagen reproduit l'opinion, déjà ancienne, que la couche superficielle des liquides a moins de mobilité que l'intérieur; selon lui, et contrairement aux idées de Poisson, cette couche est plus dense que le reste, et il attribue la tension à ce que les molécules étant ainsi plus rapprochées, elles s'attirent avec plus d'énergie. Nous reviendrons sur ces idées.

L'année d'après, le même savant a donné à ce Mémoire une suite⁸⁴ où il reprend la mesure des tensions. Il détermine d'abord, par le procédé de l'élévation entre deux plans parallèles, la tension de l'eau qui a séjourné pendant plusieurs heures dans un vase ouvert, et la valeur qu'il trouve, rapportée au millimètre⁸⁵ n'est plus que de 4,69, au lieu de 7,53 qui correspond à une surface fraîche; ainsi se confirme le fait de la diminution progressive de la tension de l'eau. M. Hagen soumet au même procédé l'alcool absolu et l'huile d'olive; les tensions obtenues ont été respectivement, par millimètre de longueur, 2,32 et 3,42. Il n'a pas remarqué, à l'égard de ces deux liquides, de décroissement dans la tension.

Il décrit ensuite un nouveau procédé : un anneau plat horizontal en bois est suspendu à une balance sensible, et équilibré; on établit le contact entre sa face inférieure et la surface du liquide, puis, au moyen de poids ajoutés très graduellement de l'autre côté de la balance, on fait monter peu à peu l'anneau, qui soulève de la sorte une certaine quantité de liquide, et l'on s'arrête lorsque la surface de celle-ci aboutit verticalement aux bords extérieur et intérieur de l'anneau. La force avec laquelle le liquide tire alors l'anneau de haut en bas, se compose de deux parties, savoir: 1° le poids de la portion du liquide soulevé située directement sous l'anneau, c'est-à-dire celui d'un cylindre annulaire de ce liquide ayant pour base la face inférieure de l'anneau et pour hauteur la distance de celle-ci au niveau; 2° la tension des surfaces courbes qui aboutissent aux deux bords de l'anneau. Si l'on soustrait du poids ajouté de l'autre côté de la balance la première de ces deux quantités, le reste représente donc la tension totale, et, pour avoir la tension par unité de longueur, il suffit de diviser ce reste par la somme des longueurs des deux bords.

Ce procédé, employé à l'égard de l'alcool absolu et de l'huile d'olives, a fourni les valeurs respectives 2,34 et 3,41, qui sont, on le voit, à fort peu près identiques aux précédentes. M. Hagen ajoute alors: « La concordance de ces résultats avec ceux déduits de l'élévation entre des plans parallèles, ou du phénomène capillaire proprement dit, ne laisse rien à désirer, et ainsi se vérifie l'hypothèse que la tension superficielle, qu'on a mesurée directement dans le dernier cas, est la seule cause du phénomène capillaire. »

⁸⁴ *Mém. de l'Acad. de Berlin*, 1846, et Ann. de M. Poggendorff 1849, vol. LXXVII, p. 449.

⁸⁵ Dans ce second Mémoire, M. Hagen exprime les tensions en fractions de gramme; mais, je ne sais pourquoi, il prend pour unité de longueur la ligne de Paris; j'ai donc ramené toutes les valeurs au millimètre, en les divisant par 2,256, valeur de la ligne de Paris en millimètres.

Ici donc M. Hagen cesse de considérer la tension comme une simple hypothèse, et voit dans les résultats ci-dessus une preuve de sa réalité.

M. Hagen essaie aussi la détermination de la tension du mercure; le procédé de la dépression dans les tubes cylindriques lui donne, par millimètre de longueur, 36,26, et celui des gouttes 41,14. Comme, dans ce dernier procédé, la surface est nécessairement plus fraîche, M. Hagen infère de la différence des deux résultats que, sur le mercure de même que sur l'eau, la tension décroît graduellement.

De l'empois et des solutions aqueuses de gomme arabique, à différents degrés de viscosité, lui fournissent des tensions très rapprochées de celle de l'eau.

Présumant, en conséquence de ses idées sur l'origine de la tension, que l'eau de savon devait à une tension plus forte que celle de l'eau pure la propriété de donner une mousse persistante et de se laisser aisément gonfler en bulles, il mesure la tension d'une faible solution de savon, et ne la trouve que de 3,72; il reconnaît, en conséquence, qu'il s'était trompé.

Disons ici que toutes les mesures rapportées dans ce second Mémoire ont été prises à la température de 18° à 19°.

M. Hagen termine en déduisant de l'ensemble de son travail les deux conséquences suivantes, qu'il présente, du reste, avec réserve, vu le petit nombre des liquides soumis à l'observation:

1° Le degré de fluidité n'a pas d'influence sur la tension.

2° La tension est d'autant plus faible que le liquide mouille mieux les autres corps. En effet, l'alcool mouille mieux que l'huile, car de l'alcool déposé sur une plaque enduite d'huile déplace la couche de ce dernier liquide; l'huile mouille évidemment mieux que l'eau, et celle-ci mieux que le mercure; or la tension va en croissant du premier au dernier de ces liquides.

§ 153. En 1849, le même savant a écrit un travail remarquable⁸⁶ sur les expériences de Savart relatives aux effets produits par le choc des parties continues de deux veines liquides animées de mouvements directement opposés, expériences dont je parlerai plus loin (§§232 et 233) avec détail. M. Hagen ne s'occupe que du cas d'orifices égaux et de charges égales; on sait qu'alors il se forme, autour du point de rencontre des deux veines, une lame plane circulaire normale à ces deux veines, et du bord de laquelle s'échappent une multitude de gouttelettes.

M. Hagen appelle d'abord l'attention sur ces faits: que, d'après les observations de Savart, le rayon du disque liquide est toujours de beaucoup inférieur à la hauteur de charge, et même, en général, n'atteint pas le quart de cette hauteur, et 2e que les gouttes ne s'élancent du contour du disque qu'avec une faible vitesse; il en conclut que la force vive du liquide qui s'étale, est en grande partie détruite à ce contour, et il attribue la destruction dont il s'agit à la tension des deux faces de la lame dans le sens perpendiculaire au rayon: si l'on décompose chacune des deux faces de la lame en anneaux concentriques infiniment étroits, tous ces anneaux partant de l'endroit où se fait la rencontre des deux veines, augmentent incessamment de diamètre en marchant vers le bord; de là résulte que leur tension dans le sens de leur circonférence doit être incessamment vaincue, ce qui ne peut avoir lieu sans perte de force vive; ou bien encore, ce qui revient au même, la tension dans le sens de la circonférence détermine, de la part de chaque point de l'anneau, une pression capillaire dirigée suivant le rayon et en sens contraire du mouvement du liquide; pression qui agit comme force retardatrice de ce mouvement, et produit ainsi la limitation du disque.

⁸⁶ *Ueber die Scheiben welche sich beim Zusammenstossen von zwei Wasserstrahlen bilden, und ueber die Auflösung einzelner Wasserstrahlen in Tropfen* (ANN. DE M. POGGENDORFF, vol. LXXVIII, p. 451).

M. Hagen décrit, à l'appui de cette théorie, les curieuses expériences que voici :

Si l'on introduit dans le disque liquide un fil tendu qui le traverse normalement à peu de distance du centre, la continuité est interrompue, et une échancrure se forme dans le disque à partir du fil; mais les deux bords de cette échancrure ne sont pas droits et simplement dirigés suivant les rayons; ils se montrent courbes et tournant leur convexité vers l'échancrure; c'est que la tension ci-dessus tire chacun de ces bords d'une manière continue vers ce qui reste du disque.

Si, au lieu d'un seul fil, on en emploie deux tendus à une petite distance l'un de l'autre des deux côtés du rayon vertical ascendant, la portion du disque correspondante à l'intervalle des deux fils forme une sorte de veine qui atteint une hauteur peu inférieure à la hauteur de charge; c'est qu'ici l'extension latérale n'a pas lieu, et M. Hagen conclut, en outre, de la grande hauteur de ce jet, que la destruction de la force vive dans le disque n'est point due au choc mutuel des deux veines.

Il soumet ensuite sa théorie au calcul, et arrive à la formule suivante, dans laquelle R est le rayon du disque liquide, ρ celui des deux veines, v la vitesse du liquide dans ces veines, T la tension du liquide sur l'unité de longueur, g la gravité et γ le poids de l'unité de volume du liquide:

$$R - \rho = \frac{\gamma}{2gT} \rho^2 v^2.$$

Comme γ , g et T sont des constantes, et comme, en outre, le rayon ρ des veines est toujours très petit relativement au rayon R du disque, cette formule exprime, on le voit, que le rayon du disque est sensiblement proportionnel au carré de celui des veines et au carré de la vitesse d'écoulement, ou, ce qui revient au même, à l'aire des orifices et à la charge; or ce sont là les deux lois énoncées par Savart.

Pour obtenir une vérification ultérieure de cette même formule, M. Hagen en tire, au moyen des valeurs de R , γ et ρ déduites des observations de Savart et de ses observations propres, la valeur de T correspondante à l'eau, et trouve un résultat qui s'accorde assez bien avec celui que, dans son premier Mémoire, il avait déduit des phénomènes capillaires pour le cas d'une surface fraîche: la valeur à laquelle il parvient ainsi est 7,74, et l'on remarquera que, dans l'expérience des disques liquides, la surface est nécessairement fraîche, puisqu'elle est toujours renouvelée. M. Hagen fait observer, d'ailleurs, que la mesure du diamètre du disque liquide est difficile, parce que les gouttes se détachent irrégulièrement du bord, et qu'en même temps elles étirent fortement la lame, de sorte que le diamètre de celle-ci change continuellement dans chaque direction.

Toutes ces concordances, on le comprend, constituent une preuve ultérieure de l'existence de la tension; ici, en effet, le rôle assigné à cette force est absolument autre que dans les expériences des deux Mémoires précédents.

Enfin M. Hagen obtient, pour représenter l'épaisseur b de la lame à une distance quelconque r du centre, cette autre formule :

$$b = \frac{\rho^2(R - \rho)}{r(R - r)},$$

d'où il déduit la conséquence que le minimum d'épaisseur de la lame n'est pas vers le bord de celle-ci, mais correspond à $r = \frac{R}{2}$ c'est-à-dire se trouve au milieu du rayon.

Bien qu'il y ait, à mon avis, un peu d'obscurité sur le rôle que M. Hagen fait jouer à la tension dans le phénomène dont il s'agit, cependant les effets produits par les fils tendus en travers du disque liquide, l'accord de la première des formules ci-dessus avec les lois de Savart, et la coïncidence entre la valeur numérique de la tension

de l'eau déduite de cette formule et celle que l'auteur avait trouvée par une méthode essentiellement différente, ne permettent guère de douter que la théorie en question ne soit l'expression de la vérité. Il est vivement regrettable que M. Hagen n'ait point cherché à s'assurer par l'expérience si la lame a réellement un minimum d'épaisseur vers le milieu de son rayon; c'eût été une épreuve décisive.

Je dois présenter ici, à l'égard des résultats du calcul, deux remarques importantes qui paraissent avoir échappé à l'auteur.

En premier lieu, si l'on se transporte au bord même de la lame, c'est-à-dire si l'on fait, dans la seconde formule, $r = R$, on trouve $b = \text{l'infini}$, ce qui est impossible. Mais si l'on fait $r = R - \rho$, on obtient $b = \rho$; ainsi, même à une distance du bord qui n'est égale qu'au rayon des veines, l'épaisseur de la lame ne serait encore elle-même égale qu'à ce rayon : par exemple, avec des orifices de 1mm,5 de rayon, la lame de Savart atteignait un rayon de 190mm; à une distance du bord égale seulement à 1mm,5, l'épaisseur de cette lame n'était donc aussi, d'après la formule, que de 1mm,5. On voit conséquemment que, malgré l'augmentation en épaisseur à partir du milieu du rayon, cette épaisseur demeure cependant fort petite jusque très près du bord, et c'est dans le petit intervalle restant que devrait se faire l'accroissement jusqu'à l'infini; or, vers le bord de la lame, se produit, nous le savons, un phénomène particulier que la formule ne pouvait comprendre, savoir: la formation des gouttes, lesquelles emportent le liquide qui occasionnerait le rapide accroissement d'épaisseur indiqué par la formule.

Pour que la théorie soit absolument complète, il faut donc rendre raison de la formation de ces gouttes; M. Hagen avoue qu'il ne trouve pas d'explication satisfaisante, et cela devait être, car le phénomène dépend en grande partie, ainsi qu'on le verra (§ 426), d'un principe que j'ai exposé dans ma 2^e Série; or M. Hagen ne pouvait avoir connaissance de celle-ci, qui a paru a peu près en même temps que son Mémoire.

En second lieu, si, dans la même formule, on fait $r = \rho$, on trouve aussi $b = \rho$, d'où il suivrait qu'à l'origine du disque liquide, c'est-à-dire à une distance du centre égale au rayon même des deux veines qui se heurtent, la lame n'aurait pas plus d'épaisseur que près du bord; or Savart dit expressément que la lame est plus épaisse à sa partie centrale qu'à son contour. Mais c'est qu'à cette partie centrale se produit également un phénomène particulier dont le calcul de M Hagen aurait difficilement tenu compte: le liquide des deux veines ne peut changer brusquement la direction de son mouvement en des directions à angle droit avec celle-ci; les filets liquidés de ces veines, dans le voisinage du lieu où elles se rencontrent, doivent s'infléchir pour passer d'une manière continue de l'une des directions à l'autre; il en résulte nécessairement une notable augmentation d'épaisseur vers la partie centrale de la lame, mais, un peu au delà, les deux faces de celle-ci peuvent être regardées comme se trouvant dans les conditions du calcul dont il s'agit.

§ 154. Si la couche superficielle d'une masse liquide pleine est dans un état de tension, les lames liquides doivent être assimilées à des membranes tendues, puis que la tension existe à leurs deux faces. On voit, d'après cela, que la tension d'une lame est double de celle de la couche superficielle d'une masse pleine formée du même liquide : en adoptant, par exemple, pour la tension de l'eau la valeur 7,53 milligrammes trouvée par M. Hagen, la tension d'une lame d'eau serait de 15,06 milligrammes.

§ 155. En 1855, M. J. Thomson⁸⁷ a expliqué par des différences de tension quelques phénomènes singuliers produits à la surface de certains liquides:

Si l'on dépose doucement, au milieu de la surface de l'eau contenue dans un verre,

⁸⁷ On certain curious motions observable at the surfaces of wine and other alcoholic liquors (Philos. MAGAZ., 4^{me} série, vol. X, page 330).

une petite quantité d'alcool, on voit cette surface fuir rapidement de tous les côtés, et si la portion de la paroi solide qui s'élève au-dessus du niveau est mouillée d'eau, on voit même le liquide monter le long de cette paroi et s'y accumuler de manière à former quelquefois, à une hauteur considérable au-dessus du niveau, un anneau horizontal que son poids fait ensuite retomber.

Si l'on étend une couche d'eau de peu d'épaisseur sur une surface solide horizontale bien nettoyée, et qu'au milieu de cette couche on dépose un peu d'alcool, l'eau se retire immédiatement tout à l'entour, laissant un espace creux où la surface solide est mise à nu ou plutôt n'est plus recouverte que d'une lame d'alcool excessivement mince.

C'est que, la tension de l'alcool étant inférieure à celle de l'eau, l'équilibre ne peut plus exister lorsqu'une portion de la surface est recouverte d'alcool en vertu de leur excès de tension, les portions aqueuses de la surface totale tirent violemment à elles la portion alcoolique.

M. Thomson attribue à la même cause les mouvements curieux qu'on observe ordinairement dans la mince couche de vin dont on a mouillé, au-dessus du niveau, la paroi intérieure d'un verre contenant de ce liquide; en effet, la mince couche dont il s'agit perd son alcool, par l'évaporation, plus rapidement que le reste, et acquiert ainsi un excès de tension.

§ 156. Dans une Note⁸⁸ communiquée en 1858 à la Société Royale, Sir W. Thomson, partant du principe de la tension tel que l'a posé Young, donne, en fonction de cette force, l'expression analytique suivante de la pression p exercée par une bulle creuse sur l'air emprisonné:

$$p = \frac{4T}{r} + \Pi$$

expression dans laquelle T est la tension du liquide dont la bulle est formée, r le rayon de cette bulle, et Π la pression atmosphérique. Cette formule, que l'auteur ne démontre pas, est exacte, comme nous le verrons bientôt.

Par une série de calculs, Sir W. Thomson arrive ensuite, relativement aux lames liquides qui se développent, à un principe que nous rapporterons plus tard.

§ 156bis. Langberg a fait voir, dans un article⁸⁹ publié en 1859, que les actions capillaires ont une influence notable sur les mesures aréométriques, l'instrument étant tiré de haut en bas par le poids du liquide soulevé contre sa tige. Pour évaluer ce poids, Langberg fait intervenir la tension qui s'exerce à la circonférence suivant laquelle la surface du liquide aboutit à la tige solide; il paraît, du reste, ne considérer cette force que comme hypothétique. La tension variant d'un liquide à un autre, on comprend que lorsqu'on emploie un aréomètre à la mesure des densités de différents liquides, les résultats ne peuvent être bien comparables que si l'on tient compte de l'influence dont il s'agit, influence qui n'est pas négligeable.

§ 157. En 1863, Wilhelmy⁹⁰ a tâché de soumettre à une vérification expérimentale une proposition énoncée par Wertheim, et suivant laquelle le poids du liquide soulevé par la capillarité le long d'une surface solide que ce liquide mouille, varie avec la nature et avec la courbure de celle-ci. Les expériences de Wilhelmy semblent confirmer cette proposition; or si l'on considère le poids dont il s'agit comme soutenu par la tension

⁸⁸ *On the thermal Effect of drawing out a Film of liquid* (PHILOS. MAGAZ., 4me série, vol. XVII, p. 61).

⁸⁹ *Ueber den Einfluss der Capillarattraction auf Aräometermessungen* (ANN. DE M. POGGENDORFF, vol. CVI, p. 299)

⁹⁰ *Ueber die Abhängigkeit der Capillaritäts-Constanten des Alkohols von Substanz und Gestalt des benetzten festen Körpers* (ANN. DE M. POGGENDORFF, 1863, vol. CXIX, p. 177), et *Ueber die Abhängigkeit der Capillaritäts-Coefficienten der Flüssigkeiten von der chemischen Beschaffenheit und Gestalt der festen Wand* (Ibid. 1864, vol. CXXII, p. 1).

du liquide, et comme servant à en trouver la mesure (§§152 et 161), ces mêmes expériences tendent à jeter quelque incertitude sur la précision des valeurs des tensions ainsi obtenues.

§ 158. Aujourd'hui l'on possède des démonstrations théoriques de la réalité de la tension, et l'on a plu moyens nouveaux de la constater par l'expérience.

La première de ces démonstrations a été donnée, en 1864, par M. Lamarle, dans la première partie de son beau Mémoire *Sur la stabilité des systèmes liquides en lames minces*⁹¹, Mémoire sur lequel j'aurai à revenir; elle suppose une masse liquide pleine, entièrement libre, soumise à ses seules attractions moléculaires, et conséquemment de forme sphérique⁹².

M. Lamarle arrive à conclure non seulement que la couche superficielle d'une semblable masse est dans un état de tension, mais, en outre, que cette tension est indépendante du rayon de la sphère; enfin il fait remarquer que les mêmes résultats s'étendent sans difficulté à toutes les surfaces liquides d'équilibre, c'est-à-dire que, dans ces surfaces et pour un même liquide, la tension est constante et indépendante des courbures, ainsi que cela avait été établi par Mossotti et par M. Hagen.

Je ne reproduirai pas la démonstration dont il s'agit telle qu'elle est exposée dans le Mémoire; je la modifierai, d'après les indications de M. Lamarle lui-même, en l'appliquant aux lames; elle sera ainsi plus aisément comprise. Sous cette forme, elle revient, au fond, à celle de M. Henry (§ 151), rendue plus précise et plus complète.

Supposons une sphère laminaire, une bulle de savon, par exemple, et coupons-la idéalement par un plan qui la partage, en deux hémisphères; imaginons ce plan solidifié, ce qui n'altérera pas l'équilibre, et considérons en particulier l'un des hémisphères. La lame qui constitue celui-ci presse, nous le savons, sur l'air qu'elle emprisonne entre elle et le plan, et ce volume d'air réagit, par son élasticité, avec une force égale; l'hémisphère laminaire et le plan sont donc poussés l'un dans un sens, l'autre dans le sens opposé, d'où résulte une traction de la lame tout le long de la petite bande par laquelle elle adhère au plan; or une traction égale et contraire est évidemment exercée le long de la même bande par l'autre hémisphère; il y a donc, sur toute la longueur de la bande étroite dont il s'agit, traction en deux sens opposés et perpendiculaires à cette longueur; en d'autres termes, il y a tension de la lame. Enfin, comme rien ne détermine la direction de notre plan coupant, il s'ensuit que la même tension existe dans toute l'étendue de la lame, et qu'elle a la même valeur dans toutes les directions tangentielles autour de chaque point.

La tension est considérée ici comme une traction; mais la lame résistant par une force égale et contraire, on peut aussi bien regarder cette dernière force comme constituant la tension. Sous ce point de vue, la tension est une force contractile, une tendance continuelle de la lame à revenir sur elle-même en diminuant d'étendue.

Le mode de démonstration ci-dessus conduit à une expression de la tension en données mesurables. Désignons par p la pression rapportée à l'unité de surface qu'exerce la lame sur l'air emprisonné, et conséquemment aussi la pression de dedans en dehors due à la réaction de cet air. La force totale qui agit ainsi de dedans en dehors sur l'un des hémisphères laminaires et tend à le séparer du plan, est nécessairement égale à celle qui pousse le plan lui-même; elle a donc pour mesure le produit de la surface de celui-ci par la quantité p , c'est-à-dire $\pi r^2 p$, où r est le rayon de la sphère laminaire; je néglige ici la petite différence entre le rayon de la face extérieure de la lame et celui

⁹¹ MÉM. DE L'ACAD. DE BELGIQUE, tomes XXXV et XXXVI.

⁹² L'exactitude de cette démonstration a été contestée par Dupré, et maintenue par M. Lamarle (voir les *Comptes rendus*, t. LXIV, pp. 593, 739 et 902).

de la face intérieure, à cause de la minceur extrême des lames liquides. Cette expression représente en même temps, d'après ce que j'ai dit plus haut, la tension totale sur la longueur de la bande étroite suivant laquelle la lame est coupée par le plan, et, par conséquent, pour avoir la tension sur l'unité de longueur, tension que je nommerai t , il suffit de diviser cette même expression par la longueur $2\pi r$ de la bande en question, ce qui donne⁹³ $t = \frac{r\rho}{2}$. Mais on a vu (§ 117) que si d est le diamètre d'une sphère laminaire, h la hauteur en millimètres à laquelle le liquide dont la lame est formée s'élèverait dans un tube capillaire d'un millimètre de diamètre, et ρ la densité de ce liquide, la pression qu'exerce la lame équivaut, pour une surface d'une étendue quelconque, et, par suite, pour l'unité de surface, au poids d'une colonne d'eau ayant pour base cette surface et, pour hauteur, $\frac{2h\rho}{d} = \frac{h\rho}{r}$. En prenant pour unité de surface le millimètre carré, la quantité $\frac{h\rho}{r}$ exprime donc en milligrammes la pression que nous avons désignée par p ; faisant la substitution dans l'expression de t trouvée plus haut, il vient :

$$t = \frac{h\rho}{2}.$$

ce qui donne, en milligrammes, la tension de la lame sur l'unité de longueur.

Cette formule se déduirait d'ailleurs de celles de Mossotti; elle résulte également du calcul de M. Hagen relatif aux liquides dans les tubes cylindriques (§152), quand on suppose le diamètre du tube égal à 1 millimètre, et quand on considère la surface supérieure de la colonne comme formant un hémisphère concave, ce qui est permis dans le cas d'un si petit diamètre.

§ 159. Cette même formule ne contenant pas r , on voit que la tension dont il s'agit est indépendante du rayon et conséquemment de la courbure de la lame.

La constance de la valeur de la tension, quelle que soit la courbure de la sphère laminaire, sera pleinement confirmée plus loin par l'expérience (§§175 et 179).

Maintenant si l'on imagine que le rayon de la sphère laminaire croisse jusqu'à l'infini, la lame deviendra plane, et il résulte de ce qui précède qu'elle aura encore la même tension. Cependant on n'arrive de cette manière à la tension d'une lame plane qu'en considérant cette lame comme indéfiniment étendue, et en lui assignant ainsi dès conditions irréalisables; on pourrait dès lors se demander si une lame plane limitée, par exemple une lame de liquide glycérique formée dans un anneau en fil de fer, lame qui n'exerce aucune pression sur l'air, possède effectivement une tension; or nous verrons aussi, dans les paragraphes que nous venons de citer, des expériences qui prouvent qu'une lame plane limitée est réellement tendue, et que sa tension est égale à celle de lames courbes formées du même liquide.

§ 160. Je ne dois pas négliger de mentionner un second point de vue sous lequel M. Lamarle, dans le Mémoire que j'ai cité, envisage la tension; le voici : suivant les idées admises en général aujourd'hui, la densité de la couche superficielle est moindre que celle de l'intérieur du liquide, et conséquemment, dans cette couche, l'écartement des molécules est plus grand; si donc, par un changement de la forme d'une masse liquide sans changement du volume, l'étendue de la couche superficielle vient à décroître et qu'ainsi une partie des molécules de cette couche se rendent dans l'intérieur, ces molécules se rapprochent davantage; or l'attraction, par sa nature même, fait incessamment effort pour rapprocher les molécules; elle doit donc réduire la couche superficielle au minimum d'étendue, puisque, par là, elle exerce sa tendance d'une manière active.

⁹³ Si l'on représente avec Sir W. Thomson (S 156), par T la tension du liquide, c'est-à-dire celle d'une des faces de la lame, on a $t = 2T$; en substituant cette valeur dans l'expression ci-dessus, résolvant par rapport à p , et ajoutant la pression atmosphérique Π , on retombe sur la formule de Sir W. Thomson.

Ainsi, d'après M. Lamarle, la tension est due à ce que, par une diminution de la couche superficielle, la tendance constante de l'attraction au rapprochement des molécules trouve à se satisfaire autant que possible.

§ 160 M. Marangoni s'est occupé⁹⁴, en 1865, de l'étalement d'une goutte liquide sur la surface d'un autre liquide, comme d'une goutte d'huile sur l'eau. Il attribue le phénomène à la tension, et, par des considérations judicieuses, il arrive à la loi suivante:

Il y a étalement si la tension du liquide sous-jacent l'emporte sur la somme des tensions respectives du liquide dont la goutte est formée et de la surface de contact des deux liquides. Quand la condition inverse a lieu, la goutte prend et conserve une forme lenticulaire.

L'auteur avance qu'une lame d'eau de savon développée dans un anneau solide, peut être traversée sans se briser par une veine liquide, si la tension du liquide de cette veine est égale ou supérieure à celle du liquide de la lame; c'est ce qui a lieu, par exemple, avec des veines d'eau de savon, d'eau pure, d'huile, de sulfure de carbone, et même de mercure; mais si la différence des tensions est en sens contraire, comme avec des veines d'alcool ou d'éther, la lame éclate immédiatement. Il suffit même, pour qu'elle disparaisse, de la toucher simplement avec une pointe mouillée de l'un de ces deux liquides.

Afin de montrer que l'adhérence entre deux liquides modifie la tension à leur surface commune, M. Marangoni introduit dans un tube capillaire un index formé de deux liquides différents en contact, par exemple d'eau et de sulfure de carbone; alors la surface de contact des deux liquides tourne sa concavité du même côté que la surface libre du sulfure de carbone; or, quand le tube est placé horizontalement, on voit la petite colonne marcher du côté que regarde la surface libre de l'eau. Cela étant, si l'on désigne par A la résultante, dans le sens de l'axe du tube, de la tension du ménisque à l'extrémité de l'eau, et par C et B les quantités analogues relatives à la surface libre du sulfure de carbone et à la surface commune, le mouvement observé indique qu'on a $A > C + B$, d'où $B < A - C$. Ainsi, non seulement la tension des surfaces en contact est modifiée, mais, dans le cas des deux liquides en question, elle est moindre que la différence des tensions de ceux-ci.

§ 161. Dupré a publié par parties, de 1865 à 1868, un travail remarquable⁹⁵, où il traite par des méthodes nouvelles une suite de questions concernant les actions moléculaires, et où il donne aussi une démonstration de l'existence réelle de la tension :

Il établit d'abord que, pour séparer en deux une masse liquide soit par arrachement perpendiculaire, soit par glissement, il faut vaincre une résistance, et que, réciproquement, lorsque deux surfaces liquides peuvent se réunir, il y a une force résidant dans leurs couches superficielles qui provoque la réunion; il la nomme *force de réunion*.

Partant de ce principe, il démontre qu'une masse liquide ne peut changer de forme avec diminution dans l'étendue de sa surface, sans qu'un travail moléculaire proportionnel à cette diminution soit produit par la force de réunion⁹⁶. Or cette force toujours présente doit tendre sans cesse à opérer le travail dont il s'agit, et, par suite, à rendre la surface minima; la couche superficielle des liquides possède donc une force contractile, ou une tension.

Dupré indique plusieurs expériences fort simples au moyen desquelles on rend la tension manifeste soit dans la surface libre d'une masse liquide pleine, soit dans une

⁹⁴ *Sull' espansione delle gocce d'un liquido galleggianti sulla superficie di altro liquido*. Pavie.

⁹⁵ Cinquième, sixième et septième Mémoire *Sur la théorie mécanique de la chaleur* (ANN. DE CHIM. ET DE PHYS. DE PARIS, 4e série, tomes VI, VII, IX, XI et XIV).

⁹⁶ Dans le septième Mémoire, Dupré décrit un instrument au moyen duquel il a vérifié expérimentalement cette proportionnalité entre le travail produit et la diminution de surface.

lame liquide. Dans l'une de ces expériences, par exemple, un poids est soulevé par la tension d'une lame plane qu'on se figure une plaque métallique rectangulaire verticale, dont le bord horizontal inférieur présente, en son milieu, une échancrure également rectangulaire. Cette plaque étant préalablement mouillée d'eau de savon, si l'on applique contre elle devant l'échancrure, et à la hauteur du bord supérieur de celle-ci, une bande solide étroite et très légère, un peu plus longue que la largeur de l'échancrure et mouillée aussi d'eau de savon, puis qu'on fasse glisser cette petite bande de haut en bas, une lame liquide se forme nécessairement dans la portion de l'échancrure ainsi balayée; or, dès qu'on abandonne la petite bande à elle-même, elle remonte brusquement malgré son poids.

Dupré attribue la tension à ce que, dans l'épaisseur de la couche superficielle, les actions moléculaires seraient, en moyenne, plus intenses suivant le sens tangentiel que suivant le sens normal; c'est, selon lui, l'excès des premières sur les secondes qui constitue la tension.

Désignant celle-ci par F , il trouve, d'une manière générale, pour la pression capillaire normale provenant des courbures en un point quelconque d'une surface liquide, l'expression $F \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right)$; le coefficient constant de l'expression de Laplace est donc bien la tension dans tous les cas, et, pour un même liquide, celle-ci est toujours uniforme, c'est-à-dire complètement indépendante du point considéré de la surface, ainsi que des courbures.

Dupré fait remarquer que la tension des lames liquides est indépendante de leur épaisseur, du moins tant que cette épaisseur n'est pas inférieure à une certaine limite. En effet, la tension n'existant que dans les deux couches superficielles, couches excessivement minces, nous le savons, il est clair que le liquide compris entre elles est sans influence, et qu'ainsi lorsque, par une atténuation de la lame, il diminue en quantité, la tension doit demeurer invariable.

Cette déduction se trouve vérifiée par les expériences que j'ai décrites à l'égard de la pression exercée par une bulle creuse sur l'air intérieur. On a vu, en effet (§ 158) que la tension de la lame est liée à la pression dont il s'agit par la relation $t = \frac{p}{2}$, d'où il suit que, pour une bulle d'un rayon donné, si, malgré l'amincissement progressif de la lame, la pression p ne change pas, il en sera de même de la tension t ; or j'ai constaté, on l'a vu (§ 125), cette constance de la pression à l'égard d'une lame sphérique qui s'amincissait spontanément et n'a éclaté que lorsque sa couleur, sous l'incidence normale, avait atteint le passage du jaune au blanc du premier ordre.

Mais, ainsi que- je l'ai fait observer (§ 123), l'invariabilité de la pression suppose à la lame une épaisseur suffisante pour qu'il y ait du liquide interposé entre les deux couches superficielles, c'est-à-dire une épaisseur supérieure au double du rayon de l'attraction moléculaire; car si la lame s'amincit assez pour que les deux couches superficielles arrivent au contact, puis se pénètrent mutuellement, il est naturel d'admettre que la pression, et conséquemment la tension, diminue par suite de la diminution dans le nombre des molécules agissantes; on est donc conduit à cette conséquence que la limite au-dessous de laquelle la tension commence à décroître, est égale au double du rayon de l'attraction moléculaire.

Dans son cinquième Mémoire, où il fait abstraction de la différence de constitution entre la couche superficielle et le reste de la masse, Dupré avait trouvé que, pour un même liquide à diverses températures, la tension est proportionnelle au carré de la densité; mais, dans son sixième Mémoire, où il tient compte de la différence dont il s'agit, il reconnaît que cette proportionnalité n'est pas exacte.

L'expression $t' = \frac{h\rho}{4}$ de la tension d'une seule couche superficielle⁹⁷ montre, du reste, que la tension varie en sens inverse de la température, puisqu'il en est ainsi à la fois de h et de ρ ; mais comme, pour la plupart des liquides, l'influence de la température sur ces deux quantités n'est pas très considérable, il s'ensuit que la tension change peu par les fluctuations de la température ordinaire: pour l'eau, par exemple, d'après un tableau que donne Dupré, de 10° à 32°, la tension ne décroît que de 7,48 à 7,15. On a vu que ce peu de variabilité avait déjà été observé par M. Hagen.

Dupré avance que, par suite de l'influence de la température sur la tension, si l'on chauffe une partie seulement d'une surface liquide, l'équilibre doit être altéré, et il ajoute : « Dans le cas des lames, le liquide formant les deux couches superficielles de la partie chauffée est entraîné vers les parties froides par des différences de forces contractiles..... La lame s'amincit et finit par crever. » Il ne décrit aucune expérience, mais, comme nous le verrons bientôt, on peut en faire à ce sujet de fort curieuses.

Il donne le moyen de déterminer, par le calcul, la tension d'un liquide en fonction des équivalents chimiques des éléments de celui-ci.

Quand une lame liquide éclate, elle revient sur elle même par l'effet de sa tension; la chose se montre aux yeux dans des expériences que nous devons réserver pour un autre chapitre; or Dupré traite le phénomène par ses méthodes, et arrive, pour exprimer la vitesse y du retrait de la lame, à la formule:

$$v = \sqrt{\frac{4gF}{e\Delta}},$$

dans laquelle F est la tension d'une seule couche superficielle, g la gravité, e l'épaisseur de la lame et Δ la densité du liquide; d'où l'on voit que cette vitesse est uniforme, qu'elle est en raison directe de la racine carrée de la tension et en raison inverse des racines carrées de l'épaisseur et de la densité. Dupré trouve, de cette manière, que la vitesse de retrait d'une lame de liquide glycérique de 1/9000 de millimètre d'épaisseur serait d'environ 32 mètres par seconde.

La valeur que la formule ci-dessus assigne à la vitesse de retrait est probablement assez exacte pour la plupart des liquides; mais, ainsi que nous le verrons plus loin, il y a des liquides à l'égard desquels il en est autrement, parce que le phénomène est influencé par un élément dont Dupré ne pouvait tenir compte. Ajoutons que le retrait est, en général, accompagné d'une particularité qui le complique; nous en parlerons aux § 428 et 429.

Dupré cherche aussi la loi d'un autre phénomène qu'on peut également rapporter à la tension, savoir la diminution progressive du diamètre d'une bulle quand on laisse ouvert le tube qui a servi à la gonfler; il parvient à ce résultat que, pour deux bulles formées du même liquide, toutes choses égales d'ailleurs, les carrés des temps pendant lesquels elles se vident sont entre eux comme les 7mes puissances de leurs diamètres. Il vérifie cette loi par une suite d'expériences sur des bulles de liquide glycérique.

Enfin Dupré décrit plusieurs procédés au moyen desquels il a mesuré la tension d'un grand nombre de liquides.

Le premier consiste dans l'emploi d'un aréomètre de Nicholson modifié de la manière suivante : le plateau supérieur est remplacé par une cuvette cylindrique dans laquelle on verse le liquide à essayer; deux fils de laiton partant horizontalement des extrémités d'un diamètre de cette cuvette, se replient ensuite pour descendre à l'extérieur du vase contenant l'eau, et se réunir au-dessous du fond par l'intermédiaire d'un plateau

⁹⁷ Je n'ai pas besoin de faire remarquer que cette expression est simplement la moitié de celle de la tension d'une lame (§ 158).

destiné à recevoir le lest et les poids. Après avoir établi l'affleurement, on descend verticalement dans la cuvette une lame solide mince, susceptible d'être mouillée par le liquide, et dont le bord inférieur est bien horizontal; dès que ce bord touche le liquide, celui-ci s'élève par l'action capillaire le long des deux faces de la lame, et sa tension soulève l'aréomètre d'une certaine quantité; on ajoute alors des poids pour ramener l'affleurement; et de ces poids on déduit la tension en divisant leur valeur par le périmètre du bord de la lame. J'ometts ici quelques détails de moindre importance qu'on trouvera dans le Mémoire, ainsi qu'une petite correction à faire subir au résultat quand on veut une grande exactitude.

La second procédé est, à quelques différences près dans l'appareil, celui dont j'ai fait usage (§§119 à 121) pour l'évaluation de la pression des bulles⁹⁸ la tension est donnée alors par la relation, rappelée plus haut, $t = \frac{rp}{2} = \frac{pd}{4}$. D'après cela, pour la tension de la surface d'une masse pleine formée du même liquide, on a $t = \frac{pd}{8}$, expression que trouve également Dupré. Ce physicien a disposé son appareil de manière à pouvoir opérer sur de très petites bulles (2mm,5 à 3 de diamètre), ce qui lui a permis de soumettre à l'expérience des liquides, tels que l'eau, dont les bulles un peu grosses ne se formeraient pas.

À l'aide de ce même appareil, Dupré a vérifié, comme je l'avais fait (§ 121), la constance du produit pd de la pression par le diamètre de la bulle.

Le troisième procédé n'est qu'une modification du précédent: au moyen du même appareil encore, une très petite bulle d'air est gonflée au sein du liquide à essayer, mais aussi près que possible de la surface de celui-ci, dans ce cas, on n'a à considérer que la tension d'une seule couche superficielle; seulement, pour avoir un résultat précis, il faut tenir compte de la petite pression hydrostatique due au liquide ambiant.

Un quatrième procédé est basé sur ce que la hauteur d'un jet de liquide lancé de bas en haut par un orifice de très petit diamètre, doit être notablement diminuée par la tension de la surface de ce jet. Dupré parvient à lier, au moyen d'une formule, cette tension aux autres éléments du phénomène. La formule dont il s'agit contient des termes qui dépendent de quantités dont l'évaluation est impossible, telles que le frottement contre le bord de l'orifice; mais Dupré, à l'aide d'un artifice ingénieux, écarte la difficulté, et les résultats de l'expérience s'accordent d'une manière très satisfaisante avec ceux des autres procédés.

Dupré tire aussi un procédé de l'écoulement goutte à goutte, et sa méthode évite l'inconvénient signalé par M. Hagen (§ 152).

Enfin, dans le cas d'une goutte liquide déposée sur un plan horizontal qu'elle ne mouille pas, il obtient une relation entre la tension, le poids de la goutte, la densité du liquide et le diamètre du cercle de contact avec le plan; d'où un dernier procédé, qui, du reste, n'est applicable qu'au mercure et aux solides fondus.

Le cinquième Mémoire donne, dans un tableau, les tensions de dix-huit corps, la plupart liquides à la température ordinaire, d'autres liquéfiés par la chaleur. Pour les métaux à l'état de fusion, Dupré obtient, par le dernier procédé ci-dessus, des valeurs beaucoup plus élevées que celles qui appartiennent aux liquides ordinaires, à l'exception du mercure: il trouve, par exemple, pour la tension de l'or fondu, 96,2, et, pour celle de l'étain fondu, 51,2.

§ 162. Les expériences de Dupré ont conduit, en 1866, M. Van der Mensbrughe⁹⁹ à imaginer trois nouveaux procédés pour constater la tension des lames liquides,

⁹⁸ Lorsque Dupré a rédigé son 5^{me} Mémoire, il ne connaissait pas la partie de mes recherches rappelée ci-dessus (Voir la note du § 196 de ce 5^{me} Mémoire).

⁹⁹ *Sur la tension des lames liquides* (BULLET. DE L'ACAD. DE BELGIQUE, 2^{me} série, tome XXII, p.

procédés dont deux permettent, en outre, d'évaluer cette tension. Voici le premier :

Dans un contour plan et horizontal en fil de fer, on réalise une lame de liquide glycérique; on noue ensemble les deux bouts d'un fil de soie très fin de longueur convenable, puis, après avoir mouillé ce fil du même liquide, on le dépose avec précaution sur la lame, où il forme un contour irrégulier. Cela fait, on crève la portion de la lame comprise à l'intérieur de ce contour; à l'instant même le fil de soie se tend et prend une figure exactement circulaire. C'est que la portion restante de la lame se contracte en vertu de sa tension, de manière à occuper la moindre étendue, ce qui exige que l'ouverture limitée par le fil devienne aussi grande que possible, et conséquemment circulaire.

M. Van der Mensbrugge se demande quelle disposition le fil doit adopter si l'on effectue la même expérience sur une surface laminaire courbe, en choisissant, bien entendu, une surface à courbure moyenne nulle. Il soumet la question au calcul, et arrive aux lois suivantes:

1° Le fil est également tendu dans toute sa longueur.

2° La courbe représentée par le fil a partout le même rayon de courbure.

3° Le rapport entre la tension du fil et le rayon de courbure est indépendant de la forme de la surface et de la longueur du fil, et est égal à la tension de la lame.

Le second procédé est une modification du premier. Le contour solide qui contient la lame est rectangulaire et vertical; le fil de soie, au lieu de constituer un contour fermé, est attaché par l'une de ses extrémités en un point du côté horizontal inférieur du rectangle solide, il quitte la lame en un autre point de ce même côté, et son extrémité libre soutient un poids léger. Après la rupture de la portion de lame ainsi interceptée, le fil se tend, et prend, si le poids suspendu n'est pas trop fort, la forme d'une demi-circonférence. A la vérité, l'équilibre est instable, mais il se maintient par le petit frottement du fil contre le côté du rectangle. Dans ces conditions, qu'on réalise au moyen de certaines précautions, le poids suspendu donne la tension du fil, et le rayon de la demi-circonférence dessinée par celui-ci se mesure directement au compas; pour avoir la tension de la lame liquide, il suffit donc, d'après la troisième loi ci-dessus, de diviser la première quantité par la seconde.

Dans le troisième procédé, la lame est une portion de caténoïde, attachée par son bord supérieur à un anneau solide horizontal et fixe, et, par son bord inférieur, à un anneau solide plus petit, également horizontal, qu'elle tient suspendu. Ce dernier anneau soutient lui-même un plateau très léger, sur lequel on verse doucement du sable; le système solide suspendu descend au fur et à mesure, en étendant la lame, et l'on s'arrête lorsque l'élément de la chaînette méridienne qui aboutit à l'anneau mobile est devenu vertical ou à très peu près; on le reconnaît à ce que l'équilibre devient alors instable. Ce point atteint, on a la tension de la lame en divisant par la circonférence de l'anneau mobile le poids total du système suspendu.

M. Lamarle, dans son rapport¹⁰⁰ sur la Note que je viens d'analyser, signale une quatrième loi relative à la forme que prend le fil après la rupture de la portion de lame interceptée; cette loi consiste en ce que la direction du fil doit être partout celle suivant laquelle la courbure de la surface est nulle. Or M. Lamarle fait observer que la coïncidence de cette même loi avec les trois autres est généralement impossible sur les surfaces à courbure moyenne nulle; il le montre en particulier pour le caténoïde, et il en conclut que, dans les cas de cette nature, la forme de la lame doit nécessairement être altérée ; il ne connaît, pour le moment, que deux surfaces, savoir le plan et l'hélicoïde

305).

¹⁰⁰Bullet. de l'Acad. De Belgique, 1866, 2me série, t. XXII, p. 272.

gauche à plan directeur, susceptibles de satisfaire à l'ensemble des quatre lois.

M. Van der Mensbrugge a donc repris ses expériences, et les a exposées dans une deuxième Note¹⁰¹; il a vérifié la conclusion de M. Lamarle sur la non déformation de l'hélicoïde gauche, et il a constaté, par un procédé ingénieux, la déformation du caténoïde; il trouve, du reste, que cette déformation n'est bien notable que dans le voisinage du fil. Ces faits remarquables montrent une fois de plus l'accord constant de l'expérience avec la théorie.

Cette deuxième Note se termine par la description d'une expérience curieuse : une lame de liquide glycérique est réalisée dans un anneau vertical en fil de fer; on dépose à l'intérieur de cet anneau, sur son point le plus bas, une sphère creuse en verre très légère, de deux centimètres environ de diamètre, préalablement mouillée du même liquide; celle-ci se place aussitôt d'elle-même de manière à être coupée en deux parties égales par le plan de la lame; elle demeure ainsi dans un état d'équilibre stable, et si l'on fait tourner l'anneau sur lui-même, elle roule à l'intérieur sans le quitter. M. Van der Mensbrugge explique le phénomène par l'effort que fait constamment la lame pour occuper une étendue minima; cette condition exige, en effet, que la lame aboutisse à la sphère de verre suivant un grand cercle de celle-ci.

§ 162bis. Pour donner un exemple ultérieur des effets de la tension à la surface des gouttes liquides, M. Luvini a montré¹⁰² en 1868, que ces gouttes peuvent elles-mêmes supporter des poids : il amène au contact avec le bas d'une goutte suspendue à une baguette de verre horizontale, un petit système en papier, dont il indique la construction; aussitôt l'adhérence établie, la goutte se raccourcit et s'étend un peu; alors il abandonne le système en papier et celui-ci demeure soutenu; enfin il y ajoute de petits morceaux de papier pour en augmenter le poids. Il trouve, de cette manière, qu'une goutte d'eau de médiocre grosseur attachée à une baguette de verre de 5mm de diamètre, peut supporter un poids de 35 à 50 centigrammes. Ces poids me paraissent bien forts, et je suis porté à croire qu'une cause d'erreur inaperçu s'est glissée dans les expériences de l'auteur.

§ 163. M. Quincke a présenté, en 1868 aussi, à l'Académie de Berlin une Note¹⁰³ dans laquelle il étend aux surfaces solides le principe de la tension. A l'aide de considérations ingénieuses, il détermine cette tension, par millimètre de longueur, pour un certain nombre de métaux, et trouve ainsi des valeurs énormes; pour le fer en fils, par exemple, la tension équivaldrait à près de 6 kilogrammes.

Dans la même Note, M. Quincke cherche les tensions de plusieurs métaux fondus et du verre fondu, à des températures voisines du point de solidification; il emploie la méthode de l'écoulement goutte à goutte, en fondant, à l'aide d'une très petite flamme, l'extrémité inférieure d'un fil vertical de chacun de ces corps, et en évaluant le poids d'une goutte. Il prend pour mesure de la tension ce poids divisé par le périmètre de la section du fil, et néglige ainsi la petite quantité de matière liquide qui, après la chute d'une goutte, demeure adhérente au fil (§ 152); aussi ne présente-t-il les valeurs trouvées que comme approximatives; elles s'éloignent assez notablement de celles que Dupré avait données et qui, d'après la méthode dont ce dernier a fait usage, devaient correspondre aussi à peu près au point de solidification.

En 1868 encore, M. Quincke a publié une autre Note¹⁰⁴, dans laquelle il pour-

¹⁰¹ *Sur la tension des lames liquides*, 2me Note (ibid., 1867, 2me série, t. XXIII, p. 448).

¹⁰² *Saggio di un corso di fisica elementare*. Turin, 4me édition, p. 233.

¹⁰³ *Ueber die Capillaritätsconstanten fester Körper* (COMPTES RENDUS DE L'ACAD. BERLIN, 1868, p. 132).

¹⁰⁴ *Ueber die capillaritätsconstanten geschmolzener Körper* (ANN. DE M. POOGENDORFF, vol. CXXXV, p. 621).

suit, par le même procédé, ses mesures de la tension des corps fondus. Il signale une deuxième cause d'erreur, opposée à la précédente, et consistant en ce que, pendant la formation de l'étranglement qui précède la chute de la goutte, il y a un certain afflux de liquide vers cette goutte, laquelle prend ainsi un volume et conséquemment un poids, un peu trop grand. Il pense qu'on peut néanmoins employer ce procédé, à défaut d'un autre plus précis, pour obtenir des valeurs approchées. Dans le cas des corps facilement oxydables, il fait subir au procédé une modification ingénieuse, qui lui permet de former les gouttes dans une atmosphère d'acide carbonique. Par une autre modification, il détermine la tension de plusieurs sels fondus. L'ensemble de ses résultats comprend 29 solides à l'état de fusion.

Il rapporte des mesures de la tension de l'eau déduites de la hauteur à laquelle ce liquide s'élève le long d'une paroi verticale préalablement mouillée, et trouve ainsi, en moyenne, à 0°, la valeur 8,79. Il attribue la grande infériorité des valeurs obtenues par les autres physiciens, à ce que ces derniers n'ont pas opéré assez vite, la tension de l'eau diminuant rapidement quand le liquide reste exposé à l'air (§152).

Enfin, dans une troisième Note¹⁰⁵ (année 1869), le même savant évalue la tension d'une suite de corps composés fondus, par une méthode qui lui paraît plus exacte que la précédente : elle consiste à verser sur une plaque solide horizontale la substance fondue, en quantité assez grande pour que sa surface supérieure soit sensiblement plane, et à mesurer, à l'aide de certains moyens, la hauteur de cette large goutte et celle de l'élément vertical de sa ligne méridienne; nommant respectivement ces deux hauteurs K et k , M . Quincke trouve que, si la goutte a un assez grand diamètre, et si l'on représente la densité de la substance par σ la tension, qu'il désigne par α , est exprimée par la formule simple:

$$\alpha = \frac{\sigma}{2}(K - k)^2.$$

Il applique aussi la même méthode à quelques métaux fondus : il obtient, par exemple, pour la tension de l'or pur fondu, la valeur 131 ,5. Ses résultats s'accordent avec ceux de la Note précédente pour les sels qu'il a soumis aux deux procédés, sauf pour ceux à l'égard desquels le premier de ces procédés amenait une décomposition superficielle.

§ 164. Dupré a réuni en un seul ouvrage les sept Mémoires dont j'ai cité les trois derniers au § 161; cet ouvrage, publié en 1860, et intitulé *Théorie mécanique de la chaleur*, renferme plusieurs additions importantes:

Dans ses Mémoires séparés, l'auteur avait traité, en faisant intervenir la tension, un grand nombre de phénomènes capillaires; dans l'ouvrage actuel, il complète cette étude par un extrait d'un Mémoire de son fils, extrait contenant l'application des mêmes méthodes 1° aux faits résultant du soulèvement graduel d'une plaque solide adhérente à la surface d'un liquide; 2° au phénomène connu des fils de matières denses flottant sur un liquide, par exemple des aiguilles d'acier flottant sur l'eau.

Dupré donne ensuite un nouveau moyen d'arriver, par l'expérience et le calcul à la valeur de la tension à la surface commune de deux liquides qui ne se mêlent pas : une goutte fort petite de l'un de ces liquides est immergée très peu profondément dans l'autre liquide, et communique avec un appareil manométrique indiquant la pression qu'elle exerce sur elle-même; le liquide ambiant est contenu dans une capsule d'un grand diamètre. Alors, désignant par r le rayon de la gouttelette, par z la pression mesurée, et par F_2 la tension à la surface commune, Dupré trouve des relations d'où

¹⁰⁵ Ueber die capularitätsconstanten geschmolzener chemischer Verbindungen (ANN. DE M. POGGEN-DORFF, vol. CXXXVIII, p. 141).

l'on déduit aisément:

$$F_2 = \frac{r^2 z}{2}.$$

Cette formule coïncide avec celle qui exprime la tension d'une lame liquide en fonction du rayon et de la pression d'une bulle de ce liquide (§ 158), savoir $t = \frac{rp}{2}$ et l'on comprend aisément que cela doit être quand la gouttelette est immergée assez peu profondément pour qu'on puisse négliger la pression hydrostatique.

Dupré parvient aussi à la condition nécessaire et suffisante pour qu'une goutte liquide s'étale en lame mince sur la surface d'un autre liquide. Cette condition, telle qu'il la donne, n'est pas exprimée immédiatement en fonction des tensions; mais on la modifie aisément dans ce sens au moyen des formules de l'auteur, et l'on trouve alors, en désignant par F et F_1 les tensions respectives du liquide dont la goutte est formée et de celui sur lequel on la dépose:

$$F_1 > F + F_2.$$

C'est la condition déjà trouvée par M. Marangoni (§ 160bis).

§ 165. Dans une Note de 1869, Note dont j'ai parlé au § 127, M. Quincke m'attribuant, par erreur, une opinion qui est la sienne, avance, comme je l'ai dit, qu'une lame liquide ne peut plus subsister lorsque son épaisseur devient inférieure au double du rayon de l'attraction moléculaire. Il se fonde sur ce que si, dans une portion de l'étendue d'une lame, l'épaisseur devient inférieure à la limite ci-dessus, la tension de cette portion doit diminuer et qu'alors les portions environnantes doivent tirer à elles le liquide de la première et amincir ultérieurement celle-ci jusqu'à la faire éclater. On ne peut objecter qu'il n'en serait plus ainsi dans le cas où la lame tout entière serait uniformément amincie au-dessous de la limite en question; car cette lame serait nécessairement attachée par son bord à quelque solide, à la surface d'un liquide, ou à une autre lame par l'intermédiaire d'une petite masse plus épaisse qui conserverait ainsi une tension plus forte.

Le principe de M. Quincke est Sans doute vrai en général; cependant une expérience que j'exposerai plus loin (§ 172), paraît indiquer que lorsqu'il n'y a, entre deux portions d'une même lame d'une différence très faible de tension, la lame peut se maintenir.

§ 166. En 1869 également, M. Lüdte a étudié¹⁰⁶ d'une manière spéciale, au point de vue des tensions, le phénomène de l'étalement d'un liquide en lame mince sur un autre liquide. Il arrive à la loi suivante:

Toutes les fois que deux liquides à tensions respectives différentes satisfont à la condition que leur adhésion mutuelle surpasse la moindre des deux tensions, une goutte du liquide auquel appartient cette moindre tension s'étale à la surface de l'autre liquide, et l'inverse n'a jamais lieu.

Cette loi coïncide avec celle de Dupré (§ 164) telle que ce savant l'exprime dans son ouvrage¹⁰⁷ si l'on admet que, lorsque la relation de Dupré est satisfaite, le liquide de la goutte a nécessairement moins de tension que l'autre liquide, ce qui sans doute est vrai.

M. Lüdte décrit la curieuse expérience que voici: si, dans un anneau horizontal en fil de fer de deux centimètres au plus de diamètre, on produit une lame d'huile, et qu'on mette en contact avec elle une goutte de solution de savon, on voit aussitôt ce dernier liquide s'étendre en une lamelle circulaire, qui grandit et semble repousser

¹⁰⁶ *Ueber die Ausbreitung der Flüssigkeiten aufeinander* (ANN. DE M. POGGENDORFF. vol. CXXXVII, p. 362).

¹⁰⁷ Il y a, dans la formule de Dupré, une erreur de signe qu'on reconnaît aisément.

l'huile jusqu'à l'anneau métallique, de sorte qu'à la fin la lame d'eau de savon s'est complètement substituée à la lame d'huile. L'auteur ajoute que la même expérience réussit avec une petite lame d'eau sur laquelle on dépose une gouttelette d'huile : la lame d'eau est bientôt alors remplacée par une lame d'huile, qu'on peut, à son tour, remplacer, comme ci-dessus, par une lame d'eau de savon. M. Lüdte pense que tout liquide susceptible de s'étaler sur un autre, peut ainsi remplacer ce dernier sous forme de lame; il regarde conséquemment ces phénomènes comme des effets de tension.

§ 167. Nous avons encore, en 1869, un Mémoire remarquable¹⁰⁸ de M. Van der Mensbrugge. Des mouvements singuliers produits, dans certaines circonstances, à la surface des liquides, avaient exercé depuis long temps la sagacité des physiciens, et avaient donné lieu à une foule d'hypothèses divergentes: tels sont la rotation et les déplacements spontanés des parcelles de camphre flottant sur l'eau, l'espèce de répulsion qu'éprouve la surface de ce liquide au contact ou même à la simple approche d'une gouttelette d'un liquide volatil, etc.

Dutrochet avait essayé d'expliquer l'ensemble de ces phénomènes en admettant qu'à la surface de tous les liquides existe une certaine force motrice, dont il ignore la nature, et qu'il nomme *force épipolique*. M. Van der Mensbrugge montre que la force épipolique de Dutrochet n'est autre chose que la tension; il fait voir, par des expériences variées et de nombreuses mesures, que tous les phénomènes dont il s'agit sont dus à des différences de tension. Ainsi qu'on l'a vu, M. Marangoni, M. J. Thomson et Dupré en avaient déjà expliqué quelques uns par de semblables différences; mais M. Van der Mensbrugge étend le même principe à toute la série, et groupe ainsi sous un seul point de vue, des faits qui semblaient n'avoir entre eux aucune liaison.

Quant à M. Lüdte, qui fait aussi intervenir (§ précéd.) les différences de tension, il s'occupait de ses recherches à Berlin en même temps que M. Van der Mensbrugge travaillait aux siennes à Gand, et les deux Mémoires ont paru presque simultanément.

M. Van der Mensbrugge décrit d'abord des expériences qui montrent que, suivant le sens de la différence des tensions, une gouttelette d'un liquide volatil approchée de la surface d'un autre liquide y détermine un courant centrifuge ou un courant centripète.

A l'égard d'une goutte liquide déposée sur un autre liquide, et qui, au lieu de s'y étaler, prend la forme lenticulaire, M. Van der Mensbrugge cherche, au moyen des tensions respectives de la surface du liquide ambiant et des deux faces de la lentille, la relation analytique nécessaire pour l'équilibre de forme de cette lentille, et en déduit, pour le cas de l'étalement, une condition qui revient aussi, au fond, à celle de M. Marangoni.

Dans ses expériences sur ce dernier phénomène, M. Van der Mensbrugge emploie encore un anneau en fil de soie fin (§ 162) qu'il place doucement sur la surface du liquide, après l'avoir mouillé de celui-ci; puis, à l'intérieur du contour irrégulier formé par ce fil, il dépose une gouttelette d'un liquide satisfaisant à la condition de l'étalement; aussitôt l'anneau de fil se tend, et dessine une circonférence de cercle.

L'auteur passe alors à la recherche de la condition analytique de l'équilibre d'une calotte sphérique laminaire reposant sur un liquide, les tensions respectives de ce liquide et de celui de la lame pouvant être égales ou inégales; il parvient ainsi à une formule que je ne rapporterai pas maintenant, parce qu'elle sera mieux comprise quand j'aurai exposé certains faits relatifs aux calottes laminaires; on la trouvera au § 216. Mais je puis indiquer ici une vérification à laquelle soumet cette formule pour le cas

¹⁰⁸ Sur la tension superficielle des liquides considérée au point de vue de certains mouvements observés leur surface (ACAD. DE BELGIQUE, t. XXXIV DES MÉM. COURONNÉS ET MÉM. DES SAVANTS ÉTRANGERS).

de deux liquides différents : elle lui montrait que si l'on gonfle une bulle de savon de 3 à 4 centimètres de diamètre, et qu'on la dépose sur une grande surface d'eau pure la calotte dans laquelle elle se transforme devait s'affaisser considérablement en s'étendant, de manière à ne faire avec l'horizon, à son bord, qu'un angle d'environ 45° ; or l'expérience a pleinement confirmé cette déduction. En outre, la lame s'amincit avec une extrême rapidité, offre de vives couleurs, et crève après une durée très courte; c'est que l'eau environnante attire à elle, par son excès de tension, le liquide qui constitue la lame.

L'auteur observe, comme M. Lüdgtge, des substitutions d'une lame à une autre: il avance, par exemple, qu'une calotte de solution d'albumine reposant sur de l'eau de savon se trouve bientôt remplacée par une calotte de ce dernier liquide.

Il explique encore par une différence de tension les courants ascensionnels qui se manifestent quand verse lentement de l'eau dans un vase de manière que le liquide glisse le long de la paroi intérieure de celui-ci: il constate que ces courants ne se produisent que lorsque la paroi n'est pas parfaitement nettoyée, et qu'ainsi la surface de l'eau qui s'accumule dans le vase perd une partie notable de sa tension par la présence d'une couche grasseuse imperceptible.

D'après lui, les mouvements du camphre sur l'eau proviennent de ce que le liquide se charge irrégulièrement de camphre autour de la parcelle flottante, et diminue ainsi en tension, mais de quantités qui varient successivement dans les différents azimuts; les portions de la surface de l'eau plus éloignées tirent alors dans tous les sens la portion camphrée et, par suite, la parcelle, en agissant avec plus d'intensité tantôt dans un sens, tantôt dans un autre. L'auteur constate, en effet, que la tension de l'eau camphrée n'est que les 0,6 environ de celle de l'eau pure.

On savait que, pour arrêter les mouvements de la parcelle, il suffit de plonger le bout du doigt dans l'eau; c'est, suivant l'auteur, qu'une matière grasse émanée de la peau s'étend alors rapidement sur la surface liquide, et en amoindrit la tension; il vérifie la chose par des mesures, et s'assure, en outre, que le doigt parfaitement dégraissé ne produit plus d'effet.

On savait encore que de petits fragments de plusieurs autres substances, telles que les acides benzoïque, succinique et citrique, certains butyrates, etc., se meuvent sur l'eau à la manière du camphre; l'auteur prouve, par de nouvelles mesures, que ces corps abaissent aussi la tension de l'eau.

Le lecteur trouvera, dans le Mémoire de M. Van der Mensbrugghe, l'explication, par les mêmes principes, d'autres faits encore.

§ 168. Dans une lettre adressée au Journal *Les Mondes*¹⁰⁹ peu de temps après la publication du Mémoire ci-dessus, M. Van der Mensbrugghe fait connaître plusieurs nouvelles expériences concernant surtout la substitution spontanée d'une lame à une autre; voici les plus curieuses:

1° Une calotte de solution de saponine reposant sur de l'eau distillée vérifie encore la formule du Mémoire précédent: celle-ci donne approximativement, dans le cas dont il s'agit, 74° pour l'angle formé par la lame, à son bord, avec la surface horizontale de l'eau, et l'aspect de la calotte confirme ce résultat, autant que l'oeil peut en juger.

2° Si, au sommet de la même calotte, on dépose une grosse goutte d'eau de savon, ce dernier liquide se substitue bientôt, dans toute la lame, à la solution de saponine, et aussitôt la calotte s'affaisse en s'étendant, de manière à reproduire les résultats rapportés dans le paragraphe précédent.

3° On fait en sorte, par un procédé que l'auteur indique, qu'une bulle de solution

¹⁰⁹2me série, 7me année, tome XXI, page 302.

d'albumine d'in diamètre notablement moindre que 25 millimètres¹¹⁰ adhère à tout le contour intérieur d'un anneau horizontal en fil de fer ayant ce dernier diamètre; la lame prend alors la forme d'une lentille bi-convexe creuse à courbures égales; or si l'on dépose, au sommet de la face supérieure de celle-ci, une goutte de solution de savon; on voit, en même temps que la substitution s'opère, cette face prendre un plus grand développement en augmentant ainsi de courbure, tandis que la face inférieure devient, au contraire, moins courbe. C'est que les tensions respectives des deux liquides étant inégales, il faut, pour que les deux lames exercent la même pression sur l'air intérieur, que leurs courbures soient aussi inégales.

4° Quelques gouttes d'éther sulfurique versées sur la mousse de l'eau de savon ou d'un autre liquide, font disparaître aussitôt cette mousse; c'est que l'éther ayant une tension très faible, se substitue partout aux lamelles de la mousse, et que les lamelles d'éther n'ont qu'une persistance extrêmement courte.

§ 169. Enfin il nous reste à mentionner un extrait d'un travail¹¹¹ de M. Quincke, extrait publié à la fin de 1869, en attendant l'impression du Mémoire in-extenso. Mossotti et Dupré avaient indiqué, on l'a vu (§§150bis et 164), des moyens de déterminer la tension à la surface commune de deux liquides en contact, mais ces moyens donnent sans doute des résultats peu précis; M. Quincke emploie, pour résoudre la même question, la méthode qu'il a exposée dans la troisième des Notes résumées au § 163: dans un vase partiellement rempli du liquide le moins dense, ou, comme il l'appelle, du liquide 2, il introduit une quantité convenable de l'autre liquide, ou liquide 1, qui s'étale, sur le fond horizontal du vase, en une large goutte dont la surface supérieure est sensiblement plane. M. Quincke mesure ensuite la quantité que, dans la Note rappelée ci-dessus, il désigne par $K - k$ alors, σ_1 et σ_2 étant respectivement les densités des deux liquides, la tension à la surface commune, tension que l'auteur nomme α_{12} , lui est donnée par la formule

$$\alpha_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} (K - k)^2.$$

Voici une partie des valeurs obtenues de cette manière à la température de 20°.

LIQUIDES.	TENSION A LA SURFACE COMMUNE.
Mercure et eau	42,58
Mercure et huile d'olive	34,19
Mercure et essence de térébenthine	25,54
Sulfure de carbone et eau	4,26
Huile d'olive et eau	2,096
Huile d'olive et alcool	0,226
Huile d'olive et alcool dilué de Densités à fort peu près égales	0,693

Dans le cas de l'huile d'olive et de l'alcool dilué de même densité, le procédé ne paraît pas applicable; l'extrait que nous résumons n'est pas suffisamment explicite sur le moyen auquel l'auteur a eu recours pour lever la difficulté¹¹².

M. Quincke tire encore de la même méthode l'évaluation de la tension à la surface libre des liquides qui mouilleraient la surface solide sur laquelle on les déposerait. Pour cela, il fixe, à une certaine hauteur dans le liquide, une plaque de verre horizontale,

¹¹⁰ Dans l'article des *Mondes* il y a *centimètres*, par erreur.

¹¹¹ *Ueber die capillaritätserscheinungen an der gemeinschaftlichen Oberfläche zweier Flüssigkeiten* (BUL-LET. DE LA SOC. ROY. de GÖTTINGUE, 1869, n° 19, p. 383).

¹¹² Voir le Mémoire in extenso indiqué sous le n° 2 au § 508.

sous laquelle il fait passer une grosse bulle d'air; cell s'aplatit contre la face inférieure de la plaque, et, si l'on mesure alors les distances K et k à cette plaque, il suffit de supprimer σ_1 dans la formule et de faire abstraction du signe, pour avoir le résultat cherché. L'auteur obtient ainsi, par exemple, pour la tension de l'eau à 20° , la valeur 8,253.

Il reprend ensuite la recherche de la tension à la surface commune de deux liquides, et il indique trois autres méthodes mais moins générales que la première; deux d'entre elles reposent, comme celle de Mossotti sur la mesure de l'élévation ou de l'abaissement de la surface de contact des deux liquides quand ceux-ci sont superposés dans un même tube capillaire.

M. Quincke cherche aussi la condition nécessaire pour qu'un liquide s'étale en lame mince sur un autre, et arrive à une loi qui coïncide encore avec celle de M. Marangoni¹¹³.

§ 170. Les recherches successives dont l'analyse est exposée dans ce qui précède, fournissent donc ces résultats généraux

1° La tension existe bien réellement dans toute surface liquide, et, par suite, dans toute lame liquide.

2° Cette tension est indépendante des courbures de la surface ou de la lame, elle est la même dans toute l'étendue d'une même surface ou d'une même lame, elle même aussi, en chaque point, dans toutes les directions tangentielles autour de ce point.

3° Elle est indépendante de l'épaisseur des lames, du moins tant que cette épaisseur n'est pas inférieure au double du rayon d'activité sensible de l'attraction moléculaire.

4° Elle varie avec la nature des liquides.

5° Pour un même liquide, elle varie en sens inverse de la température; mais, aux températures ordinaires, elle éprouve peu de changements.

6° On possède un grand nombre de procédés pour la mesure expérimentale de la tension, et chacun de ces procédés conduit à une expression de la tension en fonction des données de l'expérience. Le plus commode est sans contredit le premier de Dupré, c'est-à-dire celui de l'aréomètre.

7° Quant à la cause de la tension, quatre hypothèses ont été proposées en premier lieu, celle de Segner, que je n'ai pas bien comprise, et suivant laquelle la tension proviendrait de l'attraction mutuelle des molécules de la couche superficielle dans le sens tangentiel et de la courbure de cette couche; en second lieu, celle qui est commune à Mossotti, au Dr Hough et à Dupré, et qui fait dépendre la tension de la non-symétrie des actions moléculaires dans l'épaisseur de la couche superficielle, avec de légères différences dans la manière d'envisager cette non-symétrie; en troisième lieu, celle de M. Hagen, qui attribue la tension à une densité plus grande de la couche superficielle; enfin, celle de M. Lamarle, qui considère la tension comme due à ce que, par une contraction de la couche superficielle, une portion des molécules de cette couche passant dans l'intérieur et diminuant ainsi d'écartement, la tendance générale de l'attraction au rapprochement des molécules se satisfait en partie.

§ 171. Selon moi, la vraie cause de la tension, si elle n'est pas énoncée d'une manière tout à fait explicite, est du moins suffisamment indiquée par MM. Henry et Lamarle dans leurs démonstrations de l'existence de la tension par les sphères laminaires (§§151 et 158). Il est incontestable, depuis le travail de Laplace, que, si l'on considère seulement l'effet des courbures, une couche superficielle convexe exerce sur le liquide une pression normale en chaque point, et une couche superficielle con-

¹¹³ Pour les recherches postérieures à 1869, voir les articles inscrits au § 508 sous les nos. 3, 4, 6, 8, 9, 10, 16, 18, 20, 23, 27, 28, 29, 31, 33, 34, 36, 39, 40, 41, 44 et 45.

cave exerce, au contraire, une traction normale aussi en chaque point; mais, dans l'état d'équilibre pression ou cette traction lutte contre une résistance provenant en général d'actions hydrostatiques; or il est visible qu'une couche superficielle courbe ainsi pressant ou tirant et qui rencontre une résistance opposée, doit être tendue, comme l'est une vessie gonflée qui presse sur l'air intérieur, ou, en d'autres termes, que les molécules de cette même couche doivent être dans un état d'écartement forcé suivant le sens tangentiel. Si l'on veut, c'est la réciproque de la théorie de Young: celui-ci suppose la tension, et fait voir que les tractions tangentielles qu'elle détermine autour d'un même point donnent pour résultante une pression normale si la surface est convexe, et une traction normale si la surface est concave; or, comme l'a montré Laplace, cette pression ou cette traction existe par le seul effet des attractions moléculaires; on peut donc la décomposer, autour de chaque point, en tractions tangentielles, lesquelles constituent une tension.

Poisson paraît avoir eu une opinion analogue; dans le préambule de sa *Nouvelle théorie de l'action capillaire*, l'illustre géomètre dit, en parlant de Young :

«Il s'appuyait sur l'identité de la surface du liquide avec celle d'une membrane également tendue en tous ses points, identité qui ne peut être que la conséquence et non le principe de la solution du problème. »

La tension est donc un résultat nécessaire des courbures, et l'on comprend cependant qu'elle soit indépendante des valeurs de ces courbures. En effet, considérons, pour simplifier, en un point d'une section normale d'une surface liquide convexe, les deux composantes tangentielles et la partie élémentaire de la pression qui leur donne naissance. Si la courbure diminue, par exemple, cette partie de la pression diminue en même temps; mais, d'autre part, l'angle entre les deux composantes augmente, de sorte que ces composantes, ou tensions élémentaires, peuvent conserver la valeur qu'avec la première courbure. Si la courbure diminue jusqu'à s'annuler, la partie envisagée de la pression s'annule aussi, et les deux composantes se dans le prolongement l'une de l'autre ; il y a donc alors indétermination; c'est le cas des surfaces liquides planes, et l'on est en droit de se demander comment la tension s'engendre dans de semblables surfaces. Mais il faut remarquer que celles-ci sont toujours limitées par des portions à fortes courbures transversales : c'est ce qui a lieu, par exemple, au bord de la surface d'un liquide contenu dans un vase, et c'est encore avec l'intermédiaire de petites portions de ce genre qu'une lame liquide adhère par son bord à la surface d'un liquide, à un fil solide, ou à d'autres lames. Bien que, dans ces deux derniers cas, les portions dont il s'agit soient si étroites qu'elles échappent pour ainsi dire à la vue, on comprend, à priori, la nécessité de leur existence; en effet, les faces d'une lame ne peuvent aboutir brusquement à la couche qui mouille le fil solide; elles doivent évidemment se recourber près de cette couche, pour y aboutir tangentiellement, et le même fait doit se produire le long de la ligne suivant laquelle une lame adhère à d'autres lames; nous décrirons d'ailleurs (§ 219) des expériences où la chose se montre aux yeux. Maintenant, la tension que possèdent, par suite de leurs courbures, ces portions de raccordement, doit, en vertu de la continuité, se propager à toute l'étendue des surfaces qu'elles bordent. Cette explication m'a été suggérée par M. Lamarle.

§ 172. J'ai annoncé (§ 161) des expériences curieuses relatives à l'effet de la chaleur sur la tension des lames liquides; en voici une qui est due à mon fils Félix; j'en rapporterai une autre au § 208:

Une bulle de liquide glycérique d'un décimètre de diamètre étant déposée sur un anneau, on tend qu'elle ait pris, au moins à son sommet (§ 108), une teinte autre que le rouge ou le vert des dernier alors il suffit d'approcher avec précaution le bout du

doigt aussi près que possible de ce sommet, pour voir la teinte de ce même sommet se modifier sur un espace de trois à quatre centimètres de diamètre, de manière à accuser un amincissement: si, par exemple, le sommet est jaune, il passe au vert; quand le doigt est assez chaud, il y a quelquefois production de deux teintes successives; enfin dès qu'on enlève le doigt, la teinte originaire reparaît. C'est à cette expérience que j'ai fait allusion à la fin du § 165.

§ 173. Nous allons maintenant nous occuper d'un ordre de faits intimement liés à la tension; je veux parler de la constitution des systèmes de lames.

Commençons par un cas très simple : on sait que lorsqu'une bulle d'air qui monte dans un liquide arrive à la surface de celui-ci, elle ne brise pas immédiatement cette surface, mais y soulève une lame en forme de calotte sphérique; et si le liquide est du liquide glycérique, la calotte laminaire ainsi engendrée persiste long temps. Or, imaginons qu'une seconde bulle d'air s'élève du fond du vase, et qu'au moment où elle est près d'atteindre la surface, elle se trouve en partie sous la première lame; elle déterminera aussi la formation d'une lame, qui soulèvera nécessairement la première d'un côté, de sorte que les deux quantités d'air respectivement emprisonnées par ces deux lames seront séparées par une portion de la seconde, comme par une cloison liquide. Mais cette cloison ne gardera pas la courbure du reste de la seconde lame, ainsi que je vais le faire voir.

En vertu de leur nature liquide, des lames les ne peuvent évidemment se rencontrer sous des angles à arêtes linéaires : il faut, pour la continuité (§ 171), qu'il se forme, tout le long de la ligne de rencontre une petite masse à surfaces fortement concaves dans le sens perpendiculaire à cette même ligne; dans le cas dont il s'agit, cette masse est trop minime pour être distinguée, mais, ainsi que je l'ai déjà annoncé; nous en vérifierons plus loin l'existence; or les deux calottes et la cloison étant ainsi unies par une petite masse qui a ses courbures propres, il est clair que cette petite masse établit une entière indépendance entre les courbures respectives des trois lames.

Cela étant, remarquons que la cloison doit constituer aussi une portion de sphère, car elle se trouve dans les mêmes conditions que les deux autres lames, c'est qu'elle a, comme celles-ci, pour limites la petite masse de jonction et le liquide du vase. Quant à sa courbure, elle dépend évidemment de la différence des actions exercées sur ses deux faces par les deux portions d'air emprisonnées. Si ces deux portions d'air sont égales, les deux lames appartiendront à des sphères égales, qui presseront les deux volumes d'air avec la même intensité, et conséquemment la cloison, soumise sur ses deux faces à des actions égales, n'aura aucune courbure, ou, en d'autres termes, sera plane; mais si les deux quantités d'air sont inégales, auquel cas les deux lames appartiendront à des sphères de diamètres différents, et, par suite, presseront inégalement ces deux quantités d'air, la cloison sollicitée sur ses deux faces par des actions inégales, se bombera du côté où l'élasticité de l'air est la moindre, jusqu'à ce que l'effort qu'elle exerce, en vertu de sa courbure, du côté de sa face concave, contre balance l'excès d'élasticité de l'air qui baigne cette face.

Soient ρ , ρ' et r les rayons des sphères auxquelles appartiennent respectivement la plus grande lame, la plus petite et la cloison, et soient p , p' et q les pressions respectives qu'elles exercent, en vertu de leurs courbures, sur l'air qui baigne leurs faces concaves. Ces pressions étant (§§116 et 121) en raison inverse des diamètres, et conséquemment des rayons, on aura:

$$\frac{p}{q} = \frac{r}{\rho}, \quad \text{et} \quad \frac{p'}{q} = \frac{r}{\rho'};$$

mais, d'après ce que nous avons vu plus haut, il faut, pour l'équilibre, que l'on ait:

$$q = p' - p ;$$

d'où

$$1 = \frac{p'}{q} - \frac{p}{q}.$$

Portant dans cette dernière équation les valeurs ci-dessus de $\frac{p'}{q}$ et de $\frac{p}{q}$, et résolvant par rapport à r , il vient:

$$r = \frac{\rho\rho'}{\rho - \rho'},$$

formule qui donnera le rayon de la cloison, quand on connaîtra ceux des deux lames.

Si, par exemple, ces deux lames appartiennent à des sphères égales, on a $\rho = \rho'$, et la formule donne $r = \text{l'infini}$; c'est-à-dire qu'alors la cloison est plane, ainsi que nous l'avons déjà trouvé. Si le rayon de la plus petite des deux lames est moitié de celui de la plus grande, en d'autres termes, si l'on a $\rho' = \frac{1}{2}\rho$, la formule donne $r = \rho$; dans ce cas, la courbure de la cloison sera conséquemment égale à celle de la plus grande lame.

Pour compléter l'étude de notre système laminaire, il ne nous reste plus qu'à chercher sous quels angles se joignent les deux calottes et la cloison; or ces trois lames possédant des tensions identiques (§ 170), et tirant ainsi leur arête commune avec des forces égales, il est clair qu'elles doivent faire entre elles, à cette arête, des angles égaux, angles qui sont conséquemment de 120° . Je fais ici, bien entendu, abstraction de la petite masse de jonction, à cause de son extrême exigüité.

Nous verrons bientôt tous ces résultats vérifiés par l'expérience.

§ 174. Si la bulle d'air qui fait naître la seconde lame aboutit à la surface du liquide assez loin de la première lame pour que les deux calottes sphériques soient complètes et isolées, ou bien, ce qui revient au même, si l'on dépose sur le liquide deux bulles suffisamment éloignées l'une de l'autre, bulles qui se transforment aussitôt en calottes sphériques, ces dernières, sollicitées par les actions capillaires à la manière des corps légers flottants, se rapprocheront par degrés jusqu'au contact, du moins si elles n'étaient pas séparées originairement par un trop grand intervalle. Pour faire comprendre ce qui doit arriver ensuite, rappelons un fait que manifestent, au sein de mon mélange alcoolique, les sphères d'huile pleines. Lorsque deux semblables sphères viennent à se toucher, leur ensemble n'est point à l'état d'équilibre; aussitôt le contact établi, les deux sphères s'unissent pour n'en former qu'une seule, et il est facile d'en saisir la raison: on ne saurait produire ce contact en un point unique; il a lieu nécessairement suivant une petite surface, de sorte que les deux masses n'en forment plus qu'une en réalité; or puisque celle-ci est finie et entièrement libre, et qu'elle est de révolution, la seule figure d'équilibre qu'elle puisse affecter est (§ 37 et 78) celle d'une sphère unique. Maintenant il est visible que la même chose doit tendre à se produire à l'égard de nos deux calottes sphériques laminaires, dès que les deux petites masses annulaires à surfaces concaves dans le sens méridien qui règnent le long de leurs bases et les rattachent au liquide, se sont unies à l'endroit de leur contact, c'est-à-dire que les deux calottes tendront à n'en former qu'une seule; mais pour que cette tendance pût avoir son plein effet, il faudrait que les deux lames s'ouvrissent à l'endroit du contact, et comme la cohésion s'y oppose, on comprend que l'ouverture sera remplacée par une cloison, et qu'ainsi le système se coordonnera comme celui du paragraphe précédent.

§ 175. L'existence des cloisons est un fait bien connu de tous ceux qui se sont amusés à faire des bulles de savon; mais j'avais à soumettre au contrôle de l'expérience

les résultats établis dans ce qui précède, et d'abord ceux qui concernent la courbure de la cloison et les angles sous lesquels cette cloison et les deux lames se coupent.

Dans ce but, j'ai fait tracer, sur trois feuilles de papier, trois figures représentant les bases de trois systèmes formés chacun de deux portions de sphères laminaires et d'une cloison. J'entends par la base d'un semblable système l'ensemble des arcs de cercle suivant lesquels il s'appuie sur la surface du liquide, abstraction faite des petites masses annulaires. Voici par quelle méthode on a tracé les dessins dont il s'agit :

Supposons deux lames formant primitivement deux sphères complètes, sphères qui se sont ensuite en partie pénétrées de manière à donner lieu à une cloison, et imaginons tout ce système coupé par un plan passant par les centres des deux lames; il est clair que le centre de la sphère à laquelle appartient la cloison se trouvera sur la droite qui contient les deux centres ci-dessus. Cela posé, les angles sous lesquels les deux lames

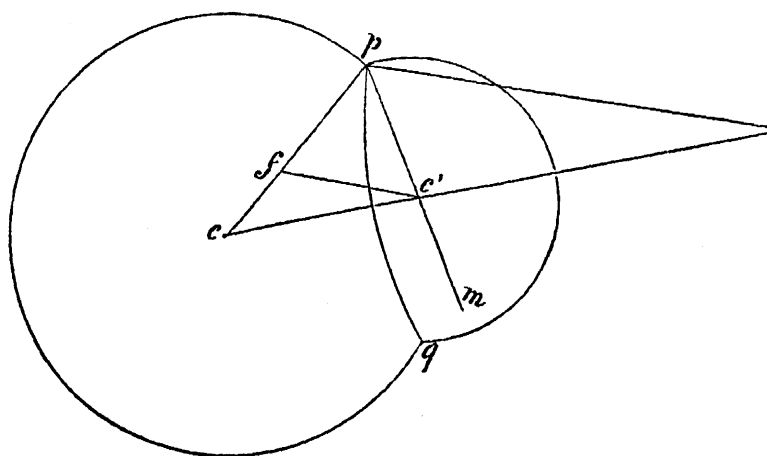


Fig. 61

et la cloison se rencontrent devant être de 120° , il est visible que les rayons des deux lames menés à un point de la ligne d'intersection de celles feront entre eux un angle de 60° et l'on verra aussi sans peine que le rayon de la cloison mené au même point fera également un angle de 60° avec celui des deux autres dont il est le plus près. Soit donc (fig. 61) p l'un des deux points où viennent aboutir les trois arcs suivant lesquels les deux lames et la cloison sont coupées par le plan en question, plan que nous prendrons pour celui de la figure, et soit $pc = \rho$ le rayon de la plus grande lame. Menons les droites indéfinies pm et pn de telle manière que les angles cpm et mpn soient chacun de 60° . Sur pm prenons pc' égale à p' , c'est-à-dire au rayon de la plus petite lame; joignons cc' , et prolongeons la droite jusqu'à sa rencontre, en d , avec pn . Les trois points c , c' et d seront évidemment les trois centres, et pd sera le rayon r de la cloison, de sorte que si, de ces trois centres et avec ces rayons, on trace trois portions de circonférences aboutissant d'une part au point p et de l'autre à son symétrique q , on aura, comme le montre la figure, la coupe du système des deux lames et de la cloison. Seulement cette construction, considérée comme représentant la base d'un système laminaire, suppose que les deux calottes, abstraction faite de leur pénétration mutuelle, sont des hémisphères, condition qui n'est jamais rigoureusement remplie, du moins quand les calottes reposent sur une couche épaisse de liquide (§§214 à 216).

Dans les trois dessins dont j'ai parlé, et qui sont représentés au tiers de leur grandeur par les fig. 62, 63 et 64, les arcs ont été marqués en traits larges d'environ un millimètre,

on verra bientôt pourquoi. Dans le premier dessin, les diamètres des deux lames étaient égaux; dans le second, ils étaient comme 2 à 1; et, dans le troisième, comme 3 à 1. Pour employer l'un de ces dessins, on le plaçait sur une table, et l'on posait par dessus une plaque de verre mince, dont on mouillait ensuite la face supérieure avec du liquide glycérique. Cela fait, on gonflait une bulle du même liquide, que l'on déposait sur la plaque au-dessus de la portion de circonférence qui représentait la base de la plus petite lame; cette bulle s'y étalait aussitôt de manière à constituer une calotte; on s'arrangeait de façon que la base de celle-ci eût un diamètre un peu moindre que la portion de circonférence en question. On gonflait alors une seconde bulle, que l'on déposait de même au-dessus de la portion de circonférence représentant la base de l'autre lame, et en s'arrangeant aussi de manière qu'après s'être étalée sur la plaque, elle eût un diamètre un peu trop petit. Comme, en déposant cette seconde lame, on devait la mettre en contact avec la première, les deux calottes se pénétraient partiellement et demeuraient unies avec une cloison. Les choses étant ainsi préparées, on trempait l'orifice de la pipe dans le liquide glycérique, comme pour gonfler une bulle, puis on appliquait cet orifice vers la partie inférieure de la plus petite lame, on soufflait un peu, puis on faisait la même opération pour l'autre lame, on revenait à la première, puis à la seconde, et ainsi de suite¹¹⁴, en faisant glisser en même temps, de petites quantités, la plaque de verre sur le dessin, et, avec les ménagements convenables, on parvenait à donner aux deux lames les diamètres des portions de circonférences tracées, et alors la base du système laminaire obtenu, base formée de celles des deux lames et de celle de la cloison, recouvrait exactement le dessin. J'ai dit que les dessins étaient en traits larges; c'est que ces traits doivent être vus à travers les petites masses annulaires; s'ils étaient fins, les réfractions produites par les petites masses dont il s'agit empêcheraient de les distinguer. Ajoutons que, sur la plaque de verre, les calottes, toujours abstraction faite de leur pénétration mutuelle, sont exactement hémisphériques (§ 216), de sorte que la vérification ci-dessus ne laisse rien à désirer.

¹¹⁴ Cette opération s'effectuerait beaucoup plus aisément si l'on employait, au lieu de la pipe, un tube de verre effilé à l'une de ses extrémités; après avoir mouillé celle-ci de liquide glycérique, on l'introduirait dans la lame, et l'on soufflerait doucement par l'autre extrémité. A l'époque où mes expériences ont été faites, ce moyen, dont M. Lamarle a fait usage plus tard dans une autre circonstance (§ 204), ne s'était pas présenté à moi.

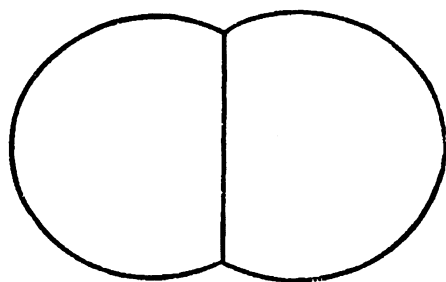


Fig. 62

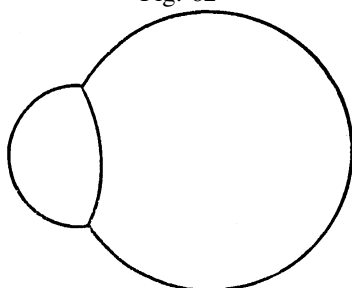


Fig. 63

§ 175bis. Mais il reste un point à éclaircir: nous avons déterminé (§ 173) le rayon r de la cloison en partant des valeurs relatives des pressions respectivement exercées par les trois portions de calottes sphériques sur les deux quantités d'air emprisonnées. D'un autre côté, nous venons de construire ce rayon en partant de ce que la cloison et les deux lames doivent se rencontrer sous des angles de 120° . Or on ne voit pas à priori de relation nette entre les principes qui servent respectivement de bases à ces deux déterminations, et l'on peut se demander si les deux résultats coïncident; c'est ce que nous allons examiner.

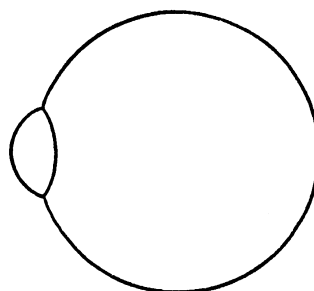


Fig. 64

Prenons (fig. 61) $pf = pc'$, et joignons $c'f$; l'angle $cp c'$ étant de 60° , le triangle fpc' sera équilatéral, et l'on aura conséquemment $fc' = pc' = \rho'$; par la même raison, l'angle $fc'p$ sera de 60° comme l'angle $c'pd$, d'où il suit que les droites fc' et pd seront parallèles; on pourra donc poser:

$$\frac{pd}{fc'} = \frac{pc}{fc};$$

enfin, remplaçant, dans cette formule, pd , fc' et pc par leurs valeurs respectives r , ρ' et ρ , et observant que fc est égal à $\rho - \rho'$, on en tirera:

$$r = \frac{\rho\rho'}{\rho - \rho'}.$$

C'est identiquement la valeur qu'avait donnée la première méthode; ainsi les deux

principes, en apparence indépendants, conduisent au même résultat.

§ 176. Pour vérifier également les résultats du § 174, on déposait successivement, sur la surface d'une couche épaisse de liquide glycérique contenue dans un grand plat de porcelaine, deux bulles de ce même liquide, de manière que les deux calottes sphériques qu'elles formaient fussent séparées par un certain intervalle. Quand celui-ci était au plus d'un centimètre, les lames marchaient, en effet, l'une vers l'autre, et s'unissaient avec une cloison; seulement si les deux lames avaient de grands diamètres (10 centimètres ou plus), la cloison ne se produisait en général que lorsque la réunion avait lieu peu d'instants après la formation de ces lames; quand celles-ci étaient d'abord un peu trop distantes l'une de l'autre, de façon que le temps nécessaire pour leur rapprochement spontané fût assez long, elles s'unissaient sans cloison en se transformant en une seule grande calotte, sans doute parce qu'elles étaient devenues trop minces, de sorte que la cloison naissante se brisait avant qu'on pût en constater l'existence.

§ 177. Si une troisième calotte sphérique laminaire s'accrole à deux autres déjà unies, le système aura évidemment trois cloisons, savoir une provenant de la réunion des deux premières lames, et deux de la réunion de chacune de ces mêmes lames avec la troisième. Ces trois cloisons aboutiront nécessairement à un même arc de jonction, et, en supposant qu'elles aient encore des courbures sphériques, il faudra qu'aux lignes de jonction de chacune d'elles avec deux des lames, les angles soient encore de 120° ; il faudra, en outre, par la raison donnée à la fin du § 173, qu'à l'arc de jonction de ces, trois cloisons entre elles, les angles soient aussi de 120° . Cela posé, voyons par

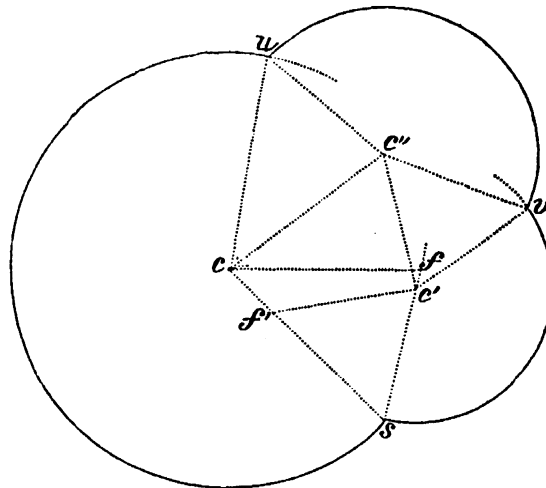


Fig. 65

quel moyen nous pourrions tracer la base d'un système de ce genre, de même que nous avons tracé (fig. 61) celle d'un système de deux lames. Après avoir décrit (fig. 65) les bases des deux premières lames, bases ayant pour centres c et c' et pour rayons les longueurs données que nous désignerons encore par ρ et ρ' , portons, à partir du point s où aboutissent ces deux bases, et sur les rayons sc et sc' , deux longueurs sf' et sf égales entre elles et au rayon donné ρ'' de la troisième base, puis, des points c et c' comme centres et avec les longueurs cf et $c'f'$ comme rayons, traçons deux arcs de cercle; leur point d'intersection c'' sera le centre de la base de la troisième lame, base qu'on décrira ensuite avec le rayon ρ'' .

En effet, supposons le problème résolu et cette base tracée. Si l'on mène, du point où elle aboutit à l'une des premières, les droites uc et uc'' , qui seront respectivement égales à ρ et à ρ'' , ces droites feront entre elles un angle de 60° , comme les droites sc et sc' ; d'où il suit que le triangle $c'uc''$ sera égal au triangle csf dans lequel sc et sf sont aussi respectivement égaux à ρ et ρ'' , et qu'ainsi cc'' sera égal à cf ; par les mêmes raisons, le triangle $c'vc''$ sera égal au triangle $c'sf$, et conséquemment $c''c'$ sera égal à cf' .

Proposons-nous maintenant de tracer les bases des trois cloisons. Celles des trois lames étant décrites (fig. 66) par le tracé précédent, on déterminera, comme dans la fig. 61, le centre d de la cloison appartenant aux deux premières lames et partant de s , en menant sd faisant avec sc' un angle de 60° , jusqu'à sa rencontre, en d , avec la droite cc' prolongée; on déterminera de même le centre f de la cloison appartenant la première et à la troisième lame en menant uf faisant un angle de 60° avec $c''u$, jusqu'à sa rencontre, en f , avec cc'' prolongée; enfin on déterminera encore par le même procédé le centre g de la troisième cloison. Il ne restera plus alors qu'à décrire, des points d , f et g comme centres, et avec les rayons ds , fu et gv , trois arcs de cercle

partant respectivement des points s , u et v , et se dirigeant vers le milieu de la figure; ces arcs seront les bases des trois cloisons, toujours dans l'hypothèse où ces cloisons seraient des portions de sphères.

Si l'on a construit la figure avec soin, on reconnaîtra:

1° que les arcs dont je viens de parler aboutissent tous trois à un même point, o ; 2° que les trois centres f , d et g sont disposés en ligne droite; 3° que si l'on joint le point o à ces trois centres, les angles fod et god sont égaux et de 60° .

§ 178. Mais comme on pourrait croire que ces résultats d'une construction graphique sont simplement très approchés et non tout à fait exacts, je vais les établir d'une manière rigoureuse; c'est à M. Van der Mensbrugghe que je dois cette démonstration.

Démontrons d'abord que les trois centres f , d et g sont en ligne droite. Pour cela, répétant ce que nous avons fait dans la fig. 61, portons sur sc (fig. 66) une longueur $sw = sc' = \rho'$, et joignons $c'w$; nous savons que cette dernière droite sera parallèle à sd , et conséquemment nous pourrons poser

$$\frac{dc}{dc'} = \frac{sc}{sw} = \frac{\rho}{\rho'}.$$

Par la même raison, en considérant les deux portions de circonférences qui ont pour centres c et c'' et qui se coupent en u , on aura, en renversant seulement les deux rapports,

$$\frac{fc''}{fc} = \frac{\rho''}{\rho};$$

et enfin les deux portions de circonférences ayant pour centres c' et c'' et qui se coupent en v , donneront de même

$$\frac{gc'}{gc''} = \frac{\rho'}{\rho''}.$$

Multipliant ces trois égalités membre à membre, il vient:

$$\frac{dc \cdot fc'' \cdot gc'}{dc' \cdot fc \cdot gc''} = 1.$$

Remarquons maintenant : 1° que les trois centres d , f et g sont sur les prolongements des côtés du triangle $cc''c'$; 2° que les six quantités dc , fc'' , gc' , dc' , fc et

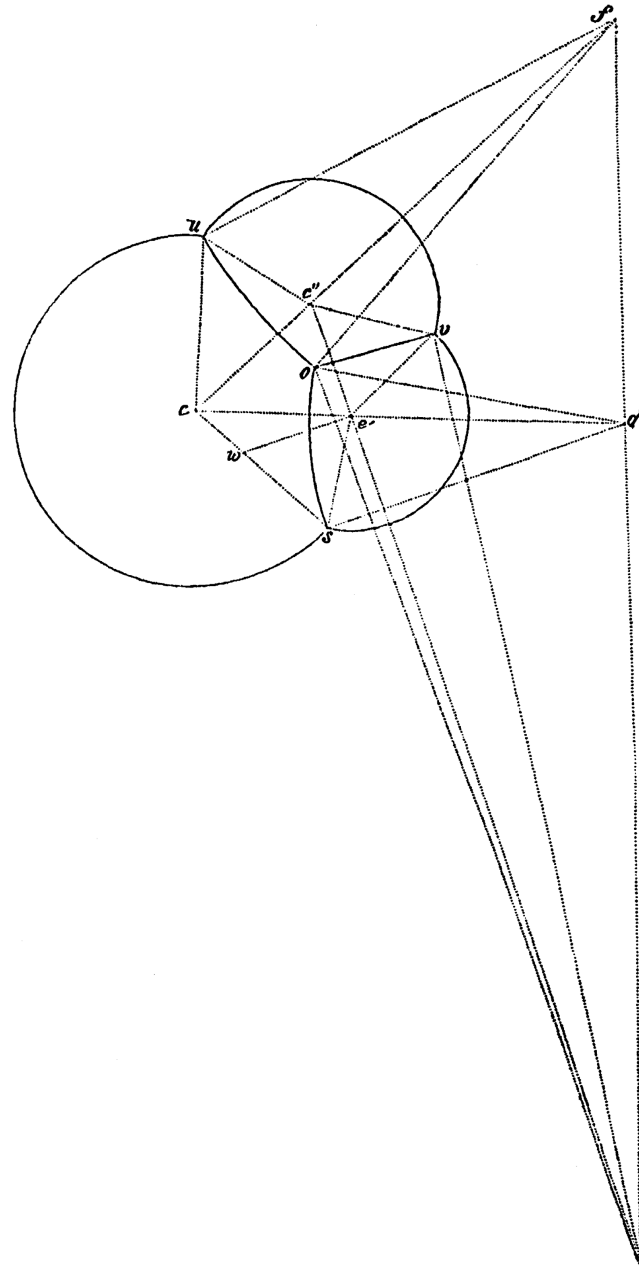


Fig. 66

gc'' sont les distances, comptées sur ces mêmes prolongements, points d , f et g aux trois sommets c , c' et c'' 3° que, dans la dernière formule ci-dessus, les trois facteurs du numérateur représentent des droites dont deux quelconques n'ont pas d'extrémité commune, et qu'il en est de même des trois facteurs du dénominateur. Or on sait, par un théorème de la théorie des transversales, que lorsque la condition exprimée par cette formule est remplie à l'égard d'un triangle quelconque, les trois points en question, pris sur les prolongements des trois côtés, sont nécessairement en ligne droite. Nos trois centres d , f et g jouissent donc de cette propriété.

Ce premier point établi, démontrons les autres. Considérons le point o comme étant simplement l'intersection des deux arcs uo et vo ayant pour centres f et g ; joignons od , of et og , et, sans chercher d'abord si od est bien réellement le rayon de l'arc ayant pour centre d et partant du point s , faisons voir que les angles fod et god sont chacun de 60° , ou, ce qui revient au même, que l'angle fog est de 120° , et que la droite od en est la bissectrice.

Cherchons d'abord à déterminer les longueurs fd et gd , et, à cet effet, considérons-les comme appartenant respectivement aux triangles fdc et gdc' dans lesquels nous pourrions évaluer les côtés fc , dc , gc' et dc , ainsi que les angles qu'ils comprennent. Pour arriver à ces dernières valeurs, calculons les côtés du triangle $cc'c''$. Au moyen du triangle csc' , où les côtés cs et $c's$ sont respectivement ρ et ρ' entre eux angle de 60° , on trouve sans peine

$$cc' = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - \rho\rho'};$$

les triangles cuc'' et $c'vc''$ donnent de même :

$$cc'' = \sqrt{\rho^2 + \rho''^2 - \rho\rho''}, \quad \text{et} \quad c'c'' = \sqrt{\rho'^2 + \rho''^2 - \rho'\rho''}.$$

On déduit de là, par la formule connue,

$$\cos c'cc'' = \cos dcf = \frac{\rho^2 + (\rho - \rho')(\rho - \rho'')}{2\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - \rho\rho'} \sqrt{\rho^2 + \rho''^2 - \rho\rho''}};$$

on trouvera de la même manière

$$\cos cc'c'' = \cos gc'd = \frac{\rho'^2 + (\rho - \rho')(\rho'' - \rho')}{2\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - \rho\rho'} \sqrt{\rho'^2 + \rho''^2 - \rho'\rho''}};$$

D'un autre côté, on a:

$$fd = \sqrt{fc^2 + dc^2 - 2dc \cdot fc \cdot \cos dcf},$$

$$gd = \sqrt{dc'^2 + gc'^2 - 2dc' \cdot gc' \cdot \cos dc'g},$$

formules où les droites dc , fc , dc' , gc' restent encore à déterminer; mais, dans le triangle csd , où wc' est, nous le savons, parallèle à sd , on a :

$$\frac{dc}{cs} = \frac{dc'}{sw} = \frac{cc'}{cw};$$

d'où, en remplaçant cs , sn , et cw par leurs valeurs ρ , ρ' et $\rho - \rho'$, ainsi que cc' par sa valeur trouvée plus haut, on obtient

$$dc = \frac{\rho}{\rho - \rho'} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - \rho\rho'}, \quad \text{et} \quad dc' = \frac{\rho'}{\rho - \rho'} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - \rho\rho'};$$

les triangles cuf et $c''vg$ donneront de leur côté:

$$fc = \frac{\rho}{\rho - \rho''} \sqrt{\rho^2 + \rho''^2 - \rho\rho''}, \quad \text{et} \quad gc' = \frac{\rho'}{\rho'' - \rho'} \sqrt{\rho''^2 + \rho'^2 - \rho''\rho'}.$$

Il vient donc, après substitutions et réductions, et en faisant, pour abrégér,

$$\sqrt{\rho^2\rho'^2 + \rho^2\rho''^2 + \rho'^2\rho''^2 - \rho^2\rho'\rho'' - \rho\rho'^2\rho'' - \rho\rho'\rho''^2} = P,$$

$$fd = \frac{\rho}{(\rho - \rho')(\rho - \rho'')} \cdot P,$$

$$gd = \frac{\rho'}{(\rho - \rho')(\rho'' - \rho')} \cdot P,$$

et conséquemment

$$fg = \frac{\rho''}{(\rho - \rho'')(\rho'' - \rho')} \cdot P,$$

On tire de là:

$$\frac{fd}{gd} = \frac{\rho(\rho'' - \rho')}{\rho'(\rho - \rho'')}.$$

D'autre part, d'après le résultat du § 173, on a, en observant que fo et go sont respectivement égaux aux rayons fu et gv des deux cloisons que nous considérons,

$$fo = \frac{\rho\rho''}{\rho - \rho''}, \quad go = \frac{\rho''\rho'}{\rho'' - \rho'}, \quad \text{d'où} \quad \frac{fo}{go} = \frac{\rho(\rho'' - \rho')}{\rho'(\rho - \rho'')};$$

les deux rapports $\frac{fd}{gd}$ et $\frac{fo}{go}$ sont donc égaux, et, par conséquent, la droite do est la bissectrice de l'angle fog .

Connaissant, par ce qui précède, les trois côtés du triangle fog , on en déduit, toute réduction faite,

$$\cos fog = -\frac{1}{2}$$

d'où il résulte que l'angle fog est de 120° , et, par suite, que les angles fod et god sont chacun de 60° .

Cherchons enfin la longueur de la bissectrice do . Pour cela, remarquons que, dans tout triangle dont l'un des angles est de 120° , il y a une relation fort simple entre la bissectrice de cet angle et les deux côtés qui le comprennent. Soit, en effet (fig. 67), abc un triangle où l'angle en a est de 120° ; prolongeons le côté ba d'une quantité ad égale à ac , et joignons dc ; cette droite sera parallèle à la bissectrice ah , car l'angle dac sera de 60° , et puisque ad est égal à ac , le triangle dac sera équilatéral, et l'angle dca sera de 60° comme l'angle cah ; on aura donc

$$\frac{ah}{dc} = \frac{ba}{ba + ad},$$

ou, à cause de $dc = ad = ac$,

$$\frac{ah}{ac} = \frac{ba}{ba + ac},$$

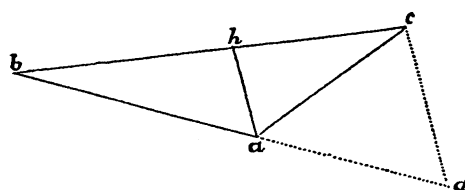


Fig. 67

et enfin

$$ah = \frac{ba \cdot ac}{ba + ac}.$$

Ce résultat appliqué au triangle fog (fig. 66), donne donc

$$do = \frac{fo \cdot go}{fo + go},$$

et, après les substitutions,

$$do = \frac{\rho\rho'}{\rho - \rho'};$$

or c'est là précisément (§173) la valeur du rayon d de la troisième cloison. De tout cela il résulte donc, comme nous nous étions proposé de le démontrer, que les centres des trois cloisons sont en ligne droite, que les bases de ces trois cloisons aboutissent à un même point, enfin que les rayons de ces bases partant du point dont il s'agit font entre eux des angles de 60° , et qu'ainsi ces mêmes bases se joignent sous des angles de 120° .

Maintenant, pour que nous puissions considérer les trois cloisons comme constituant réellement des portions de sphères, il reste encore à établir que ces trois portions se coupent suivant un arc unique, or c'est ce qui suit évidemment de ce que les centres f, d, g de ces trois sphères sont en ligne droite, et de ce que ces mêmes sphères ont un point commun en o .

Ainsi toutes les conditions théoriques sont satisfaites par trois cloisons de courbure sphérique disposées, avec les trois calottes, de manière à former un système ayant pour base celle que l'on trace par la construction du paragraphe précédent; on doit donc regarder comme extrêmement probable que le système prendra réellement cette forme.

§ 179. C'est, en effet, ce que j'ai vérifié par l'expérience, en employant le moyen décrit plus haut (§ 175), c'est-à-dire que l'on a tracé en traits larges sur un papier, par la méthode indiquée, la base d'un système de trois hémisphères avec leurs cloisons, puis que l'on a placé par-dessus la plaque de verre humectée de liquidé glycérique, et enfin que l'on a déposé sur celle-ci, au-dessus des trois portions de circonférences, trois bulles d'abord un peu trop petites, qu'on a successivement augmentées par la petite manoeuvre mentionnée, en faisant en même temps glisser, quand cela était nécessaire, la plaque de verre sur le papier. Or la base du système laminaire ainsi réalisé s'est encore superposée parfaitement au dessin.

Les constructions graphiques que j'ai données dans ce qui précède pour les bases des systèmes de calottes sphériques supposent implicitement la loi de la raison inverse de la pression au diamètre; la coïncidence exacte des bases des systèmes réalisés avec les bases tracées fournit donc une vérification nouvelle de cette loi, à ajouter à la vérification directe obtenue dans le § 121. C'est aux expériences actuelles que j'ai fait allusion dans le paragraphe que je viens de citer. Ces mêmes expériences confirment également, du moins à l'égard des lames de courbure sphérique, l'indépendance entre la tension et la courbure (§ 159).

§ 180. Si l'on imagine qu'une quatrième calotte sphérique vienne s'accoler au système des trois précédentes, on pourra concevoir deux dispositions différentes de l'ensemble, à part, bien entendu, celle où la quatrième calotte se placerait de manière à ne s'unir qu'à une seule des autres. L'une de ces dispositions contiendrait quatre cloisons se joignant par une seule arête, et l'autre en contiendrait cinq se joignant par deux arêtes. Pour simplifier la question et les constructions graphiques, je supposerai

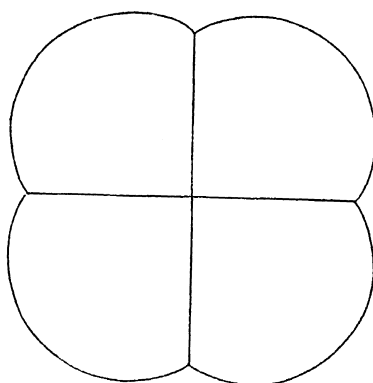


Fig. 68

les quatre calottes égales en diamètre, auquel cas toutes les cloisons seront évidemment planes.

Alors, on peut admettre, en premier lieu, que les quatre calottes s'unissent de façon que leurs centres soient placés comme les quatre sommets d'un carré, ce qui donnera le système dont la base est représentée fig. 68, où il y a quatre cloisons aboutissant à une même arête sous des angles droits; ce système est évidemment un système d'équilibre, puisque tout y est symétrique.

On peut admettre, en second lieu, que, trois calottes s'étant d'abord unies, la quatrième s'unisse à deux d'entre elles; dans cet arrangement, les quatre centres seront aux sommets d'un losange, et l'on aura le système dont la base est représentée fig. 69, où il y a cinq cloisons.

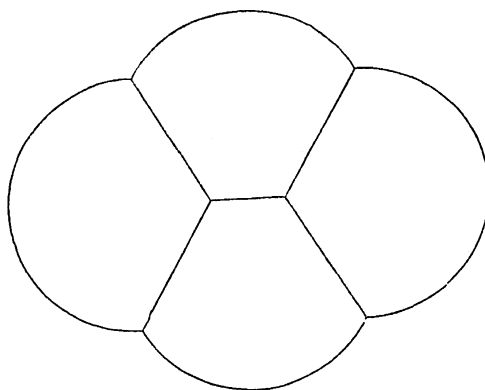


Fig. 69

Ce système est évidemment aussi, à cause de sa symétrie, un système d'équilibre; mais ici, à une même arête liquide n'aboutissent plus que trois cloisons, faisant entre elles des angles de 120° .

Or si l'on essaie de réaliser sur la plaque de verre le premier de ces deux systèmes, on n'y parvient pas, ou, s'il se produit, ce n'est que pendant un instant inappréciable, et pour passer rapidement au second. Quant à ce dernier, on l'obtient directement sans aucune difficulté, et il persiste.

On doit conclure de là que, dans le premier système, l'équilibre est instable, et ainsi il devient probable que quatre cloisons aboutissant à une même arête ne peuvent coexister.

Remarquons d'ailleurs que, dans l'assemblage laminaire de la fig. 61, l'arête liquide semi-circulaire qui unit les deux calottes sphériques n'est commune qu'à trois lames, savoir à ces deux calottes et à la cloison, et, nous le savons, ces trois lames font entre elles des angles égaux; de même dans l'assemblage de la fig. 66, chacune des arêtes liquides qui unissent deux à deux les calottes n'est, comme celle qui unit les trois cloisons, commune qu'à trois lames faisant entre elles des angles égaux; enfin c'est ce qui a encore lieu évidemment dans l'assemblage de la fig. 69.

§ 181. Remarquons, d'autre part, que, dans les systèmes des fig. 66 et 69, il y a quatre arêtes aboutissant à un même point, savoir les trois qui unissent les calottes deux à deux, et celle qui unit les trois cloisons; or, de l'égalité des angles que forment entre elles les trois lames unies par une même arête, on déduit sans peine que les quatre arêtes qui aboutissent à un même point font aussi entre elles, en ce point, des angles égaux. En effet, en supposant d'abord les lames planes et, par suite, les arêtes rectilignes, le système constitue évidemment l'ensemble de quatre angles trièdres dans chacun desquels les trois angles dièdres sont égaux; or, en vertu d'un théorème connu, cette égalité entraîne, pour l'un quelconque de ces angles trièdres, celle des angles plans; mais, chacun de ces derniers étant commun à deux des angles trièdres, il s'ensuit que, dans le système, tous les angles plans, c'est-à-dire les angles que font entre elles les quatre arêtes, sont égaux. Dans nos systèmes calottes et de cloisons, les lames, ou au moins une partie d'entre elles, sont courbes, et conséquemment il en est de même des arêtes; mais on peut évidemment, au point commun à celles-ci, remplacer les lames courbes par leurs plans tangents, et les arêtes courbes par leurs tangentes qui seront les intersections de ces plans.

Réciproquement, si les quatre arêtes font entre elles, au point qui leur est commun, des angles égaux, il résulte de la symétrie de l'en Semble que les lames doivent aussi faire entre elles, à leurs arêtes communes, des angles égaux. Ainsi, dans tous les cas, l'égalité des angles sous lesquels quatre arêtes aboutissent à un point commun et l'égalité des angles sous lesquels trois lames s'unissent à une même arête sont, du moins au voisinage immédiat du point dont il s'agit, des conséquences nécessaires l'une de l'autre. Cherchons actuellement la valeur commune des angles entre les arêtes. D'après ce que nous venons de dire, il suffit de se figurer quatre droites aboutissant à un même point sous des angles égaux. Cela étant, pour suivre la voie la plus simple, considérons un tétraèdre régulier $abcd$ (fig. 70). Soit o le centre de ce tétraèdre. Menons les droites oa, ob, oc, od aux quatre sommets; ces droites feront évidemment entre elles des angles égaux, dont la valeur sera, par conséquent, celle qu'il s'agit d'obtenir. Cela posé, prolongeons la droite ao jusqu'en p , où elle atteint la base, et joignons pd ; le triangle opd sera rectangle en p . Maintenant remarquons que le point o est le centre de gravité du tétraèdre, et que le point p est le centre de gravité de la base bcd ; or on sait que si, dans une pyramide quelconque, on joint le sommet au centre de gravité de la base, le centre de gravité de la pyramide est situé sur cette droite, aux trois quarts de sa longueur à partir du sommet; op est donc le tiers de oa , et comme le point o est à égale distance des quatre sommets, op est également le tiers de od . Dans le triangle rectangle opd , on a conséquemment $\cos dop = 1/3$; d'où résulte enfin

$$\cos doa = -\frac{1}{3}.$$

Ainsi lorsque quatre droites aboutissent à un même point sous des angles égaux, chacun de ces angles est celui qui a pour cosinus $-1/3$; on trouve, d'après cela, que cet angle est de $109^{\circ} 28' 16''$, c'est-à-dire à fort peu près de 109 degrés et demi.

Telle est donc la valeur des angles sous lesquels, dans les assemblages laminaires que nous avons étudiés jusqu'ici, les arêtes liquides aboutissent à un même point.

§ 182. Ces systèmes étaient simplement ceux qui résultent de l'accolement des calottes sphériques entre elles; mais on peut en produire de bien plus curieux nous avons vu, dans les chapitres III et IV, à quelle facilité on développe des lames de liquide glycérique s'appuyant sur des contours en fil de fer; si donc nous prenons l'une quelconque des charpentes polyédriques qui nous ont servi à la réalisation des polyèdres d'huile (§ 29), qu'elle soit légèrement oxydée, que nous la plongeons dans le liquide glycérique, et qu'après l'y avoir laissée pendant quelques secondes pour la bien mouiller, nous l'en retirons, nous devons la trouver, et nous la trouverons, en effet, occupée par un système de lames; or ce système, qu'on s'attendrait à voir constitué irrégulièrement suivant le hasard des mouvements qu'on a imprimés à la charpente en la sortant du liquide, présente, au contraire, toujours une disposition parfaitement régulière et symétrique. Cette disposition varie avec la forme de la charpente; mais, en général, elle se reproduit constamment la même dans la charpente d'un même polyèdre.

Par exemple, la charpente cubique donne invariablement le système que je représente ici (fig. 71): il se compose, on le voit, de douze lames partant respectivement des douze arêtes solides et aboutissant toutes à une lamelle unique quadrangulaire placée au milieu de l'ensemble. Les cotés de cette lamelle sont légèrement courbes ainsi que toutes les autres arêtes liquides, et conséquemment toutes les lames, à l'exception de la lamelle centrale, ont de faibles courbures. Les courbures des arêtes liquides qui partent des sommets de la charpente sont trop peu prononcées pour qu'on ait pu les indiquer dans le dessin. Quand on effectue l'expérience, il faut avoir soin de ne pas plonger dans le liquide la totalité de la fourche qui soutient la charpente, car, si on le faisait, il se développerait aussi une lame dans cette fourche, lame qui modifierait le système des autres. Je rappellerai que ma charpente cubique a 7 centimètres de côté.

§ 183. Les systèmes laminaires ainsi développés dans les charpentes, ont excité l'admiration de toutes les personnes à qui je les ai fait voir ils sont, comme je l'ai dit, d'une régularité parfaite, leurs arêtes liquides ont une finesse extrême, et leurs lames étalent après quelque temps les plus riches couleurs. Pour observer commodément, et sans lui communiquer d'agitation, l'un quelconque d'entre eux, on pose la charpente qui le contient sur un petit bâti en fil de fer semblable à celui qui est représenté en perspective dans la fig. 72; les bâtis dont je me sers ont quatre centimètres de largeur, douze de longueur et deux et demi de hauteur.

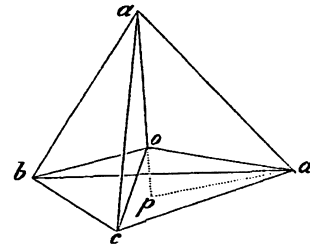


Fig. 70

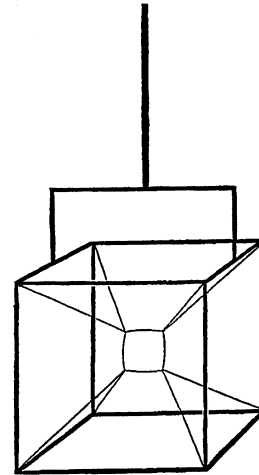


Fig. 71

Après chaque série d'expériences, on lave les charpentes en les passant dans de l'eau de pluie, puis on les dépose sur du papier à filtre, et on les laisse sécher. Disons ici que, pour la réalisation de ces systèmes laminaires, on peut, à la rigueur, remplacer le liquide glycérique par une simple solution de savon. On aura alors des figures très peu durables, mais on sera toujours maître de replonger la charpente aussi souvent qu'on le voudra, et de renouveler ainsi l'observation.

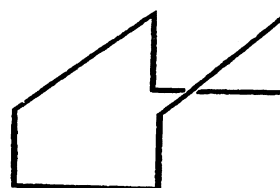
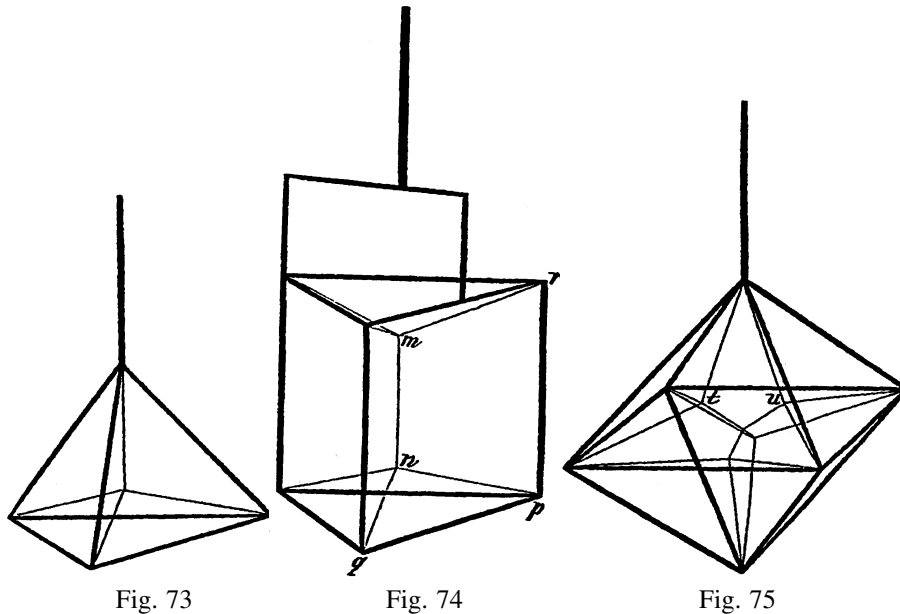


Fig. 72

§ 184. Maintenant, quel que soit le polyèdre dont les arêtes forment la charpente qu'on emploie, si l'on examine attentivement le système laminaire produit, on reconnaîtra que toujours à une même arête liquide aboutissent trois lames, et que les arêtes liquides aboutissant à un même point liquide sont toujours au nombre de quatre; ainsi ces nombres, que nous avons déjà constatés dans les systèmes de calottes, se retrouvent dans tous les systèmes laminaires, de sorte que leur invariabilité constitue deux lois. En outre, ici, comme à l'égard des calottes, il résulte de l'égalité des tensions que les trois lames unies par une arête liquide font nécessairement entre elles, à cette arête, des angles égaux, et que, par suite, les quatre arêtes concourant en un même point liquide font aussi entre elles, à ce point, des angles égaux, ce qui constitue deux autres lois générales.

§ 185. Parmi les charpentes que j'ai soumises à l'expérience, trois, savoir celles du tétraèdre régulier, du prisme triangulaire droit équilatéral, et de l'octaèdre régulier, fournissent des systèmes composés de lames planes; or ceux-ci permettent de constater l'égalité des angles entre les arêtes liquides, car on peut leur appliquer des mesures; ils permettent conséquemment aussi de vérifier l'égalité des angles entre les lames.

Je reproduis ici (fig 73, 74 et 75) les dessins de ces trois systèmes; on ne doit pas oublier, pour l'intelligence de ces dessins et de la plupart de ceux qui suivront, que de chacune des arêtes solides part une lame se dirigeant vers l'intérieur de la charpente, et rattachée aux autres lames par les arêtes liquides, que les dessins figurent en traits fins. Le système du tétraèdre, on le voit, est simplement formé de six lames qui se joignent suivant quatre arêtes liquides aboutissant toutes au centre de la figure; celui du prisme triangulaire présente



deux pyramides s'appuyant sur les bases de la charpente et dont les sommets et sont aux extrémités d'une arête liquide parallèle aux côtés du prisme; enfin celui de l'octaèdre, l'un des plus beaux qu'on puisse obtenir, contient, outre les douze lames partant des arêtes solides, six quadrilatères allongés dans le sens d'un de leurs angles, ayant chacun le sommet de cet angle à l'un de ceux de la charpente, et le sommet opposé au centre de la figure; ces quadrilatères sont disposés de manière que, clans chaque couple aboutissant à deux sommets opposés de la charpente, leurs plans sont à angle droit l'un sur l'autre. Avertissons ici que, dans la charpente octaédrique, d'autres systèmes peuvent se former; nous en parlerons plus loin.

Dans le système du tétraèdre (fig. 73), l'égalité des angles est évidente, tout étant parfaitement symétrique dans tous les sens; on voit d'ailleurs que les quatre arêtes liquides occupent précisément les positions des droites oa , ob , oc , od de la fig. 70. Dans celui du prisme triangulaire (fig. 74), l'angle entre l'arête verticale mn et l'arête oblique np , par exemple, devant avoir $-1/3$ pour cosinus, il s'ensuit que la hauteur verticale du point n au-dessus du plan de la base est le tiers de np ; d'où l'on déduit aisément qu'en désignant par a l'arête pq de la base, cette hauteur verticale est égale à $\frac{a}{2\sqrt{6}}$. D'après cela, si b désigne l'arête latérale pr de la charpente, on a

$$mn = b - \frac{a}{\sqrt{6}}.$$

Dans la charpente que j'ai employée, l'arête b était de 70mm,70, et l'arête a de 69mm,23¹¹⁵; en substituant ces nombres dans la formule ci-dessus, on trouve $mn = 42$ mm,44; or la

¹¹⁵ Il est nécessaire d'expliquer ici de quelle manière ces évaluations ont été obtenues. Une charpente en fil de fer ne pouvant être géométriquement parfaite, on a mesuré séparément chacune des arêtes latérales, et l'on a pris la moyenne des résultats, puis on a agi de même à l'égard des arêtes des bases; mais ces mesures n'ont pas été effectuées directement sur les arêtes, parce que les terminaisons de celles-ci étaient plus ou moins masquées par les soudures; voici comment on a procédé: la charpente étant placée verticalement, et l'une de ses faces latérales en regard du cathétomètre, on a déterminé, en visant aussi près de l'arête verticale de droite que le permettaient les soudures, la distance comprise entre les deux arêtes horizontales, puis on a fait la même chose près de l'arête verticale de gauche; ensuite on a tourné le prisme sur son axe de façon à présenter successivement au cathétomètre les deux autres faces latérales, et l'on a répété sur chacune d'elles

mesure au cathétomètre a donné $mn = 42\text{mm},37$, valeur qui ne diffère de la précédente que de $0\text{mm},07$ c'est-à-dire de moins que les deux millièmes de l'une ou de l'autre.

Quant au système de l'octaèdre (fig. 75), il présente, dans chacun des quadrilatères dont j'ai parlé, une dimension facile à mesurer au cathétomètre: c'est la distance comprise entre les sommets t et u des deux angles obtus opposés. D'un autre côté, en partant du principe que ces deux angles ainsi que celui dont le sommet est au centre de la figure, doivent avoir $-1/3$ pour cosinus, on arrive aisément à démontrer que cette distance tu doit être exactement le tiers de la longueur des arêtes de l'octaèdre. Pour le faire voir, soit $stou$ (fig. 76) l'un des quadrilatères; menons les deux diagonales tu et os , qui se couperont à angle droit en m ; désignons par d la distance tu , par α la valeur commune des trois angles obtus, et par a la longueur de l'arête de l'octaèdre. Dans le triangle ots , l'angle en t étant α , et l'angle en o étant $\frac{1}{2}\alpha$, l'angle en s sera $180^\circ - \frac{3}{2}\alpha$; d'après cela, les deux triangles rectangles omt et smt donneront

$$om = \frac{\frac{1}{2}d}{\text{tang}\frac{1}{2}\alpha}, \quad \text{et} \quad ms = \frac{\frac{1}{2}d}{\text{tang}\left(180^\circ - \frac{3}{2}\alpha\right)}.$$

Remarquons maintenant que la diagonale os , ou la somme des deux longueurs om et ms , est la demi-hauteur de l'octaèdre, et conséquemment, comme on le verra sans peine, est égale à $\frac{a}{\sqrt{2}}$. On aura donc

$$\frac{1}{2}d \left\{ \frac{1}{\text{tang}\frac{1}{2}\alpha} + \frac{1}{\text{tang}\left(180^\circ - \frac{3}{2}\alpha\right)} \right\} = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Mais, sachant que, le cosinus de l'angle α est $-1/3$, on trouvera

$$\text{tang}\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \text{tang}\left(180^\circ - \frac{3}{2}\alpha\right) = \frac{1}{5}\sqrt{2}.$$

Ces valeurs étant substituées dans la formule ci-dessus, on obtient, comme je l'ai avancé,

$$d = \frac{a}{3}.$$

les mêmes opérations; on a eu ainsi, pour la longueur des arêtes latérales, six valeurs peu différentes, dont la moyenne s'est trouvée de $69\text{mm},83$.

Cela fait, on a disposé la charpente horizontalement sur des supports convenables de telle manière que, l'une de ses faces latérales regardant encore le cathétomètre, les deux arêtes des bases qui la limitaient à droite et à gauche fussent verticales, et l'on a opéré à l'égard de celles-ci comme à l'égard des précédentes, puis, tournant le prisme sur son axe, on a passé de même aux deux autres faces, de sorte qu'on a eu aussi, pour les arêtes des bases, six valeurs, dont la moyenne était $68\text{mm},36$.

Mais ces deux moyennes devaient subir une petite correction; en effet, les lames liquides n'aboutissent point aux fils solides suivant les génératrices de ceux-ci dont on a mesuré les distances, mais suivant d'autres génératrices situées plus en dedans de la charpente, d'où il suit que les deux nombres ci-dessus sont un peu trop petits. Pour arriver à la correction d'une manière simple, remarquons qu'en vertu de la tension, le plan de chacune de nos lames doit passer par l'axe du fil solide cylindrique sur lequel la lame s'appuie, et que, par conséquent, les arêtes liquides prolongées iront aboutir aux points où ces axes se coupent; nous pouvons donc, sans altérer en aucune manière le système laminaire et, par suite, la longueur de l'arête liquide mn , substituer, par la pensée, à notre charpente, l'ensemble des axes des fils solides qui la composent, ce qui revient évidemment à ajouter à chacun de nos deux nombres le diamètre de ce fils; or ce diamètre, déterminé encore au moyen du cathétomètre, a été trouvé, comme moyenne de dix mesures prises sur les différents fils, égal à $0\text{mm},87$; c'est par l'addition de cette quantité à nos deux nombres, que l'on a obtenu enfin les valeurs de b et de a données dans le texte.

Dans ma charpente, les mesures ont donné¹¹⁶ pour la valeur 69mm,49, dont le tiers est 23mm,16; et pour la distance d , la valeur 23mm, 14. La différence 0mm,02 entre la valeur calculée et la valeur mesurée est, on le voit, plus insignifiante encore que dans le cas précédent.

§ 186. Les systèmes laminaires des autres charpentes, c'est-à-dire ceux qui contiennent des lames courbes et conséquemment des arêtes liquides courbes, vérifient encore, et d'une manière bien curieuse, quoiqu'un peu moins précise, l'égalité des angles sous lesquels ces arêtes aboutissent à un même point liquide; ils vérifient ainsi également, du moins dans le voisinage immédiat de celui-ci (§ 181), l'égalité des angles entre les trois lames qui se joignent suivant chacune de ces mêmes arêtes.

Prenons comme premier exemple le système laminaire de la charpente cubique, système dont la fig. 71 reproduit le dessin. Chacun des angles de la lamelle quadrangulaire centrale devant être de 109 degrés et demi, et conséquemment supérieur à un droit, il en résulte que les côtés de cette lamelle ne peuvent être rectilignes et doivent constituer des arcs légèrement convexes vers l'extérieur; or c'est, en effet, ce que montre le système réalisé.

J'ai représenté dans la fig. 74 le système laminaire du prisme triangulaire équilatéral, et j'ai dit qu'en désignant par a la longueur des arêtes des bases, la hauteur de chacune des pyramides laminaires qui s'appuient sur ces bases est égale à $\frac{a}{2\sqrt{6}}$; mais on comprend que si la hauteur du prisme est moindre que le double de cette quantité, ou, en d'autres termes, moindre que les 0,4 des côtés des bases, le système en question ne saurait se produire. Dans ce cas, l'analogie avec d'autres systèmes dont je parlerai ci-après m'avait conduit à prévoir que le système se composerait d'une lame triangulaire équilatérale parallèle aux bases, placée à égales distances de ces dernières, et rattachée par d'autres lames à toutes les arêtes solides; mais comme les angles de ce triangle laminaire devaient être de 109 degrés et demi, et que les angles d'un triangle équilatéral à côtés rectilignes ne sont que de 60° , il fallait nécessairement que les côtés de notre triangle laminaire fussent convexes vers l'extérieur, comme ceux de la lamelle du système du cube, mais que leurs courbures fussent beaucoup plus prononcées; or c'est ce que l'expérience a pleinement vérifié; seulement les courbures ne se sont montrées très fortes que dans le voisinage des sommets. La hauteur de ma charpente était

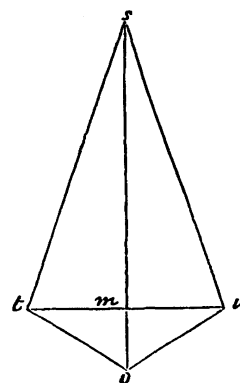


Fig. 76

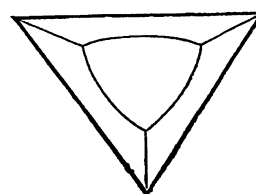


Fig. 77

¹¹⁶ Une charpente octaédrique régulière pouvant être considérée comme formée de l'ensemble de trois carrés en fils de fer dont les plans se coupent suivant les diagonales, la charpente a été placée de manière que ces carrés se présentassent l'un après l'autre en face du cathétomètre avec deux de leurs côtés dirigés verticalement, et, dans les trois positions de la charpente, on a mesuré, aussi près que possible de chacun de ces fils verticaux, la distance comprise entre les deux fils horizontaux. On a obtenu ainsi douze valeurs, dont la moyenne était 68mm,59; on a pris, en outre, sur les différents fils, huit mesures du diamètre de ceux-ci, mesures qui ont donné pour moyenne 0mm,90. D'après les considérations exposées dans la note précédente, on a ajouté ce diamètre au nombre ci-dessus, et c'est ainsi qu'on a trouvé la valeur de a indiquée dans le texte.

Quant à la valeur de d , comme les petites irrégularités de la charpente devaient introduire de légères différences entre les six quadrilatères, on a mesuré cette distance dans chacun d'eux, et la valeur de d donnée dans le texte est la moyenne de ces six mesures.

environ le tiers de la longueur des côtés des bases; la fig. 77 représente le système vu par-dessus; ce système constitue donc un second exemple à l'appui de la proposition dont il s'agit.

En troisième lieu, si l'on, prend pour charpente celle d'un prisme pentagonal régulier dont la hauteur ne soit pas trop grande relativement aux dimensions des bases, le système laminaire présente, au milieu de sa hauteur, une lame pentagonale parallèle aux bases, et à laquelle viennent se rattacher, comme à la lame triangulaire du système précédent, toutes les lames partant des arêtes solides; or l'angle de deux côtés contigus d'un pentagone régulier étant de 108° , c'est à très voisin de notre angle de 109° , il s'ensuit que les côtés de la lame pentagonale doivent être sensiblement droits, et c'est encore ce que l'expérience confirme: dans la charpente que j'ai employée, la longueur des arêtes des bases est de 5 centimètres, et la hauteur du prisme de 6 centimètres; les côtés de la lame pentagonale ont environ 2 centimètres, et l'oeil ne peut y distinguer aucune courbure. Dans ce système, les lames qui partent des arêtes solides des bases et vont se rattacher aux côtés du pentagone central, par planes, et cela doit être, puisqu'elles s'appuient d'une part sur les arêtes rectilignes des bases et d'autre part sur les côtés sensiblement droits de la lame centrale; il suit de là que les arêtes liquides obliques qui vont des sommets des bases à ceux du pentagone central, semblent droites. Quant aux lames triangulaires qui partent des arêtes verticales solides, elles sont rigoureusement planes par suite de la symétrie de leur position. Le système dont il s'agit est représenté fig. 78.

En quatrième lieu enfin, si la charpente est celle d'un prisme hexagonal régulier, le système laminaire est analogue au précédent dans sa disposition générale, la lame centrale étant, bien entendu, hexagonale; mais comme l'angle de deux côtés contigus d'un hexagone régulier est de 120° , c'est-à-dire notablement supérieur notre angle de 109° , les côtés de la lame en question doivent être sensiblement courbés vers l'intérieur, et c'est également ce que montre le système réalisé. La hauteur de la charpente que j'ai employée est à la distance de deux côtés opposés de la base, ou, en d'autres termes, au diamètre du cercle que l'on inscrirait à cette base, comme 7 à 6.

§ 186bis. Du reste, on peut former un système à arêtes liquides courbes, dans lequel l'angle entre ces arêtes est susceptible d'une vérification directe et précise: dans un grand anneau en fil de fer muni de trois pieds, on réalise une lame plane de liquide glycérique, puis on dépose sur cette lame, et l'une près de l'autre, deux petites bulles du même liquide sensiblement égales en diamètre. Chacune d'elles tend à se transformer en une lentille laminaire bi-convexe, enchâssée par son bord dans la lame plane; mais, à cause de leur contact, ces deux lentilles s'accrochent avec une cloison. A moins d'un hasard particulier, elles ne seront pas tout à fait de même diamètre, mais on fera disparaître la différence en aspirant une petite portion de l'air contenu dans la plus grande, au moyen d'un tube effilé dont la pointe a été préalablement mouillée de liquide glycérique (note du § 175); alors la cloison est plane, et le système, vu par-dessus, présente l'aspect de la fig. 78bis; *ab* est la projection de la cloison.

L'anneau dont j'ai fait usage a un diamètre de 20 centimètres; il est formé d'un fil de fer de 3 millimètres d'épaisseur, et les pieds ont 8 centimètres de hauteur. Pour

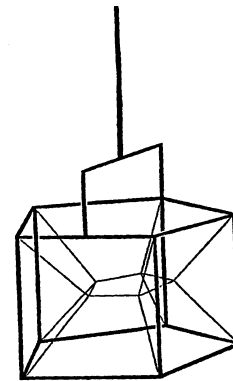


Fig. 78

effectuer la vérification expérimentale annoncée, on a tracé sur un papier, en partant de la valeur théorique de l'angle en a , la projection du système, ce qui est fort simple l'angle des deux tangentes en a doit avoir, nous le savons, pour cosinus $-1/3$, et celui des deux rayons qui joindraient le point a aux centres des deux lentilles, en est le supplément; on a construit ce dernier angle, et l'on a porté, à partir de a , sur chacun de ses côtés, une longueur de 4 centimètres; puis, prenant comme centres les deux points ainsi déterminés, on a tracé deux portions de circonférences se terminant aux points a et b ; enfin on a mené la droite ab .

On conçoit que si, après avoir réalisé dans l'anneau un système un peu plus petit que ce dessin, on pose ce même dessin entre les pieds de l'anneau, et que, fermant un oeil, on tienne l'autre à une hauteur convenable au-dessus de l'ensemble, on pourra s'assurer s'il est possible d'amener l'assemblage des lentilles à se projeter exactement sur le tracé. Cependant l'expérience faite de cette manière offrirait de la difficulté, parce que l'assemblage des lentilles, obéissant aux petites agitations de l'air ambiant, change incessamment de place. Pour écarter cet inconvénient, on a tendu préalablement, en travers de

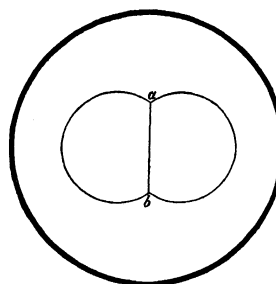


Fig. 78 bis

l'anneau suivant un diamètre, un fil fin, lequel, après la réalisation de la lame plane, se trouvait nécessairement engagé dans celle-ci, et l'on a déposé les deux bulles de telle façon que le fil fût engagé aussi dans la cloison; le système perd ainsi sa mobilité.

Pour procéder à l'expérience, on a recouvert le dessin d'une plaque de verre mince afin de le maintenir, puis, après avoir développé la lame plane, on a posé l'anneau par ses pieds sur cette plaque, et l'on a fait en sorte que, pour l'oeil placé bien au-dessus, le fil se projetât sur la droite ab du dessin, droite qu'on avait d'ailleurs prolongée des deux côtés; on a déposé ensuite les deux bulles, et l'on a égalisé avec grand soin les deux lentilles. Alors l'oeil convenablement placé voyait effectivement le contour de l'assemblage des lentilles réelles se projeter exactement sur le contour dessiné.

§ 187. Le fait dont j'ai parlé (§ 180) pour montrer qu'un système dans lequel plus de trois lames aboutissent sous des angles égaux à une même arête liquide est à l'état d'équilibre instable, se rapporte à un système qui offrirait en même temps plus de quatre arêtes aboutissant à un même point liquide. L'instabilité pourrait donc être attribuée également à cette dernière circonstance, et il faut décider si elle appartient exclusivement à l'une ou à l'autre, ou seulement à leur réunion.

Pour cela, revenons à l'expérience rapportée dans le § 139, c'est-à-dire prenons comme système solide l'ensemble de deux rectangles qui se coupent à angle droit au milieu de deux de leurs côtés opposés; seulement, pour rendre l'effet plus apparent et la charpenté plus commode à manier, donnons aux deux rectangles moins de largeur et plus de hauteur (fig. 79).

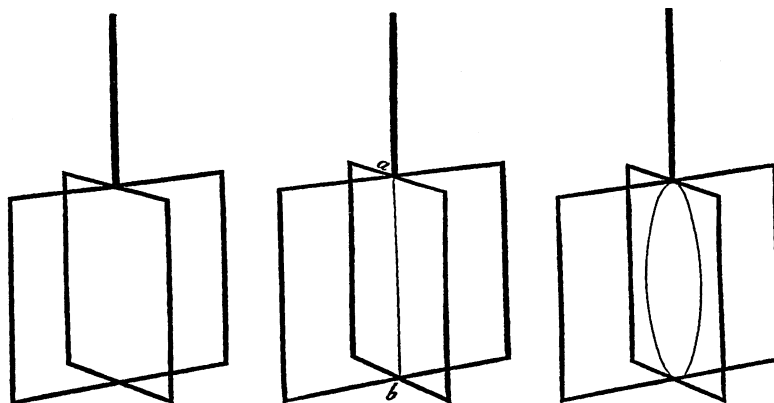


Fig. 79

Fig. 80

Fig. 81

Le système laminaire le plus simple que l'on puisse concevoir dans cette charpente, se composerait de quatre lames planes occupant respectivement les quatre moitiés des rectangles et aboutissant à une arête rectiligne uni que ab (fig. 80), qui joindrait les deux points d'intersection de ces mêmes rectangles. Ce système, à cause de sa symétrie, serait évidemment un système d'équilibre, et il ne présenterait aucun point liquide commun à plusieurs arêtes; mais l'arête ab serait commune à quatre lames. Or, quand on retire cette charpente du liquide glycérique on ne la trouve jamais occupée par le système que je viens d'indiquer: dans celui qui se réalise, au lieu de l'arête ab , il y a toujours, comme avec la charpente du § 139 une lame plane (fig. 81) terminée par deux arêtes courbes auxquelles viennent se rattacher les lames courbes partant des arêtes solides. Ici, on le voit, chacune des deux arêtes liquides n'est commune qu'à trois lames, et il faut conclure de là que l'instabilité est bien réellement une propriété des systèmes laminaires dans lesquels cette condition ne serait pas remplie.

Ajoutons que Brewster, qui a pris plaisir à reproduire et à varier mes systèmes laminaires, a imaginé¹¹⁷ une modification fort curieuse de l'expérience ci-dessus: il a rendu les deux rectangles mobiles autour de leurs points d'intersection, de manière à faire varier les angles dièdres, et alors, en augmentant graduellement ceux de ces angles dont le plan de la lame ovale est bissecteur, il a vu cette lame se rétrécir au fur et à mesure, de telle façon que, lorsque les angles dont il s'agit sont devenus de 135° , la lame ovale s'est réduite à une simple arête liquide droite joignant les deux points d'intersection; mais, au moment même, le système s'est modifié, et une nouvelle lame ovale s'est produite, bissectrice des deux autres angles dièdres. Brewster a donc réussi à réaliser, mais seulement pour un instant inappréciable, un système dans lequel quatre lames sont unies par une même arête liquide, et cette jolie expérience complète la vérification de l'instabilité d'un semblable système.

Quant à la seconde circonstance, je ferai d'abord remarquer que si, dans la charpente cubique, on conçoit un système formé de douze lames planes triangulaires partant respectivement des douze arêtes solides et aboutissant au centre de la charpente (fig. 82), ce système, à cause de sa parfaite symétrie, sera nécessairement un système d'équilibre, et l'on voit sans peine qu'à chaque arête liquide n'aboutiront que trois lames qui, de plus, feront entre elles des angles égaux; mais il y aura huit arêtes liquides aboutissant au point central. Or nous savons qu'avec le liquide glycérique, ce système ne se produit pas, et qu'on obtient toujours celui de la fig. 71, dans lequel

¹¹⁷On the figures of equilibrium in liquid films (TRANSACTIONS OF THE ROYAL SOCIETY OF EDINBURGH, vol. XXIV, 1867).

à chacun des sommets de la lamelle quadrangulaire centrale n'aboutissent que quatre arêtes liquides. Il est permis de conclure de ce fait que l'instabilité appartient aussi à tout système dans lequel un même point liquide est commun à plus de quatre arêtes.

On peut obtenir d'une manière permanente le système de la fig. 82; mais c'est, comme dans le cas d'instabilité du § 138, en introduisant dans ce système une partie solide; il suffit, en effet, de tendre, d'un sommet de la charpente au sommet opposé, un fil de fer très fin. Cependant, quand on retire du liquide glycérique la charpente ainsi disposée, le système qui l'occupe n'est pas immédiatement celui dont il s'agit; il contient encore une lamelle quadrangulaire; seulement celle-ci est beaucoup plus petite que celle de la fig. 71, et n'est point placée symétriquement par rapport à la charpente: elle s'appuie par l'un de ses sommets sur le milieu de la diagonale solide; mais on la voit bientôt diminuer spontanément d'étendue, jusqu'à s'annuler complètement, de sorte que le système devient alors celui de la fig. 82. Les choses se bornent là, et le système demeure

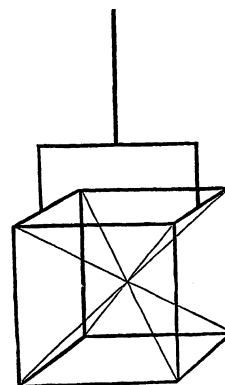


Fig. 82

parfaitement stable en cet état, quand le décroissement de la lamelle s'est effectué avec assez de lenteur; mais souvent ce décroissement est plus rapide, et alors se produit un autre phénomène singulier à l'instant où la lamelle s'annule, on voit s'en reformer une autre beaucoup plus petite encore, située, du côté opposé de la diagonale solide, ayant son plan perpendiculaire à celui de la première, et s'appuyant, non plus par un sommet, mais par le milieu de l'un de ses côtés, sur le milieu de la diagonale solide¹¹⁸ puis cette seconde lamelle décroît et s'annule comme la précédente; dans ce cas donc, le système n'atteint sa forme définitive que par une espèce d'oscillation.

§ 188. On doit, je pense, regarder maintenant comme bien établies pour tous les assemblages laminaires, les lois que je viens de discuter. Or ces lois nous conduisent à une conséquence fort remarquable : la mousse qui se forme sur certains liquides, par exemple sur le vin de Champagne, sur la bière, sur l'eau de savon que l'on agite, est évidemment un assemblage laminaire, composé d'une foule de lamelles ou cloisons qui s'entre coupent et emprisonnent entre elles de petites portions de gaz; conséquemment, bien que tout y semblé régi par le hasard, elle doit être soumise à ces mêmes lois; ainsi ses innombrables cloisons se joignent nécessairement partout trois à trois sous des angles égaux, et toutes ses arêtes se distribuent de manière qu'il y en ait toujours quatre aboutissant à un même point, en y faisant des angles égaux.

J'ai vérifié ces faits par l'expérience suivante : on a plongé au fond d'un vase contenant du liquide glycérique la tête d'une pipe tenue un peu oblique et l'on a soufflé d'une manière continue par le tuyau, de façon à produire une série nombreuse de bulles d'air assez grosses qui traversaient le liquide. On a déterminé ainsi, comme le font les enfants avec de l'eau de savon, la formation d'un édifice cloisonnés élevant au des bords du vase, édifice évidemment de la même constitution que la mousse, mais dont les différentes parties ont des dimensions beaucoup plus grandes; or, aussi loin que l'oeil pouvait plonger dans ce système sans s'égarer, on a reconnu que partout une même arête n'était commune qu'à trois cloisons, et qu'il n'y avait jamais que quatre

¹¹⁸ Ma charpente ayant été accidentellement déformée, puis réparée, la seconde lamelle, quand elle se produisait, ne se plaçait plus tout à fait de la manière indiquée ci-dessus; la différence provenait sans doute d'une petite irrégularité existant dans la charpente, soit avant, soit après la réparation de celle-ci.

arêtes aboutissant à un même point. Quant à l'égalité des angles entre ces arêtes, il y avait certains endroits où trois de celles qui aboutissaient à un point semblaient être à peu près dans un même plan, mais, en regardant avec attention, on constatait que ces arêtes s'infléchissaient fortement en approchant de leur point de concours.

On s'explique d'ailleurs aisément la génération d'un semblable édifice, et conséquemment celle de la mousse: les premières bulles de gaz qui arrivent à la surface du liquide, donnent naissance à des calottes sphériques qui s'accolent comme celles dont nous nous sommes occupés précédemment, et bientôt toute la surface du liquide en est couverte; alors les lames que produisent les bulles gazeuses subséquentes soulèvent nécessairement ce premier assemblage, en déterminant la formation de cloisons inférieures, de manière qu'il y a, en peu de temps, deux systèmes de lames superposés, puis, les bulles gazeuses arrivant toujours, cet ensemble est soulevé à son tour, et ainsi de suite, le tout se disposant avec plus ou moins de symétrie, suivant les différences de volume des bulles gazeuses successives et la distribution des points où elles atteignent la surface du liquide, et le léger édifice composé de cloisons emprisonnant dans les espaces qu'elles séparent tous les volumes de gaz qui constituaient respectivement les bulles, acquiert de plus en plus de hauteur. Si les bulles sont très minimes, l'édifice cloisonné se composera de parties trop petites pour que l'oeil les distingue en général, et l'on aura ainsi de la mousse.

§ 189. Retournons aux systèmes laminaires des charpentes, et complétons-en l'étude. Examinons d'abord la manière dont les lames qui doivent constituer l'un de ces systèmes se disposent pendant qu'on retire la charpente du liquide, et immédiatement après qu'on l'a retirée.

Commençons par le cas d'une charpente prismatique retirée de façon que ses bases soient horizontales. Quand la base supérieure sortira du liquide, chacune des arêtes solides dont elle se compose sera nécessairement suivie d'une lame. Cela étant, si l'angle compris entre deux faces latérales adjacentes du prisme est égal ou supérieur à 120° , c'est-à-dire à l'un des angles égaux que forment entre elles trois lames aboutissant à une même arête liquide, les lames, qui partiront, comme je viens de le dire, de toutes les arêtes de la base, devront, on va le voir, demeurer attachées aux arêtes solides verticales, et cela tant que la base inférieure ne sera pas sortie du liquide.

Prenons comme exemple la charpente d'un prisme hexagonal régulier, prisme pour lequel l'angle de deux faces latérales adjacentes est de 120° , et considérons-la lorsqu'elle n'est encore qu'en partie hors du liquide. Supposons, pour un instant, que les lames qui des arêtes de la base supérieure rentrent vers l'intérieur de la charpente, auquel cas d'autres lames partiront nécessairement des arêtes verticales pour aboutir aux arêtes liquides qui uniront les premières. Toutes ces lames se l'attacheront au liquide du vase par de petites masses à courbures transversales concaves, soulevées le long de leurs bords inférieurs; or il est clair qu'en vertu de leur tension, ces mêmes lames aboutiront à la crête des petites masses dont il s'agit suivant des directions verticales; les lames qui partent des arêtes de la base devront conséquemment s'infléchir en descendant vers le liquide, et ainsi elles seront, dans le sens de leur hauteur, convexes vers l'intérieur de la figure. Mais comme elles seront en contact par leurs deux faces avec l'atmosphère libre, il faudra (§ 97) que leur courbure moyenne soit nulle, ou, en d'autres termes, qu'en chacun de leurs points, les courbures, dans deux directions rectangulaires, soient égal et opposées (§ 2); donc, puisque les lames en question sont convexes dans le sens de leur hauteur, elles seront concaves dans le sens de leur largeur; or, par la double raison de cette concavité et de leur direction rentrante vers l'intérieur de la charpente, nos lames feront nécessairement entre elles deux à deux des angles supérieurs à ceux

des faces du prisme, et conséquemment supérieurs à 120° , ce qui, nous le savons, est impossible; ainsi ces mêmes lames devront rester, comme je l'ai avancé, adhérentes aux arêtes solides latérales tant que toute la charpente n'est pas hors du liquide.

Cette déduction est pleinement confirmée par l'expérience quand on retire du liquide glycérique, dans la position indiquée, la charpente d'un prisme hexagonal régulier, on obtient simplement, jusqu'à ce que la base inférieure soit sortie, des lames planes occupant toutes les faces latérales.

L'épaisseur des fils solides, épaisseur qui, dans mes charpentes, approche d'un millimètre, semblerait, à la vérité, suffire pour établir l'indépendance entre ces lames; mais ici elle n'est pour rien dans le phénomène: j'ai fait construire une charpente prismatique hexagonale dans laquelle les arêtes latérales étaient de simples crins, et les choses se sont passées absolument de la même manière. Dans cette charpente, dont la disposition serait difficile à représenter en petit par la gravure, la base supérieure est soulevée par des ressorts, de façon que les crins, qui s'allongent dans le liquide, soient toujours tendus.

§ 190. Mais, on le comprend, il ne peut plus en être ainsi dans le cas d'une charpente dont les bases ont moins de six côtés, car alors les faces latérales faisant entre elles des angles moindres que 120° , les lames qui partent de deux arêtes adjacentes de la base supérieure et qui, le long de l'arête solide verticale correspondante, seraient en communication par l'intermédiaire du liquide qui mouille cette arête, doivent tendre à se détacher de cette même arête et à se diriger toutes deux vers l'intérieur de la charpente, afin de rétablir entre elles l'angle de 120° ; alors aussi, bien entendu, elles développeront une troisième lame partant de l'arête solide verticale en question, de telle manière que ces trois lames soient unies par une arête liquide oblique partant du point de jonction des trois arêtes solides.

C'est ce que l'expérience vérifie également: quand on retire du liquide une charpente prismatique à base carrée ou la charpente cubique, on voit, dès que la base supérieure est sortie, les lames prendre une direction rentrante, et l'effet est plus prononcé encore avec la charpente du prisme triangulaire équilatéral; on constate, en même temps, que ces lames se comportent comme je l'ai avancé dans le paragraphe précédent, c'est-à-dire qu'elles s'infléchissent pour aboutir à la surface du liquide suivant des directions verticales, et qu'elles sont concaves dans le sens de leur largeur.

Quant au prisme pentagonal régulier, pour lequel l'angle de deux faces latérales adjacentes est de 108° , et conséquemment assez peu inférieur à 120° , on conçoit que la tendance des lames à rentrer doit être faible, et qu'ainsi l'épaisseur des fils métalliques dont sont formées les arêtes solides de mes charpentes ordinaires, est suffisante, dans ce cas, pour établir l'indépendance entre les lames; aussi, avec la charpente pentagonale de la fig. 78, on n'obtient encore, pendant qu'on la retire, que des lames planes dans les faces latérales; mais j'ai fait faire une charpente dans laquelle les arêtes latérales étaient en fil de fer très fin, et alors les lames rentraient; seulement, comme cela devait être, elles rentraient beaucoup moins que pour les deux charpentes précédentes. Cette charpente à arêtes latérales fines est représentée fig. 83; les bases sont maintenues au moyen de deux anses *a* et *b*, par lesquelles on tient la charpente pour la plonger.

§ 191. Voyons actuellement comment ces divers systèmes se complètent, quand on continue à soulever les charpentes. Reprenons d'abord le cas du prisme hexagonal, et supposons que la charpente ait le rapport de dimensions indiqué à la fin du § 186. Lorsque la base inférieure émerge, il se forme une lame s'étendant de cette base à la surface du liquide, lame qui va en se rétrécissant de haut en bas. Si l'on soulève encore la charpente, on atteint bientôt un point où l'équilibre de cette dernière lame

n'est plus possible; car elle se resserre alors spontanément avec rapidité, se ferme en se séparant du liquide du vase, et vient constituer une lame plane dans la base inférieure du prisme. Mais cette lame plane faisant des angles droits avec celles qui occupent les faces latérales, ne pourra, d'après ce qui a été dit dans le paragraphe précédent, persister ainsi; les choses devront se disposer de façon qu'elle fasse avec les lames latérales des angles de 120° . Or c'est ce qui s'effectue de la manière la plus simple : la lame plane dont il s'agit grimpe dans l'intérieur de la charpente en diminuant d'étendue, et tirant ainsi à elle les lames latérales; chacune de ces dernières se plie donc en deux à l'arête liquide qui l'unit à la première, tandis que d'autres lames, partant de chacun des fils solides verticaux, se rattachent aussi aux précédentes suivant les arêtes liquides qui unissent celles-ci deux à deux, et l'équilibre s'établit lorsque la lame centrale a atteint la moitié de la hauteur de la charpente, parce qu'alors tout est symétrique; on a ainsi le système dont j'ai parlé à la fin du § 186.

On comprend que, dans ce système, les lames obliques qui se dirigent vers la lame centrale, ne peuvent faire deux à deux des angles de 120° qu'à la condition d'être convexes, dans le sens de leur largeur, vers l'intérieur de la figure, ce qu'entraîne d'ailleurs la courbure rentrante des côtés de la lame centrale; mais, par suite de la nécessité d'une courbure moyenne nulle, cette convexité exige que les lames dont il s'agit soient concaves dans le sens de leur hauteur; de cette manière toutes les lois sont satisfaites, et, dans le système réalisé, on constate effectivement ces deux courbures opposées des lames obliques. Quant à la lame centrale et aux lames qui partent des arêtes solides latérales, elles sont nécessairement planes, à cause de leur position symétrique par rapport aux autres.

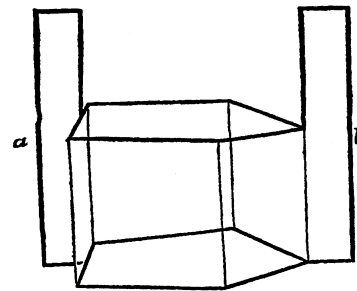


Fig. 83

Une chose à remarquer, c'est que, dans ce même système, les arêtes liquides obliques, qui vont aux sommets de la lame centrale, ne partent pas exactement des sommets des deux bases, mais bien de points situés à une petite distance de ces derniers sommets, sur les arêtes solides latérales; on en saisit aisément la raison: par suite de la forme rectiligne des côtés des bases, la convexité transversale des lames obliques ne saurait exister près d'eux; il faut donc, pour qu'elle puisse s'établir, que ces lames n'abandonnent les arêtes solides latérales pour prendre leurs directions rentrantes, qu'à partir d'une certaine distance des bases; c'est donc à cette distance seulement que peuvent naître les arêtes liquides obliques.

§ 192. Passons aux cas du prisme pentagonal à arêtes latérales fines, du prisme quadrangulaire ou du cube, et du prisme triangulaire, cas dans lesquels les lames partant des arêtes de la base supérieure prennent, comme nous l'avons vu, des directions rentrantes dès que cette base sort du liquide. Quand ces lames commenceront à se montrer, les petites masses soulevées à leurs bords inférieurs dessineront nécessairement sur la surface du liquide un polygone du même nombre de côtés que la base solide, c'est-à-dire, suivant la charpente, un pentagone, un quadrilatère ou un triangle. Seulement, comme les lames en question sont verticales à leur partie inférieure et qu'elles se joignent sous des angles de 120° , il faudra que les côtés des polygones ci-dessus fassent aussi entre eux des angles de 120° , ce qui exige évidemment qu'ils soient convexes vers l'extérieur; ces côtés doivent d'ailleurs partager la courbure hor-

izontale des lames, courbure que nous savons être concave vers l'intérieur de la figure et conséquemment convexe vers l'extérieur. Cette convexité des côtés de nos polygones devra, on le comprend, être très légère pour le pentagone, plus prononcée pour le quadrilatère, et plus encore pour le triangle. Tout cela est également vérifié par l'expérience.

Ces premiers faits établis, suivons séparément le développement du système laminaire dans chacune des trois charpentes, à mesure qu'on la soulève davantage.

Avec la charpente pentagonale, le pentagone curviligne dessiné à la surface du liquide va d'abord en se resserrant un peu, jusqu'à ce qu'une partie assez considérable de la hauteur de la charpente soit hors du liquide; puis il s'élargit de nouveau, et, quand la base inférieure affleure le liquide, les lames rentrantes viennent s'appliquer, par leurs bords inférieurs, sur les côtés de cette base. Cependant ces lames n'occupent pas alors les faces latérales du prisme : elles font légèrement, dans le sens de leur hauteur, ventre vers l'intérieur de la charpente, de sorte qu'elles sont unies deux à deux par des arêtes liquides dont chacune constitue un arc de faible courbure s'appuyant par ses deux extrémités sur celles d'une arête solide latérale. Enfin, peu après la sortie de la base inférieure, les phénomènes s'achèvent comme avec la charpente du paragraphe précédent; c'est-à-dire que la lame produite entre la base dont il s'agit et le liquide vient, sous la forme plane, occuper cette même base, puis monte rapidement en tirant à elle les autres lames, pour donner, en définitive, le système de la fig. 78.

Avec la charpente du prisme quadrangulaire, le quadrilatère curviligne dessiné sur le liquide décroît jusqu'à s'annuler, puis est remplacé par une petite arête liquide horizontale, des extrémités de laquelle partent deux arêtes liquides descendantes, qui vont en s'écartant l'une de l'autre; ces trois arêtes limitent une lame plane verticale parallèle à deux des faces du prisme et se rattachant par d'autres lames aux arêtes solides. Les choses ne changent pas de nature quand on continue à soulever: la lame plane en question va simplement en augmentant de hauteur et en devenant de plus en plus large à sa partie inférieure, jusqu'à ce que la base inférieure du prisme commence à se faire jour à la surface du liquide; alors les deux arêtes liquides descendantes s'appuient par leurs extrémités sur les milieux de deux côtés opposés de cette base; puis, après la sortie complète de celle-ci, la lame qui vient l'occuper se transforme rapidement en quatre lames obliques, deux trapèzes et deux triangles, qui complètent le système. Dans le cas particulier du cube, on a ainsi le système de la fig. 71. Si la hauteur de la charpente est plus grande que la longueur des côtés des bases, les lames obliques qui s'appuient sur ces dernières sont identiquement les mêmes que pour le cube, et les lames partant des arêtes latérales ainsi que la lame plane centrale ont simplement plus de hauteur.

Enfin, avec la charpente du prisme triangulaire, le triangle curviligne à la surface du liquide décroît plus vite, et s'annule quand la charpente n'est sortie encore que d'une quantité assez petite, de manière que la pyramide triangulaire qui doit s'appuyer sur la base supérieure dans le système définitif, se trouve complétée; puis, en continuant à soulever, on voit une arête liquide droite verticale s'étendre du sommet de cette pyramide à la surface du liquide, arête qui est commune aux trois lames partant des arêtes solides latérales. Les choses restent les mêmes pendant qu'on soulève encore, les trois lames ci-dessus et l'arête liquide verticale allant seulement en augmentant de hauteur, jusqu'après la sortie de la base inférieure; alors la lame qui se rend dans cette base se convertit instantanément en la seconde pyramide triangulaire, qui complète ainsi le système de la fig. 74; je suppose, bien entendu, que la charpente ait une hauteur suffisante pour ne pas donner le système de la fig. 77.

§ 193. Prenons actuellement une charpente symétrique autour d'un axe passant par

un sommet, telle que celle d'une pyramide régulière, celle de l'octaèdre régulier, etc., et retirons-la par ce sommet. Il est évident que, dans ce cas, il ne saurait se former de lames occupant les faces qui aboutissent au sommet dont il s'agit, car l'espace qu'elles laisseraient entre elles et le liquide serait vide d'air; il faut donc, de toute nécessité, que les lames partant respectivement de chacune des arêtes solides se dirigent vers l'intérieur de la charpente.

S'il n'y a que trois arêtes solides se joignant au sommet en question et symétriquement disposées, comme dans le tétraèdre, ou dans le cube que l'on retirerait par un sommet, il est clair que les lames partant de ces trois arêtes solides seront unies par une arête liquide unique descendant verticalement du sommet solide à la surface du liquide du vase, et c'est ce qui a lieu en effet. Avec le tétraèdre régulier, les choses vont ainsi jusqu'après la sortie de la base, puis le système s'achève de la même manière que celui du prisme triangulaire, et donne le résultat de la fig. 73.

S'il y a plus de trois arêtes solides aboutissant au sommet que l'on retire, il devra nécessairement, par le fait d'instabilité dont j'ai parlé § 180 et 187, se former des lames additionnelles. Prenons comme exemple l'octaèdre régulier. On comprend que les lames partant des quatre arêtes solides s'uniront, non suivant une arête liquide unique, mais suivant deux arêtes liquides partant du sommet et terminant une lame auxiliaire verticale, de manière qu'à chacune de ces dernières arêtes aboutissent trois lames faisant entre elles des angles égaux. La lame auxiliaire est destinée à former, dans le système laminaire complet, le quadrilatère supérieur (fig. 75). Jusqu'à ce que le carré, base commune des deux pyramides qui constituent l'octaèdre, sortent du liquide, l'ensemble des lames conserve la même disposition; puis, pendant que l'on continue à retirer la charpente, on voit se produire des modifications qu'il serait un peu long de décrire, et par suite desquelles le système tend vers la forme dessinée fig. 84, où les deux faces abc et $a'b'c$ sont occupées chacune par une lame plane. Cette forme est complètement

atteinte au moment où le sommet inférieur de la charpente sort du liquide; mais aussitôt un changement s'opère, et le système prend la forme de la fig. 75. Bien que ce changement soit très rapide, on peut cependant, avec une attention suffisante, et en recommençant plusieurs fois l'expérience, observer comment il se produit: les deux lames qui occupaient (fig. 84), comme je l'ai dit, les faces abc et $a'b'c$, se relèvent vers l'intérieur de la charpente en tournant autour des arêtes solides ab et $a'b'$, et en même temps se développe, à partir du sommet inférieur, un quadrilatère d'abord très petit, qui grandit jusqu'à ce que son sommet supérieur atteigne le centre de la charpente, et qui constitue alors le quadrilatère inférieur du système définitif; en même temps aussi les sommets f et g du quadrilatère curviligne $sfgc$ remontent d'une certaine quantité, ce quadrilatère se raccourcit, ses arêtes deviennent droites, et il forme enfin le quadrilatère supérieur du même système définitif. La fig. 85 représente le phénomène en voie de formation, saisi au moment où le quadrilatère qui s'accroît a acquis la moitié de sa hauteur finale. On comprendra aisément, d'après ce dessin, comment s'engendrent les quatre autres quadrilatères de la fig. 75.

Pour que tous ces phénomènes se produisent à peu près à coup sûr, il faut retirer la

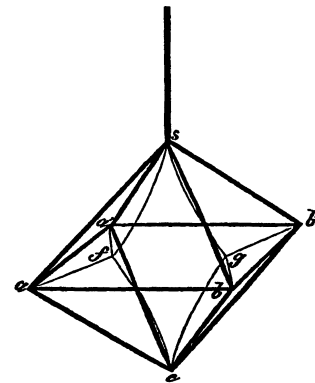


Fig. 84

charpente bien verticalement; il faut, de plus, que cette charpente soit bien construite, que les fils de fer qui la composent aient le moins d'épaisseur possible, et surtout qu'aux sommets de l'octaèdre, ils s'unissent d'une manière bien, du moins du côté qui regarde l'intérieur de la charpente.

Ainsi que je l'ai déjà dit, cette même charpente peut donner aussi des systèmes tout différents de celui de la fig. 75. Ces systèmes sont formés de lames courbes; ils se développent surtout quand on incline légèrement la charpente en la retirant du liquide : l'un d'eux, par exemple, qui s'est montré assez souvent chez moi, contient, en son milieu, une lame hexagonale placée parallèlement à deux des faces de l'octaèdre, et ayant les côtés légèrement rentrants (§ 186); ces côtés sont rattachés aux sommets des deux faces ci-dessus par des lames triangulaires, et aux arêtes de ces mêmes faces par des lames trapézoïdales; en outre, les sommets de la lame dont il s'agit sont rattachés par des lames triangulaires aux autres arêtes solides.

Les différents exemples que j'ai donnés avec détails suffiront pour faire comprendre comment s'engendrent les systèmes laminaires, et pour montrer que la théorie peut rendre compte de toutes les particularités que présente cette génération.

§ 194. Si l'on a soin qu'il n'y ait point de bulles d'air à la surface du liquide du vase avant d'y plonger une charpente, le système laminaire obtenu ne présentera aucun espace fermé de tous les côtés par des lames, et ainsi toutes les lames seront en contact par leurs deux faces avec l'air libre. En effet, pendant qu'on retire la charpente, si le système, avant qu'il éprouve la modification rapide qui lui donne sa disposition finale, contenait un espace fermé, de tous les côtés par des lames, cet espace aurait dû naître et grandir à mesure du soulèvement de la charpente; or cela est impossible, puisque l'air qui devrait le remplir n'aurait eu aucune issue pour y pénétrer; par la même raison, le système, dans cette période de sa génération, ne saurait présenter d'espace fermé en partie par des lames et en partie par la surface du liquide; enfin, quand s'opère la modification rapide, la lame ou les lames qui remontent alors dans le système ne trouvant point d'espace de la seconde espèce pour en achever la fermeture laminaire, le système complet satisfera nécessairement à la condition indiquée.

Insistons ici sur une autre loi, savoir que, dans le système laminaire d'une charpente quelconque, toutes les lames constituent des surfaces à courbure moyenne nulle; cela est évident puisque, d'après ce qui précède, toutes ont leurs deux faces dans l'air libre.

§ 195. Revenons aux systèmes des charpentes prismatiques. Outre les faits que j'ai exposés, ces systèmes m'en ont présenté d'autres également curieux, que je vais rapporter ici.

Le système que l'on obtient avec la charpente pentagonale de la fig. 78 est, on l'a vu (§ 186), composé de lames sensiblement planes; or si l'on considère les lames obliques qui partent de deux côtés homologues des deux bases pour s'unir à l'un des côtés de la lame pentagonale centrale, et si l'on fait attention que ces deux lames obliques doivent former entre elles un angle de 120° , on verra évidemment que, pour des bases de dimensions données, une augmentation dans la hauteur du prisme entraîne une diminution dans l'étendue de la lame pentagonale centrale, et qu'il y a une limite de hauteur au delà de laquelle l'existence de cette lame est impossible. En supposant que les

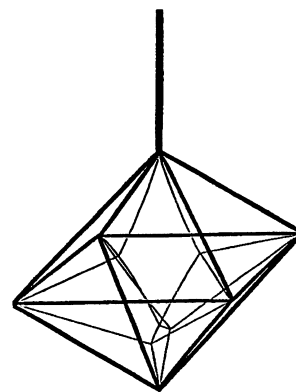


Fig. 85

lames obliques soient rigoureusement planes, on trouve sans peine que la limite dont il s'agit correspond au cas où le rapport entre la hauteur du prisme et le diamètre du cercle qu'on inscrirait à la base serait égal à $\sqrt{3}$, c'est-à-dire à 1,732; mais, à cause de la petite courbure des lames ci-dessus, on n'a ainsi qu'une valeur approximative; nous connaissons plus loin (§ 204) la valeur exacte.

On doit naturellement se demander ce que devient le système laminaire quand cette limite est dépassée. Pour le savoir, j'ai fait construire une charpente dans laquelle la hauteur était environ $2\frac{1}{2}$ fois le diamètre du cercle inscrit, et elle m'a donné un résultat singulier quand on la retire du liquide glycérique, comme les arêtes latérales sont en fil de fer ordinaire, toutes les faces latérales sont d'abord occupées par des lames planes, et, après la sortie complète, une lame plane se forme aussi dans la base inférieure, puis grimpe entre les autres en formant un pentagone qui va en décroissant, tout cela comme avec la charpente de la fig. 78; mais la lame pentagonale décroît beaucoup plus rapidement, puis s'annule, et, à l'instant, le système éprouve un changement brusque, en prenant une disposition bizarre qu'il serait difficile de représenter d'une manière nette par un dessin perspectif, mais dont je vais cependant essayer de donner une idée. Sur les deux bases s'appuient respectivement deux assemblages identiques rentrants, composés de cinq lames courbes, et dont l'un est représenté en projection sur le plan de la base par la fig. 86; on voit qu'il y a dans chacun d'eux, une lame pentagonale, deux lames quadrangulaires et deux triangulaires; ces deux assemblages sont reliés entre eux par les lames qui partent des cinq arêtes latérales du prisme, et par deux autres lames intermédiaires dirigées aussi suivant la longueur de la charpente et partant des arêtes liquides ab et bc de l'un de ces mêmes assemblages pour aboutir aux arêtes liquides homologues de l'autre.

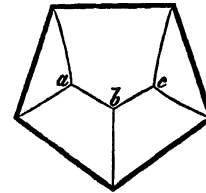


Fig. 86

Je n'ai pas besoin de faire remarquer que la même chose se produirait encore si, au lieu de dépasser la limite indiquée, on se bornait à l'atteindre, c'est-à-dire si l'on donnait au prisme la hauteur qui correspondrait précisément à la simple annulation de la lame pentagonale; en effet, il y aurait alors dix arêtes liquides aboutissant, au centre du système, à un même point liquide, et conséquemment l'équilibre serait instable.

§ 196. Bien que, dans les systèmes laminaires des prismes à un plus grand nombre de côtés, les lames obliques doivent être notablement courbes, il me paraît probable qu'il devait y avoir aussi, pour chacun de ces prismes, une limite de hauteur au delà de laquelle le système ne pourrait renfermer de lame polygonale centrale, et que cette limite devait différer peu de celle relative au prisme pentagonal. Pour vérifier la chose, j'ai essayé d'abord le prisme hexagonal, avec une charpente dont la hauteur était aussi à peu près 2 fois le diamètre du cercle qui serait inscrit à la base. Or, à ma grande surprise, il s'est encore formé une lame hexagonale centrale, quoique beaucoup plus petite qu'avec la charpente du § 186; mais le système avait subi une modification qui maintenait à l'existence de cette lame sa possibilité: les points des arêtes solides latérales d'où partaient les arêtes liquides obliques (§ 191) étaient situés beaucoup plus loin des sommets des bases, de sorte que les choses s'arrangeaient à peu près comme si, en réalité, la charpente eût été raccourcie. Dans cette disposition, les lames partant des côtés des deux bases restent donc, jusqu'à une assez grande distance de ceux-ci, adhérentes aux arêtes latérales solides, d'où il suit que l'on doit considérer l'ensemble comme un système laminaire imparfait; je dis imparfait, parce que les lames qui partent

de tous les côtés d'une même base sont, dans les parties qui demeurent attachées aux arêtes solides latérales, séparées les unes des autres et rendues indépendantes par ces arêtes.

§ 197. Avec des prismes dont le nombre des faces latérales excède six, et dans lesquels, par conséquent, l'angle de deux faces adjacentes est supérieur à 120° , les lames demeurent, sur une beaucoup plus grande étendue, attachées aux arêtes solides latérales. Par exemple, avec une charpente octogonale dans laquelle le rapport entre la hauteur et le diamètre du cercle inscrit à la base est à peu près le même que dans les charpentes ci-dessus, la lame octogonale centrale, au lieu d'être petite, est au contraire très grande, et les deux arêtes liquides obliques partant de l'un quelconque de ses sommets vont s'attacher à l'arête latérale solide correspondante en deux points dont la distance n'est qu'environ le sixième de la longueur de cette arête, et conséquemment un peu moins de la moitié du diamètre du cercle inscrit à la base; dans ce cas donc, les lames qui partent de deux côtés homologues des bases, n'abandonnent les arêtes solides latérales pour se diriger vers la lame octogonale centrale qu'en approchant du milieu de la hauteur de la charpente, et, jusque-là, elles occupent, sous une forme sensiblement plane, les faces latérales du prisme.

Dans la charpente hexagonale du paragraphe précédent, la distance entre les points où s'attachent à une même arête solide latérale les deux arêtes liquides partant de l'un des sommets de la lame centrale, est environ le double du diamètre du cercle inscrit; dans la charpente octogonale, elle est, nous venons de le voir, un peu plus petite que la moitié de ce diamètre; dans une charpente heptagonale, elle est, comme on devait s'y attendre, intermédiaire entre ces deux valeurs, et égale à peu près aux trois quarts de ce même diamètre. J'ai essayé aussi une charpente décagonale, et, dans celle-ci, la distance en question n'est que le sixième du diamètre.

L'épaisseur des fils métalliques a peu d'influence sur ces faits; seulement, avec des charpentes dans lesquelles les arêtes latérales sont en fil de fer très fin, l'écartement des points d'attache des arêtes liquides obliques augmente un peu.

Mais une petite difficulté se présente: la direction des lames rentrantes est évidemment réglée par la nécessité que ces lames fassent entre elles deux à deux des angles de 120° , et que, d'autre part, elles s'appuient sur les côtés concaves de la lame polygonale centrale. Or, dans les charpentes que nous venons de considérer, il semble que ces conditions seraient également remplies si la lame polygonale centrale était plus petite, et si, en même temps, les lames commençaient à rentrer à partir d'une moindre distance des bases; on peut donc se demander ce qui, dans les charpentes des prismes d'un nombre de côtés supérieur à six, détermine la grande étendue de la lame centrale et le peu d'écartement des points d'attache des arêtes liquides obliques. Disons, des à présent, que la cause réside dans un principe de minimum que nous exposerons plus loin (§ 209) et auquel sont soumis tous les systèmes laminaires.

§ 198. J'ai fait construire ensuite une charpente octogonale dont la hauteur n'était que le tiers du diamètre du cercle inscrit. Alors, d'après la valeur donnée plus haut pour l'écartement des points d'attache en question, tous ces points auraient dû être aux sommets du prisme; mais il n'en était pas ainsi: ces mêmes points se trouvaient encore à une certaine distance des sommets, et leur écartement n'était plus que le sixième du diamètre du cercle inscrit; aussi la lame octogonale s'était-elle encore agrandie. Le même effet s'est produit avec un prisme heptagonal dont la hauteur était la moitié du diamètre du cercle inscrit, c'est-à-dire moindre aussi que l'écartement des points d'attache évalué précédemment à l'égard des prismes de ce nombre de côtés.

Du reste, la chose a lieu même dans le prisme hexagonal, puisque (§ 191) avec

une charpente de cette espèce dont la hauteur n'était que $1\frac{1}{6}$ fois le diamètre du cercle inscrit, les points d'attache des arêtes liquides obliques se trouvaient encore à une petite distance des sommets.

§ 199. L'explication de ces derniers faits résulte de ce que nous avons dit à la fin du § 191 : considérons une charpente prismatique octogonale ou heptagonale assez haute pour que les lames qui partent des côtés des bases occupent sous une forme sensiblement plane des portions notables des faces latérales. Aux endroits où ces lames quittent les faces en question pour se diriger vers les côtés de la lame polygonale centrale, elles sont, nous le savons, concaves vers l'extérieur dans le sens de leur largeur; si donc on conçoit la charpente traversée par deux plans perpendiculaires à son axe et passant par les deux séries de points où naissent, sur les arêtes solides latérales, les arêtes liquides obliques, ces deux plans couperont les lames suivant des arcs concaves vers l'extérieur, et si l'on imagine ces arcs solidifiés, l'équilibre du système ne sera pas troublé. D'après cela, si l'on construisait une charpente ayant pour hauteur l'écartement des points d'attache des arêtes liquides obliques sur une même arête solide latérale, et si l'on donnait aux fils de fer qui forment les côtés des bases la courbure des arcs ci-dessus, il est clair que le système laminaire réalisé dans cette charpente aurait ses arêtes liquides obliques partant exactement des sommets; mais avec une charpente de cette hauteur ou d'une hauteur moindre et dont les côtés des bases sont droits, la condition relative aux courbures transversales des lames rentrantes, et conséquemment à la forme d'équilibre de ces lames, ne peut évidemment être satisfaite que si les points d'attache des arêtes liquides obliques se placent à une certaine distance des sommets sur les arêtes solides latérales.

Les faits que nous venons de signaler vérifient, on le voit, ce que nous avons avancé à la fin du § 197 sur la possibilité de l'équilibre, à l'égard d'un prisme d'un nombre de côtés donné avec différentes dimensions de la lame centrale, et différents écartements des points d'attache des arêtes liquides obliques.

§ 200. Si, dans les différents systèmes que nous venons d'étudier, on compare entre elles les lames polygonales centrales, on constate que la courbure de leurs côtés va en augmentant de la lame hexagonale à la lame décagonale, ce qui constitue de nouveaux faits à ajouter à ceux du § 186 en confirmation de la loi relative aux angles sous lesquels les arêtes liquides aboutissent à un même point liquide.

La courbure transversale des lames obliques qui se dirigent vers les côtés de la lame polygonale centrale étant liée à la courbure de ces mêmes côtés, elle doit être moindre dans le prisme heptagonal que dans l'octogonal, et moindre encore dans l'hexagonal; c'est à cause de la faiblesse de la courbure en question dans ce dernier prisme, qu'il donne, quand il n'a pas trop de hauteur, un système laminaire presque parfait, avec sa lame hexagonale.

§ 201. En réfléchissant à la génération des systèmes laminaires, je me suis demandé si, au moins dans le prisme hexagonal, et avec la charpente du § 196, on ne réaliserait pas un système exempt de lame polygonale centrale en retirant la charpente du liquide glycérique de manière que l'axe du prisme fût horizontal, au lieu d'être vertical comme dans les expériences précédentes. J'ai donc fait donner à la fourche une disposition qui me permit d'agir ainsi, et j'ai, en effet, réussi complètement. Bien plus, j'ai obtenu deux systèmes différents, suivant que la charpente était retirée de façon que deux arêtes latérales

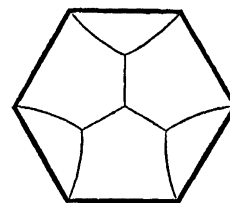


Fig. 87

sortissent en même temps du liquide, ou qu'on en fit sortir d'abord une, puis simultanément ses deux voisines; ces deux systèmes sont du genre de celui qui se réalise dans une charpente pentagonale suffisamment haute (§ 195), c'est-à-dire qu'ils sont composés de deux assemblages de lames courbes obliques reliés entre eux par d'autres lames dirigées suivant la longueur du prisme. La projection de l'un de ces assemblages sur le plan de la base est représentée, dans le premier mode, par fig. 87 et, dans le second, par la fig. 88. Mais ce n'est pas tout; pour produire le premier de ces deux systèmes, il faut, quand on a retiré du liquide la moitié de la charpente, achever l'opération avec une très grande lenteur; quand on agit sans cette précaution, il se forme un troisième système d'un autre genre encore, système dont, malgré sa simplicité, il est assez difficile de donner une idée nette par une description ou par un dessin : il contient deux lames hexagonales courbes s'appuyant respectivement, par un de leurs côtés, sur l'un de ceux des bases, et se dirigeant obliquement vers l'intérieur de la charpente; les autres côtés de ces hexagones ont, comme toujours, une courbure concave ; les côtés courbes de chacun de ces mêmes hexagones sont reliés aux côtés correspondants de la base voisine et aux côtés homologues de l'autre hexagone par des lames courbes; enfin aux arêtes liquides qui unissent ces dernières lames deux à deux aboutissent d'autres lames partant des arêtes latérales de la charpente. Les côtés des bases sur lesquels s'appuient les deux lames hexagonales appartiennent à la face du prisme qui est sortie la première du liquide.

Le prisme heptagonal donne des résultats analogues, avec une charpente ayant ses dimensions dans le même rapport. Seulement, d'abord, les trois systèmes sont imparfaits, en ce sens que, dans les deux premiers, les lames qui partent des côtés des bases demeurent, jusqu'à une certaine distance des sommets, adhérentes aux arêtes solides latérales, et que, dans le troisième, les lames qui vont des côtés courbes de l'une des lames heptagonales aux côtés homologues de l'autre, sont attachées, sur la plus grande partie de leur longueur, aux arêtes solides latérales, en affectant, dans cette étendue, une forme sensiblement plane; en outre, nouvelle bizarrerie, le système fourni par le second mode est instable; à peine formé, il commence à se modifier spontanément: les deux assemblages situés près des bases s'allongent, d'abord lentement, puis de plus en plus vite, s'atteignent, et aussitôt apparaît le système imparfait avec la lame heptagonale au milieu. La projection, sur le plan de la base, de l'un des assemblages du système dû au premier mode est représentée fig. 89; la projection relative au second mode n'a pu être dessinée, parce que les modifications spontanées qu'éprouve le système empêchent de bien observer celui-ci.

Les faits que je viens de décrire, joints à celui que j'ai rapporté à la fin du § 193, montrent qu'avec certaines charpentes, les résultats diffèrent suivant la manière dont on retire ces charpentes du liquide glycérique.

Présumant que l'instabilité du second système de la charpente heptagonale pouvait tenir à ce que cette charpente n'avait pas assez de longueur, j'en ai fait construire une autre dans laquelle la longueur était triple du diamètre du cercle inscrit ; mais je n'ai rien gagné; en outre, les deux premiers systèmes se produisaient plus difficilement, et l'on obtenait presque toujours le troisième, c'est-à-dire celui qui contient deux lames heptagonales

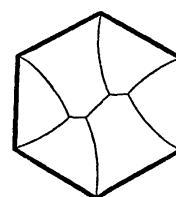


Fig. 88

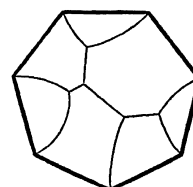


Fig. 89

obliques partant respectivement de l'un des côtés des bases. Enfin, avec une charpente plus allongée encore, on n'a jamais que ce dernier système.

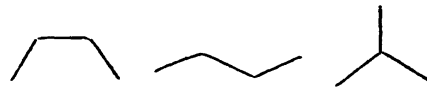
Quant au prisme octogonal, quelque modification qu'on ait fait subir au rapport entre sa longueur et le diamètre du cercle inscrit, il a refusé obstinément de donner autre chose que les systèmes imparfaits avec la lame octogonale au milieu ou avec les deux lames octogonales obliques, et ce dernier est aussi le seul qui, se réalise quand le rapport est suffisamment grand.

§ 202. M. Van Rees, qui m'a fait l'honneur de répéter mes expériences en Hollande, a trouvé, à l'égard des systèmes laminaires des charpentes prismatiques, un principe fort remarquable qu'il a bien voulu me communiquer, et que je vais exposer ici; seulement ce principe ne sera compris sans difficulté que des personnes qui ont vu les systèmes auxquels il s'applique.

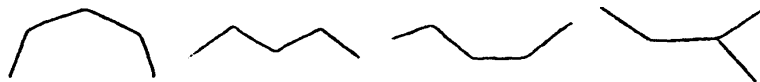
Les systèmes dont il s'agit sont du genre de ceux dont les fig. 86 à 89 montrent des projections. Dans les systèmes de cette espèce, nous le savons, sur chacune des bases de la charpente s'appuie une sorte de pyramide rentrante laquelle a pour sommet de petites arêtes liquides unies entre elles, soit bout à bout en formant des angles, comme dans les fig. 86 et 88, soit de manière qu'il y en ait trois aboutissant à un même point, comme dans les fig. 87 et 89; de chacune de ces petites arêtes part, nous le savons aussi, une lame parallèle à l'axe du prisme et allant s'attacher, par son autre extrémité, à la petite arête homologue de l'autre pyramide. Or voici l'énoncé du principe de M. Van Rees:

Si n désigne le nombre des faces latérales du prisme, 1° le nombre des petites arêtes formant le sommet de chacune des deux pyramides rentrantes, et conséquemment aussi le nombre des lames longitudinales allant des petites arêtes de l'une des pyramides à celles de l'autre, est $n - 3$; 2° le nombre des systèmes de cette espèce réalisables dans une même charpente est égal à celui des figures ouvertes différentes qu'on peut former avec les $n - 3$ petites arêtes, sous la condition qu'il n'y en ait jamais plus de trois aboutissant à un même point.

Ainsi, pour le prisme triangulaire, on a $n - 3 = 0$, et nous savons, en effet, que, dans le système laminaire de cette charpente, le sommet de chacune des pyramides rentrantes est un simple point. Pour le prisme quadrangulaire, $n - 3$ est égal à 1, il y a une seule petite arête au sommet de chaque pyramide, et conséquemment un seul système possible de l'espèce que nous considérons. Pour le prisme pentagonal, $n - 3$ est égal à 2, il y a deux petites arêtes, et comme on ne peut former avec celles-ci qu'une seule figure ouverte, savoir un angle (fig. 86), il n'y a également qu'un seul système possible de l'espèce en question. Pour le prisme hexagonal, le principe indique trois petites arêtes, et, par suite, les figures :



il y a donc trois systèmes; j'en avais produit deux (fig. 87 et 88), et M. Van Rees les a produits tous les trois. Pour le prisme heptagonal, le principe conduit aux figures:



d'où quatre systèmes; mes expériences ne m'en avaient fourni que deux, et tous les quatre ont été obtenus par M. Van Rees. Pour le prisme octogonal, il y a au moins

treize figures, et partant treize systèmes; je n'avais réussi à en développer aucun; M. Van Rees en a fait naître plusieurs, et croit qu'on peut les réaliser tous, mais il pense que la plupart sont instables.

Pour provoquer la génération des systèmes dont il est question ici, M. Van Rees amène d'abord le système qui contient, au milieu de sa hauteur, une lame polygonale parallèle aux bases; puis il replonge d'une petite quantité dans le liquide la base de la charpente, et la retire ensuite; la lame plane qui va alors occuper cette base, et qui emprisonne ainsi de l'air dans l'espace limité par elle, par les lames obliques et par la lame polygonale, monte en chassant cette dernière devant elle, et détermine, au milieu de la figure, une sorte de polyèdre laminaire fermé, dont les faces latérales, en même nombre que celles du prisme représenté par la charpente, sont convexes vers l'extérieur; cela fait, il crève une de ces faces latérales, et le système résultant est alors celui dans lequel les petites arêtes dont j'ai parlé constituent une ligne brisée dont tous les angles sont de même sens. Il passe ensuite de ce système à l'un quelconque des autres qui conviennent à la charpente, en soufflant sur l'une ou l'autre des arêtes liquides parallèles à l'axe, suivant le plan de l'une des lames longitudinales intérieures auxquelles cette arête appartient. Il ajoute qu'on parvient quelquefois plus facilement au premier système de ce genre sans réaliser d'abord le polyèdre laminaire intérieur, en soufflant simplement sur l'une des arêtes de la lame polygonale.

Le principe de M. Van Rees s'applique sans doute à toutes les charpentes prismatiques, quel que soit le nombre de leurs faces latérales; mais je ne pense pas qu'on puisse pousser la vérification expérimentale au-delà du prisme octogonal, pour lequel elle est déjà difficile.

§ 203. Ce n'est pas seulement avec les charpentes prismatiques que M. Van Rees a employé son procédé du replongement partiel; quand, après avoir obtenu le système ordinaire d'une charpente quelconque, on replonge celle-ci de quelques millimètres par l'une de ses faces, puis qu'on la retire, la lame qui va remplir cette face et qui monte ensuite entre les autres, détermine toujours la formation d'un polyèdre laminaire intérieur. Ce polyèdre a généralement le même nombre de faces que celui qui est représenté par la charpente, et ces faces sont toujours plus ou moins convexes.

On obtient souvent, de cette manière, des résultats fort jolis: par exemple, avec la charpente cubique, le nouveau système (fig. 90) contient, en son milieu, un cube laminaire à arêtes et à faces légèrement convexes, rattaché par ses arêtes aux lames partant des arêtes solides; de même, avec la charpente du tétraèdre, le nouveau système présente, en son milieu, un tétraèdre laminaire à arêtes et à faces convexes; etc. On s'explique aisément ces convexités par les lois relatives aux angles des lames et des arêtes liquides.

Les lames qui constituent les polyèdres intérieurs en question, ne sont évidemment pas à courbure moyenne nulle c'est qu'elles sont en contact, par une de leurs faces, avec une masse d'air limitée, et non avec l'air libre. Je reviendrai ci-après sur ces mêmes polyèdres, dont M. Lamarle a fait une étude spéciale.

M. Van Rees, qui, ainsi que nous l'avons vu, parvient à modifier certains systèmes par une action convenable du souffle, a fait une application intéressante de ce

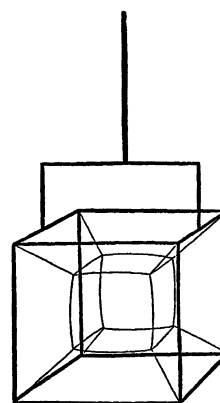


Fig. 90

procédé au système ordinaire de la charpente cubique (fig. 71): dans ce système, la lamelle quadrangulaire centrale est, nous le savons, parallèle à deux faces opposées du cube; mais, à cause de la symétrie de la charpente, il est évidemment indifférent, pour l'équilibre, que ce parallélisme ait lieu par rapport à un couple de faces ou par rapport à un autre; la lamelle peut donc occuper également trois positions, et l'on comprend qu'il suffit d'une cause très légère pour déterminer son choix. Aussi, quand on retire la charpente du liquide glycérique, trouve-t-on la lamelle en question tantôt parallèle aux faces antérieure et postérieure, tantôt parallèle aux faces de droite et de gauche, et il arrive même quelque fois qu'elle se place horizontalement. Or on peut la faire passer à volonté, et plusieurs fois de suite, de l'une de ces trois positions à une autre; il suffit, pour cela, de souffler très légèrement sur l'une de ses arêtes par la face de la charpente du côté de laquelle se trouve cette arête : on voit alors la lamelle se rétrécir dans le sens du souffle, se réduire à une simple ligne, puis se reproduire dans sa nouvelle position.

Par un moyen que je vais indiquer, on détermine, dans les systèmes de certaines charpentes, une modification d'un autre genre, et assez curieuse: si, après avoir réalisé le système ordinaire du cube, on creve la lamelle quadrangulaire centrale, le système prend immédiatement une disposition toute différente, et également régulière, bien qu'il présente un vide en son milieu; on amène un résultat analogue, mais avec deux vides, en crevant, dans le système de l'octaèdre (fig. 75), d'abord le quadrilatère supérieur, puis la lame qui remplace alors le quadrilatère inférieur.

§ 204. La deuxième partie du Mémoire de M. Lamarle, Mémoire dont j'ai déjà parlé au § 158, contient, à l'égard de mes systèmes laminaires, une suite de résultats dont je vais rappeler les principaux; ces résultats concernent surtout les polyèdres laminaires intérieurs:

1° Un second procédé pour la réalisation de ces polyèdres laminaires consiste à produire d'abord le système ordinaire de la charpente, puis à gonfler une bulle de grosseur convenable et à l'introduire dans ce système; elle s'attache aux lames de celui-ci, et, quand on retire le tube qui a servi à la souffler, elle forme aussitôt le polyèdre laminaire intérieur. On peut augmenter ou diminuer à volonté les dimensions de ce polyèdre: pour cela, on y introduit l'extrémité effilée d'un tube, après l'avoir mouillée de liquide glycérique, et on souffle ou on aspire par ce tube.

2° Dans la charpente tétraédrique, les faces du tétraèdre laminaire réalisé à l'intérieur sont de courbure sphérique, et conséquemment les arêtes de ce même tétraèdre sont de courbure circulaire; le centre de la sphère à laquelle appartient l'une quelconque des faces, est situé au sommet opposé; enfin le centre de la circonférence à laquelle appartient l'une quelconque des arêtes, est situé au milieu de la corde de l'arête opposée.

3° Dans la charpente du prisme triangulaire, quand le rapport entre la hauteur du prisme et le côté de la base est compris entre certaines limites, on peut, à volonté, par des manoeuvres convenables, obtenir, au milieu de la figure résultant d'une seule immersion, une lame triangulaire parallèle aux bases ou une arête liquide parallèle aux arêtes latérales. Entre certaines limites aussi, on peut développer un prisme triangulaire intérieur, mais les faces de celui-ci ne sont jamais de courbure sphérique.

4° Dans la charpente cubique, les faces de l'hexaèdre laminaire intérieur sont de courbure sphérique, et le rayon des sphères auxquelles elles appartiennent est égal à une fois et demie la droite qui joindrait deux sommets opposés de l'une d'elles.

5° Dans la charpente du prisme pentagonal, pour que le rapport entre la hauteur et le diamètre du cercle qu'on inscrirait à la base corresponde précisément à l'annulation de la lamelle polygonale centrale, il faut que ce rapport soit égal à $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3-\sqrt{5}}} = 1,618$.

Avec cette même charpente, quand le rapport est très peu inférieur à la limite ci-

dessus, on peut obtenir, ad libitum, dans le résultat d'une seule immersion, ou bien une lame pentagonale très petite au milieu de la figure, ou bien l'autre système, c'est-à-dire celui qui présente des espèces de pyramides rentrantes s'appuyant sur les bases. Quant au polyèdre laminaire intérieur, il ne prend des faces de courbure sphérique que dans certaines conditions de volume.

6° Dans la charpente du dodécaèdre régulier, le dodécaèdre laminaire intérieur a ses faces de courbure sphérique, mais d'un très-grand rayon.

7° Dans tous les systèmes ci-dessus avec polyèdre laminaire intérieur, quand les faces de celui-ci sont de courbure sphérique, toutes les lames qui s'étendent de ses arêtes à celles de la charpente, sont planes, et conséquemment toutes les arêtes liquides qui joignent ses sommets à ceux de la charpente, sont droites.

8° A l'égard de la charpente octaédrique, un artifice de raisonnement conduit à priori à cinq systèmes différents, systèmes qui sont très probablement les seuls possibles, et dont je n'avais bien observé que deux (§§185 et 193); les trois autres contiennent respectivement, en leur milieu, une lame pentagonale, une lame quadrangulaire trapézoïdale, et une lame quadrangulaire équilatérale. Tous ces systèmes se réalisent à volonté, et on peut les faire passer, également à volonté, des uns aux autres. Dans celui qui n'a que des lames planes (fig. 75), les dimensions des différentes parties ont entre elles et avec les dimensions de la charpente, des rapports numériques fort simples; j'en ai signalé un au § 185.

La théorie convenablement traitée indique, dans ce même système à lames planes, la possibilité de quinze polyèdres intérieurs différents; elle les fait dériver les uns des autres, et le tout se vérifie par l'expérience.

9° Quand on réalise l'un de ces polyèdres intérieurs, on voit se former six petites lames triangulaires qui y aboutissent; en crevant deux ou quatre de ces lamelles, on obtient des systèmes d'un genre particulier, et qu'on peut nommer incomplets. Pour trois de ceux-ci, qui résultent de la disparition de deux lamelles opposées, les polyèdres intérieurs, primitivement octaédriques, sont devenus des hexaèdres, et ont des formes très élégantes; la disparition de deux autres lamelles opposées transforme l'un de ces hexaèdres en un tétraèdre d'un aspect curieux à raison du contournement de ses faces.

§ 205. J'ai désigné comme imparfaits (§ 196) les systèmes dans lesquels des lames demeurent, sur une partie de leur étendue, adhérentes à la fois à deux arêtes solides. Les systèmes qui ne présentent pas cette circonstance, je les appelle parfaits parce que toutes les lames y dépendent complètement les unes des autres; sauf quelques cas exceptionnels très rares, on obtient ces systèmes parfaits dans les charpentes des polyèdres dont tous les angles dièdres sont inférieurs à 120° : par exemple, ainsi que nous l'avons vu, dans celles du tétraèdre, du cube, de l'octaèdre, et des prismes dont le nombre des faces latérales est moindre que six; la charpente du dodécaèdre régulier, polyèdre dont les angles dièdres ne sont que de 116° et une fraction, donne également un système parfait.

Lorsqu'on a retiré du liquide glycérique la charpente d'un polyèdre dont tous les angles dièdres sont, au contraire, supérieurs à 120° , on trouve toujours simplement chacune des faces, moins une, remplie par une lame plane; la face qui fait exception demeure vide; c'est qu'il faut une ouverture pour l'entrée de l'air. Ce ne sont pas là de véritables systèmes laminaires, puisque toutes les lames y sont rendues indépendantes les unes des autres par l'intermédiaire des fils solides; nous pouvons donc les nommer systèmes nuls: ils se produisent, par exemple, avec la charpente de l'icosaèdre régulier, où les angles dièdres sont de 138° et une fraction, avec celle de l'ensemble de deux pyramides hexagonales ou d'un plus grand nombre de côtés, réunies par leurs bases, et

telles, qu'aux arêtes de la base commune les angles dièdres surpassent 120° , etc.

Cependant quand tous les angles dièdres dépassent peu 120° , on obtient, dans quelques cas, un système laminaire réel: c'est ce qui a lieu, par exemple, avec la charpente du polyèdre formé en abattant les sommets d'un cube par des sections équilatérales qui se joignent, de manière qu'il n'y ait que des faces triangulaires et des faces carrées. Mais, dans ce polyèdre, tous les angles dièdres ne sont que d'environ 125° ; d'ailleurs le système laminaire réel et symétrique se produit avec difficulté, et seulement quand on retire la charpente par une face triangulaire; quand on la retire par une face carrée, elle donne toujours un système nul.

§ 206. Dans le Mémoire que j'ai déjà cité (S 187), Brewster indique un procédé curieux pour la production des systèmes laminaires de plusieurs charpentes: celle sur laquelle on veut opérer étant préalablement mouillée de liquide glycérique, mais ne contenant aucune lame, on gonfle, dans son intérieur, une grosse bulle, qui s'attache à l'ensemble des arêtes solides, de manière que chacune des faces se trouve occupée par une lame, puis on crève l'une de ces lames, et le système ordinaire apparaît aussitôt. Outre le spectacle singulier de cette transformation instantanée, le procédé de Brewster offre ainsi l'avantage de réaliser les systèmes laminaires en n'exigeant qu'une fort petite quantité de liquide. Je dois avertir que j'ai vainement essayé ce procédé avec mes charpentes; il est probable que celles de Brewster avaient des dimensions beaucoup moindres; mais voici un autre procédé qui n'exige également que peu de liquide, et qui m'a donné un plein succès; je l'ai employé avec les charpentes du cube et des prismes hexagonal et pentagonal, et je ne doute pas qu'il ne convienne aussi pour celles de tous les polyèdres dont aucun angle dièdre n'excède 120° : on verse le liquide glycérique dans une petite assiette, où il peut ne former qu'une couche de quelques millimètres d'épaisseur; puis, si l'on veut, par exemple, réaliser le système du cube, on plonge successivement dans le liquide les quatre faces latérales de la charpente, de sorte que chacune d'elles se trouve occupée par une lame plane; enfin on plonge et l'on retire également la base, et le système s'achève aussitôt de lui-même. S'il s'agit d'un prisme, on remplit pareillement, les unes après les autres, toutes les faces latérales et la base. Je rappellerai ici que les arêtes de ma charpente cubique ont 7 centimètres de longueur.

§ 207. Les systèmes laminaires variant avec la forme des charpentes, on peut imaginer des polyèdres de fantaisie, choisis de manière que tous leurs angles dièdres soient moindres que 120° , en faire construire les charpentes, et les essayer, dans un simple but de curiosité, pour observer les systèmes qui s'y produisent. On obtiendra souvent, de cette manière, des résultats fort jolis.

§ 208. Après avoir mentionné (§ 172) l'expérience de mon fils relative à l'effet de la chaleur sur la tension des lames liquides, j'ai dit que j'en ferais connaître une autre; la voici:

On développe le système de la charpente cubique, puis on introduit l'extrémité fortement chauffée d'une baguette de verre dans l'espèce de pyramide creuse formée par les lames qui partent des quatre arêtes de l'une des faces du cube, et l'on choisit l'une des pyramides dont le fond est une arête de la lamelle centrale; aussitôt on voit cette lamelle diminuer d'étendue. C'est que, par suite de la position de la baguette, la lamelle s'échauffe moins qu'une partie des lames environnantes, et conserve ainsi un excès relatif de tension. On ne peut attribuer l'effet à la dilatation des lames les plus chauffées, car, si toutes les tensions demeuraient égales, la forme du système ne pourrait évidemment se modifier; les lames qui tendraient à se dilater enverraient seulement une portion de leur liquide dans la lamelle centrale.

J'ajouterai ici une expérience étrangère à l'action de la chaleur. Je m'étais dit que si

L'on pouvait réaliser un système dont une partie des lames fussent formées d'un liquide et l'autre d'un autre liquide à tension différente, le système ne pourrait plus satisfaire à mes lois quant à légalité des angles entre les lames et entre les arêtes liquides. Une telle réalisation est sans doute impossible d'une manière complète, mais on peut en approcher par le moyen suivant: on produit encore le système de la charpente cubique, et on le pose de manière que la lamelle centrale soit horizontale. Cela fait, si l'on introduit au milieu de cette lamelle l'extrémité d'un petit pinceau imbibé de liquide glycérique, la lamelle n'éprouve aucun changement; mais si le pinceau est imprégné d'un liquide à tension plus forte, on voit la lamelle se contracter très notablement. J'ai obtenu le meilleur résultat avec une solution d'albumine préparée simplement en battant un blanc d'oeuf, puis laissant la mousse se convertir partiellement en liquide: la lamelle qui, dans ma charpente, a environ 13mm de dimension dans les deux sens, se resserre alors jusqu'à n'avoir plus que 8mm quand on enlève le pinceau, elle reprend rapidement 9mm, puis semble rester en cet état pendant quelques secondes, après quoi elle revient lentement à ses dimensions originaires.

Dans cette expérience, le liquide du pinceau se répand plus ou moins sur la lamelle, de sorte que la portion qui en est recouverte possède la tension appartenant à ce même liquide, tension qui ne peut plus être équilibrée, sans modification du système, par les tensions des autres lames. On verra (§§258 et 299) que la solution d'albumine a effectivement une tension de beaucoup supérieure à celle du liquide glycérique.

Un liquide de moindre tension que celui qui constitue le système doit déterminer, au contraire, un agrandissement de la lamelle, et c'est ce que j'ai également constaté: le système laminaire a été réalisé avec la solution d'albumine, dans une charpente cubique de 5 centimètres de côté; on a déposé sur la lamelle centrale une gouttelette de solution de savon, liquide dont la tension est sensiblement égale à celle du liquide glycérique; aussitôt la gouttelette s'est étendue de manière à remplacer, dans la lamelle, la solution d'albumine, et, en même temps, cette lamelle a pris un accroissement notable.

§ 209. Envisageons maintenant les systèmes laminaires sous un point de vue plus général.

La tension constituant un effort incessant pour diminuer l'étendue des surfaces liquides, il s'ensuit que, dans tout système laminaire, la somme des aires des lames doit être un minimum.

C'est donc là un principe qui régit la constitution de tous ces systèmes.

§ 210. Lorsque j'ai posé ce principe, en 1861, à la fin de ma 6^{me} Série, je comprenais qu'il existe une dépendance nécessaire entre ce même principe et les lois que j'avais trouvées (§ 184) relativement aux nombres des lames unies par une même arête liquide et des arêtes liquides aboutissant à un même point liquide, ainsi qu'aux angles des lames entre elles et des arêtes entre elles; mais je ne pouvais saisir cette dépendance, et il me paraissait à peu près impossible de la découvrir.

Or, dans la première partie du Mémoire dont j'ai résumé plus haut (§ 204) la deuxième, M. Lamarle a repris la question, et en a résolu toutes les difficultés avec une sagacité merveilleuse et un rare bonheur.

Il commence par établir plus nettement que je ne l'avais fait le principe du minimum de la somme des aires; puis, partant de là, il s'occupe des lames aboutissant à une même arête liquide. Il imagine un nombre quelconque de lames planes partant d'arêtes solides et se joignant toutes suivant une arête liquide commune, et il coupe l'ensemble par un plan perpendiculaire à celle-ci. La section se composant de droites partant respectivement de points fixes et aboutissant toutes à un même point, il démontre d'abord, par des considérations de géométrie élémentaire, que si les droites sont

au nombre de trois, leur somme sera un minimum quand elles feront entre elles des angles égaux. Si les droites sont plus nombreuses, il démontre, toujours par des considérations aussi simples, que, pour avoir une somme minima d'une manière absolue, il faut substituer au point de concours unique plusieurs points de concours reliés entre eux par des droites additionnelles, de telle façon qu'à chacun de ces points il n'y ait que trois droites faisant entre elles des angles égaux. Enfin, la diminution de la somme des droites commençant dès l'origine de ces modifications, c'est-à-dire, dans le cas de plus de trois droites, par exemple, dès que le point de concours se dédouble pour donner naissance aux droites et aux points additionnels, il s'ensuit que la démonstration s'applique également à des lignes courbes, car on peut toujours remplacer celles-ci par leurs tangentes dans le voisinage immédiat du point de concours. M. Lamarle fait voir alors que tous ces résultats s'étendent aux lames elles-mêmes, planes ou courbes, dont l'ensemble est coupé par le plan dont il s'agit; c'est-à-dire que le minimum de la somme des aires exige que ces lames se joignent trois à trois, sous des angles égaux, à chaque arête liquide.

Ainsi se trouvent complètement démontrées et déduites du principe du minimum deux des lois appelées plus haut.

M. Lamarle passe ensuite à la question des arêtes liquides concourant en un même point liquide. Pour la traiter, il imagine que des lames liquides planes aboutissent toutes à un même point de l'intérieur du système, et il cherche les conditions que devront remplir ces lames pour qu'elles puissent se joindre trois à trois sous des angles égaux, conformément aux lois précédentes. Il considère le point qui leur est commun comme le centre d'une sphère, qu'elles viennent ainsi couper suivant des arcs de grands cercles; on a de cette manière un certain nombre de pyramides creuses ayant pour sommets un même point, et, pour bases, des polygones sphériques dont tous les angles sont de 120° . M. Lamarle fait d'abord remarquer que ces polygones ne peuvent être que des triangles, des quadrilatères et des pentagones, ce qui lui fournit une relation analytique entre les nombres respectifs de ces différents polygones et le nombre total des lames; il en trouve une autre par la condition que la somme des surfaces de ces mêmes polygones doit représenter la surface totale de la sphère; enfin tous les polygones dont il s'agit doivent être simplement juxtaposés, sans empiètements des uns sur les autres en certains endroits et vides entre eux en d'autres endroits. Au moyen de ces trois conditions, M. Lamarle trouve qu'il n'y a que sept assemblages possibles de lames partant d'un même point et se joignant trois à trois sous des angles égaux.

Si, dans chacun de ces assemblages, on remplace les côtés des polygones sphériques par leurs cordes, on a l'ensemble des arêtes d'un polyèdre, et les sept polyèdres ainsi formés sont: le tétraèdre régulier; le prisme triangulaire droit à base équilatérale, avec un rapport déterminé entre la hauteur et le côté de la base; le cube; le prisme pentagonal droit à base régulière, avec un rapport déterminé entre la hauteur et le côté de la base; deux polyèdres particuliers composés de quadrilatères et de pentagones; enfin le dodécaèdre régulier. Dans l'intérieur de ces polyèdres, les nombres des arêtes liquides sont respectivement 4, 6, 8, 10, 12, 16 et 20.

Or M. Lamarle démontre que, pour chacun de ces systèmes, à l'exception de celui du tétraèdre régulier, on peut toujours concevoir un mode de déformation d'où résulte, à partir de son origine jusqu'à une certaine limite, une diminution de la somme des aires des lames; la disposition qui a lieu dans le système du tétraèdre régulier, c'est-à-dire quatre arêtes liquides aboutissant à un même point liquide sous des angles égaux, est donc la seule qui puisse se maintenir; celles des six autres systèmes, si elles pouvaient être réalisées, se modifie l'aient évidemment à l'instant même, pour atteindre la condi-

tion du minimum. Ainsi, quand les lames sont planes, les arêtes liquides qui se joignent en un même point liquide sont nécessairement au nombre de quatre, et font entre elles des angles égaux. Enfin M. Lamarle fait voir que la même conclusion s'applique aux lames courbes, et, par suite, aux arêtes courbes; en effet, rien ne limite la petitesse de la sphère mentionnée plus haut, et conséquemment on est maître de supposer cette sphère assez minime pour que les portions de lames comprises dans son intérieur puissent être considérées comme planes.

Les deux lois concernant les arêtes sont donc démontrées par M. Lamarle aussi complètement que celles qui concernent les lames, et également déduites du principe du minimum.

Ajoutons que les modes de déformation supposés par M. Lamarle, et qu'il parvient, au moyen d'une conception ingénieuse, à faire rentrer tous dans un même principe, sont précisément ceux qui conduisent aux résultats réels, c'est-à-dire aux systèmes permanents que donnent les charpentes en fil de fer.

§ 210bis. Dans une conférence donnée à Prague en 1868, et publiée en 1872 (voir le No 26 du § 508), M. Mach a décrit le fait suivant: on emprisonne dans une mince membrane de caoutchouc la charpente du tétraèdre régulier, et l'on substitue au fil de fer de suspension partant de l'un des sommets, un tube étroit qui communique avec l'espace intérieur, puis on extrait l'air par ce tube; on voit alors les faces membraneuses se creuser de plus en plus, les deux parties de la membrane qui s'appuient sur un même fil solide s'appliquer l'une contre l'autre, et l'on obtient enfin le système laminaire avec ses quatre arêtes aboutissant au centre.

Pour expliquer la tendance des surfaces liquides vers un minimum d'étendue, M. Mach émet une idée fort simple : les molécules de la surface d'un liquide sont attirées vers l'intérieur par celles qui sont situées plus profondément; de là une tendance de ces molécules superficielles à pénétrer dans l'intérieur de la masse ou de la lame; mais, à mesure qu'une partie d'entre elles quittent ainsi la surface, celle-ci s'amointrit, et le phénomène s'arrête nécessairement lorsqu'elle est devenue un minimum. Cette théorie, on le voit, a beaucoup d'analogie avec celle qu'a présentée M. Lamarle (§ 160) pour expliquer la tension.

CHAPITRE VI.

Théorie de la génération des lames liquides; moyens différents de produire ces lames; particularités qu'elles présentent suivant le procédé employé pour les développer.

§ 211. Dans les trois chapitres précédents, nous avons étudié les lames liquides au point de vue surtout des formes qu'elles affectent dans les différentes conditions où on les place; nous allons maintenant aborder une autre question, qui me semble bien digne d'intérêt, savoir la génération même des lames dont il s'agit; nous essaierons de montrer que cette génération est un résultat nécessaire de la cohésion et de la viscosité du liquide. Nous examinerons donc sous ce rapport les différents modes de production des lames liquides, et nous signalerons en même temps les particularités que présentent les lames obtenues par ces divers moyens.

Prenons d'abord un cas fort simple, celui de la lame en forme de calotte sphérique développée à la surface d'un liquide par une bulle d'air qui s'est élevée de l'intérieur de ce liquide. Considérons la bulle d'air au moment où elle n'est plus qu'à quelques millimètres de la surface (fig. 91)¹¹⁹. Pour que son sommet franchisse la distance mn qui l'en sépare, il faut nécessairement que les molécules liquides situées tout autour de cette petite droite

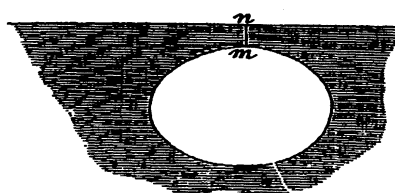


Fig. 91

soient chassées dans tous les azimuts à la fois, de sorte que ces molécules éprouveront des déplacements relatifs. Imaginons, pour simplifier, que le mouvement ascensionnel de la bulle d'air soit uniforme, de manière que, dans des intervalles de temps égaux, la bulle chasse, d'entre elle et la surface supérieure du liquide, des quantités égales de ce liquide. Imaginons, de plus, que le liquide n'ait aucune viscosité. Alors, à mesure que la distance mn diminuera, les portions de liquide chassées pendant les intervalles de temps ci-dessus prendront des vitesses respectives de plus en plus grandes, puisqu'elles devront effectuer leurs mouvements dans des espaces de plus en plus étroits; ainsi les déplacements relatifs des molécules liquides sont d'autant plus rapides que le sommet de la bulle d'air est plus près d'atteindre la surface. J'ai supposé uniforme le mouvement ascensionnel de cette bulle; mais comme, en réalité, il est accéléré, son accélération augmentera encore l'accroissement de rapidité des déplacements relatifs en question.

Maintenant, on sait que la viscosité oppose au déplacements relatifs des molécules des liquides une résistance qui croît considérablement avec la vitesse de ces déplacements. Si donc, pour passer au cas réel, nous restituons à notre liquide sa viscosité, la résistance au transport latéral des molécules liquides autour de mn ira en augmentant à mesure que cette droite diminuera de longueur, et deviendra très grande lorsque cette même droite sera devenue très petite. Il résulte nécessairement de là que lorsque le sommet de la bulle d'air est arrivé près de la surface, l'amincissement de la portion de liquide qui l'en sépare encore ne peut plus s'effectuer avec une rapidité égale à celle du mouvement ascensionnel de ce sommet; et dès lors, pour que l'air qui constitue la bulle continue à monter et passe au-dessus du niveau du liquide, il faut évidemment ou que ce liquide se déchire, ou qu'il soit soulevé. Or on ne peut plus douter, depuis

¹¹⁹ Dans ce dessin, on a représenté la bulle d'air un peu aplatie dans le sens vertical; c'est ce qui a lieu en effet, par suite de la résistance du liquide.

les belles recherches de MM. Donny¹²⁰, Henry¹²¹ et Dupré¹²², que la cohésion des liquides ne soit du même ordre que celle des solides; on comprend donc que lorsque la distance mn sera assez réduite pour que sa diminution ultérieure ne puisse plus se faire avec une rapidité à peu près égale à celle de l'ascension du sommet de la bulle, le liquide présentera encore en mn beaucoup trop de résistance à la désunion de ses molécules pour qu'il se déchire, et qu'ainsi il sera soulevé par la bulle sous la forme d'une lame; et comme cette lame, pendant sa génération, est poussée de bas en haut par la bulle d'air et qu'elle tient par son contour au liquide du vase, elle devra être convexe vers l'extérieur.

Dès que la lame a commencé à naître, elle doit se développer davantage : car, d'une part, incessamment poussée par la bulle d'air, elle doit continuer à s'élever, et, d'autre part, le liquide auquel adhère son contour ne peut la suivre en masse à cause de son poids; ce liquide devra donc rester en arrière; mais, la cohésion et la viscosité aidant, il ne pourra y avoir rupture entre la lame naissante et le liquide environnant, et la lame devra simplement s'accroître, jusqu'à ce que l'action de bas en haut exercée sur la partie inférieure de la bulle d'air ait eu tout son effet.

J'ai appelé l'attention (§ 11) sur ce fait que lorsqu'une masse d'huile un peu moins dense que le liquide alcoolique dans lequel elle est immergée s'élève à la surface de ce dernier, elle s'aplatit d'abord plus ou moins contre cette surface, comme si elle éprouvait une résistance à la traverser, puis qu'après quelque temps, elle se fait jour, et présente alors une portion de surface plane plus ou moins étendue, au niveau de celle du liquide alcoolique. Ce phénomène s'explique maintenant d'une manière naturelle par les considérations qui précèdent: il en est de la sphère d'huile comme d'une bulle d'air, elle ne peut se faire jour à l'extérieur qu'en désunissant les molécules de la couche supérieure du liquide ambiant, mais celle-ci ne pouvant s'amincir assez vite à cause de sa viscosité, résiste à la rupture en vertu de sa cohésion. Seulement il est clair que, dans ce cas, la pellicule ne saurait être soulevée au-dessus du niveau. Enfin les mêmes considérations s'appliquent à l'espèce de résistance qu'éprouvent à s'unir deux masses d'huile qu'on amène l'une vers l'autre dans le liquide alcoolique (§ 6).

§ 212. Revenons à notre lame convexe développée par l'ascension d'une bulle d'air. Lorsqu'elle aura atteint tout son développement, et qu'ainsi elle demeurera stationnaire, elle devra, nous le savons, affecter l'une des figures d'équilibre qui conviendraient à la surface d'une masse liquide sans pesanteur; or cette figure, qui s'est formée par une action égale dans tous les azimuts autour de l'axe vertical de la bulle d'air, doit évidemment être de révolution, et, comme elle est fermée sur l'axe, elle ne peut (§37) constituer qu'une, portion de sphère.

Voyons maintenant ce que la théorie nous apprendra sur l'étendue de cette portion par rapport à la sphère complète. En vertu de sa tension, notre lame fait effort pour occuper le moins d'étendue possible. Dès lors, si l'on néglige certaines particularités dont je parlerai bientôt et qui, du reste, n'ont pas d'influence sensible quand le volume d'air est un peu grand, la question est ramenée à chercher quel est, pour un volume donné, le segment de sphère dont la surface est la plus petite. Ce problème se traite aisément par le calcul, et l'on trouve ainsi que le segment dont il s'agit est un hémisphère; mais on arrive plus simplement encore au même résultat par le raisonnement suivant, dont je dois l'idée à M. Lamarle.

¹²⁰ *Mémoires de l'Académie de Belgique* tome XVII des 7 *Mémoires couronnés et des savants étrangers*. Le travail de M. Donny a été présenté à l'Académie en Décembre 1843.

¹²¹ *Philos. Magaz.*, 1845, vol. XXVI, page 541.

¹²² *Théorie mécanique de la chaleur*. Paris, 1869, chap. VIII.

Concevons deux segments sphériques quelconques égaux entre eux et appliqués l'un contre l'autre par leurs bases. Pour que la surface convexe de chacun d'eux soit la moindre possible par rapport au renfermé entre elle et la base commune, il suffit évidemment que la surface convexe totale de l'ensemble de ces deux segments soit la moindre possible par rapport au volume total; or, d'après un principe connu, cette dernière condition sera remplie si l'ensemble constitue une sphère unique, auquel cas chacun des deux segments sera un hémisphère.

Notre lame liquide, si elle contient un volume d'air suffisant, doit donc prendre la forme hémisphérique, et c'est ce que l'observation vérifie, comme tout le monde le sait.

§ 213. Occupons-nous actuellement des petites particularités auxquelles j'ai fait allusion plus haut.

En premier lieu, le liquide du vase s'élève un peu, par l'action capillaire, sur la face extérieure et sur la face intérieure de la figure laminaire, comme il le fait à la base de toute lame qui vient se rattacher à sa surface (§§189 et 192); il forme ainsi la petite masse annulaire à surfaces méridiennes concaves sur la crête de laquelle s'appuie la calotte.

En second lieu, on comprend, d'après cela, que si le volume d'air emprisonné est assez petit pour que l'espace circonscrit par le bord de la lame ait peu de diamètre, la surface du liquide dans ce même espace, n'aura aucune partie plane, mais présentera, même en son milieu, une courbure concave plus ou moins prononcée, comme à l'intérieur d'un tube peu large. Ce résultat est d'accord avec l'expérience, et je me suis assuré, par un moyen que j'indiquerai bientôt, que la portion centrale de la surface en question cesse de paraître plane lorsque le diamètre de la lame, à la crête de la petite masse annulaire, est au-dessous de 2 centimètres environ.

Enfin, en troisième lieu, même avec un volume d'air assez grand pour que, dans l'espace circonscrit par la lame, la surface du liquide se montre absolument plane dans la presque totalité de son étendue, cette surface doit être abaissée au-dessous du niveau extérieur par la pression que la lame, en vertu de sa courbure, exerce sur l'air emprisonné, et c'est encore ce que l'on constate par le procédé suivant :

Dans un grand plat de porcelaine posé sur une table en face d'une fenêtre, on verse une couche de liquide glycérique d'environ 2 centimètres d'épaisseur; puis, après avoir gonflé une bulle du même liquide, on la dépose au milieu de la surface de cette couche, où elle forme aussitôt un segment sphérique. On se place alors de façon à voir le ciel par réflexion sur la surface dont il s'agit, et l'on tient un fil noir tendu horizontalement à une petite distance de la lame de telle manière qu'une portion de son image réfléchie s'aperçoive dans l'espace circonscrit par cette lame. L'image totale du fil se montre ainsi formée de trois parties, deux extérieures et une intérieure à la figure laminaire; les deux premières se recourbent au voisinage de la lame, par suite du relèvement capillaire dont j'ai parlé; quant à la troisième, si la surface circonscrite a, en son milieu, une portion plane, on trouvera, en reculant ou en avançant le fil, une position de celui-ci pour laquelle le milieu de l'image sera rectiligne. C'est ce qui a lieu avec des lames dont le diamètre excède 2 centimètres, mais en deçà de cette limite, toute la partie de l'image intérieure à la lame paraît courbe.

Quand la lame a un grand diamètre, cette partie de l'image du fil est rectiligne dans presque toute sa longueur; elle se recourbe seulement vers ses extrémités, à cause encore du relèvement capillaire; mais sa portion droite n'est pas dans le prolongement des portions droites extérieures à la lame, on la voit un peu plus bas. Cet abaissement, qui montre que la surface plane circonscrite se trouve, comme je l'ai avancé, au-dessous

du niveau extérieur, est d'autant moins prononcé que le diamètre de la lame est plus considérable, ce qui doit avoir lieu, en raison de la diminution de la courbure et, par suite, de la pression de la lame, mais il est encore très sensible pour une lame d'un décimètre de diamètre.

§ 214. Le raisonnement du § 212 suppose nécessairement que la lame s'appuie par son bord même sur la surface plane du liquide du vase, et que la portion de cette surface circonscrite par la lame conserve sa forme plane et son niveau; or ces conditions n'étant jamais toutes entièrement remplies, ainsi que nous venons de le voir, il s'ensuit que le raisonnement en question ne peut être considéré comme suffisamment rigoureux, que lorsque la différence d'avec les conditions imaginaires sur lesquelles il repose est peu notable. Essayons de préciser davantage.

Si l'on remplit de liquide glycérique, jusqu'un peu au-dessus du bord, une large soucoupe de porcelaine préalablement nivelée et posée sur une table vis-à-vis d'une fenêtre, puis qu'après y avoir déposé une bulle, on se place de manière à voir la lame se projeter sur un fond obscur, et que, fermant un oeil, on tient l'autre au niveau de la petite masse annulaire, on distingue parfaitement celle des deux lignes méridiennes de cette petite masse qui regarde l'extérieur de la figure, ainsi que le commencement, à partir du sommet de la crête, de celle qui regarde l'intérieur. On aperçoit donc très bien ce sommet, et l'on peut dès lors estimer approximativement sa hauteur verticale au-dessus de la surface plane extérieure. On reconnaît ainsi que, pour les grandes calottes, cette hauteur dépasse à peine 2mm, et qu'elle est moindre encore pour les petites. D'autre part, quand la lame a de grandes dimensions, quand, par exemple, son diamètre est d'un décimètre, la portion de la surface du liquide circonscrite dans son intérieur peut être regardée comme exactement plane dans presque toute son étendue. Enfin, d'après les expériences du paragraphe précédent, avec une semblable lame, l'abaissement de cette surface, quoique bien sensible encore, est cependant très minime. Il suit des résultats du § 121 que la lame supposée hémisphérique et d'un décimètre de diamètre exercerait sur l'air intérieur et, par suite, sur la portion circonscrite de la surface du liquide, une pression équivalente à celle d'une colonne d'eau de 0mm,226 de hauteur; pour évaluer cette même pression en colonne de liquide glycérique, il suffit de diviser la quantité précédente par la densité 1,1065 de ce liquide, ce qui donne 0mm,204. Telle est conséquemment la valeur du petit abaissement que subirait la surface du liquide dans l'espace circonscrit par la lame. Avec un pareil volume d'air et une lame hémisphérique, les choses se trouveraient donc sensiblement dans les conditions du raisonnement en question, et l'on en conclura qu'alors la lame devra prendre en effet cette forme ou que, du moins, l'écart sera inappréciable.

Mais il est aisé de faire voir qu'avec un volume d'air suffisamment petit, la lame, sera loin de constituer un hémisphère. Imaginons, par exemple, une bulle d'air n'ayant qu'un millimètre de diamètre, et montant à la surface du liquide; supposons, pour un instant, qu'elle y forme une calotte hémisphérique. Dans cette hypothèse, la portion de la surface du liquide circonscrite par la lame et comptée à partir du bord de celle-ci ou, si l'on veut, à partir de la crête de la petite masse annulaire, constituerait nécessairement, à cause de ses dimensions minimes, un hémisphère concave, de sorte que la bulle d'air continuerait à former une sphère entière d'un millimètre de diamètre. Cela posé, rappelons-nous que la pression exercée par une lame sphérique en vertu de sa courbure, est (§ 116) la somme des actions dues séparément aux courbures de chacune de ses deux faces, ou, puisque ces deux actions sont égales, le double de l'une d'elles; or l'action de la face intérieure de notre petite lame hémisphérique serait, quant à son effort pour faire descendre la bulle d'air, contrebalancée par l'action opposée de

l'hémisphère concave qui limiterait la bulle inférieurement, comme je l'ai dit, et il resterait, d'une part l'action due à la face extérieure de la lame, action qui pousserait la bulle d'air de haut en bas, et, d'autre part, une petite pression hydrostatique qui pousserait cette bulle de bas en haut si le point inférieur de celle-ci était au-dessous du niveau du liquide. Mais, dans le cas du liquide glycérique, il suit encore des résultats du § 121, en prenant, d'après la remarque faite plus haut, la moitié de la valeur qu'ils donnent, et en divisant par la densité du liquide, que la première des deux actions ci-dessus équivaldrait à une différence de niveau de 10mm,19; tandis qu'en supposant même l'absence de la petite masse annulaire, la seconde ne proviendrait évidemment que d'une différence de niveau égale au rayon de la bulle d'air, c'est-à-dire à 0mm,5, Avec notre petit volume d'air et une lame hémisphérique, l'équilibre est donc impossible; pour qu'il existe, il faut nécessairement que la bulle d'air demeure presque tout entière au-dessous du niveau du liquide, et ne donne ainsi naissance qu'à une lame à peine soulevée et d'une très faible courbure; alors, en effet, la petite pression hydrostatique qui tendra à faire monter la bulle d'air équivaldra au poids minime d'un volume de liquide in peu moindre que celui de cette bulle, et la légère pression exercée par la lame en vertu de sa faible courbure suffira pour contrebalancer les petites actions opposées.

L'expérience vérifie encore pleinement cette déduction de la théorie. On a versé, jusqu'à une certaine hauteur, du liquide glycérique dans le vase à parois planes en verre servant aux expériences sur les masses d'huile; on a un peu agité le liquide pour qu'il s'y introduisît petites bulles d'air; on en a choisi une d'environ 1mm de diamètre suffisamment rapprochée de l'une des parois, et on l'a observée à travers cette paroi, en plaçant l'oeil successivement un peu au-dessous du niveau du liquide, puis au-dessus. On a reconnu de cette manière que la petite huile paraissait sphérique, et qu'elle était presque THÉORIE ET PROCÉDÉS. entièrement plongée, de sorte que la saillie au-dessus du niveau était très faible.

§ 215. Il est clair, d'après cela, que si l'on forme des lames successives à la surface de l'eau de savon ou du liquide glycérique en leur donnant des diamètres de moins en moins grands, à partir d'un décimètre, on arrivera à une limite au-dessous de laquelle les lames commenceront à se montrer sensiblement affaissées, c'est-à-dire à paraître constituer moins qu'un hémisphère. Pour déterminer approximativement cette limite à l'égard du liquide glycérique, on a déposé, comme je l'ai indiqué dans le paragraphe précédent, les bulles sur la surface du liquide contenu dans une soucoupe un peu plus que pleine, et l'on s'est assuré qu'elles ne paraissent hémisphériques que pour des diamètres supérieurs à 3 centimètres environ; au-dessous de cette valeur, les bulles forment des segments sensiblement moindres par rapport à la sphère entière, et cette diminution est d'autant plus prononcée que le diamètre de leur base est plus petit.

§ 216. Ce que je viens d'exposer sur les calottes laminaires est extrait de ma 6me Série, qui a paru en 1861; or, ainsi que je l'ai dit au § 167, M. Van der Mensbrugge a donné, en 1869, une formule relative à l'équilibre d'une calotte laminaire reposant sur le même liquide ou sur un liquide différent. Voici le passage de son Mémoire qui se rapporte à ce sujet: « si l'on conçoit la calotte coupée par un plan méridien, la section comprendra deux arcs de cercle parallèles entre eux jusque très près du niveau du liquide ambiant;

dans le voisinage de celui-ci, les arcs iront en s'écartant l'un de l'autre pour rejoindre, le premier, la surface

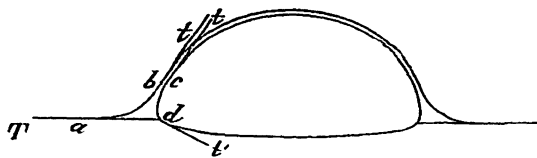


Fig. 92

extérieure en passant par un point d'inflexion, et le second, la surface intérieure limitée par la lame, en demeurant toujours concave. Cela

étant, considérons l'une des portions $abcd$ (fig. 92)¹²³ de la masse annulaire limitée à partir du sommet bc , par deux courbes ba , cd telles que je viens de les décrire; si, dans le plan de niveau, nous menons la tangente à la courbe ab , cette droite coupera la ligne cd en un point d . Voyons actuellement quelles sont les forces qui tendent à déplacer dans le sens horizontal le liquide contenu dans la tranche qui a pour limites la crête bc de la masse annulaire, les courbes ab , dc , et la partie rectiligne ad ; ces forces sont: 1° la tension T du liquide extérieur appliquée en a ; 2° les composantes horizontales des deux tensions t agissant en b et c ; et 3° la composante horizontale de la tension t' appliquée en d (toutes ces tensions sont d'ailleurs dirigées vers l'extérieur de la petite masse liquide); si donc α et β représentent les angles que font avec l'horizon les tangentes en b ou c et en d , nous aurons:

$$T = 2t \cos \alpha + t' \cos \beta. \text{ »}$$

Remarquons, à l'égard de la tension t' que, lorsqu'on a déposé la bulle, la portion inférieure de celle-ci recouvre nécessairement la surface du liquide à l'intérieur de la calotte, et se mêle sans doute plus ou moins avec ce liquide; la tension t' qui appartient à cette portion de surface, est donc très probablement intermédiaire entre les tensions T et t .

J'ai indiqué (§§167 et 168) les vérifications auxquelles l'auteur a soumis sa formule dans le cas où les deux liquides diffèrent; mais il applique également cette même formule au cas d'un seul liquide, et, par suite, aux faits des trois paragraphes précédents; il s'exprime ainsi :

« ...si les trois tensions T , t et t' sont égales entre elles, nous nous plaçons dans le cas d'une lame d'eau de savon, par exemple, formée à la surface du même liquide; l'équation devient alors: $2 \cos \alpha + \cos \beta = 1$; or, quand la lame est très grande, la pression exercée sur l'air qu'elle contient est très faible, et conséquemment β diffère très peu de 0; il s'ensuit que α est alors très rapproché de 90° , c'est-à-dire que la lame peut être considérée comme sensiblement hémisphérique. Si nous faisons maintenant décroître les dimensions de la calotte, la pression de l'air intérieur augmente et avec elle β ; donc alors α devient de plus en plus petit et la lame constitue une portion de moins en moins grande de la sphère entière. Cette conséquence démontre d'une manière complète ce qui a été exposé à cet égard par M. Plateau.»

On voit, en outre, que si $\cos \alpha$ est très voisin de 1, on doit avoir $\cos \beta$ très voisin de -1 ; c'est le cas d'une bulle d'air extrêmement petite, laquelle ne produit dans la surface liquide qu'une saillie imperceptible (§ 214).

Signalons encore une conséquence fort curieuse de la même formule, toujours dans la condition d'un seul liquide : si l'on dépose la bulle, non sur une couche épaisse de ce liquide, mais sur une plaque de verre qui en est simplement mouillée, il ne peut plus y avoir d'enfoncement dans l'espace circonscrit par la calotte; on a donc nécessairement $\cos \beta = 1$, et, par suite, $\cos \alpha = 0$; dès lors la calotte, même avec un très petit diamètre, doit être exactement hémisphérique, comme je l'ai avancé à la fin du § 175, et c'est ce que l'expérience vérifie pleinement: on a déposé, sur une plaque de verre préalablement

¹²³ Dans cette figure, on a exagéré pour la démonstration l'épaisseur de la lame et les dimensions de la masse annulaire.

mouillée de liquide glycérique, de petites bulles du même liquide, donnant des calottes de 5mm à 7mm de diamètre, et elles ont paru complètement hémisphériques, tandis que des calottes d'un semblable diamètre flottant sur une couche épaisse du liquide se montraient fortement affaissées.

Enfin la formule de M. Van der Mensbrugge ne s'applique pas seulement aux lames en forme de calottes, mais évidemment à toute lame qui vient se rattacher à la surface du liquide, comme celles qui partent des côtés de la base supérieure d'une charpente prismatique de moins de six côtés, pendant qu'on retire cette charpente du liquide (§ 192): quand la surface de celui-ci est plane et au même niveau des deux côtés de la petite masse soulevée à la base de la lame, on a aussi $\cos \alpha = 0$, d'où il suit que la lame aboutit verticalement à la crête de la petite masse; c'est d'ailleurs là, comme je l'ai dit au § 189, une conséquence immédiate de la tension.

§ 217. Revenons aux calottes. Bien qu'une semblable lame développée à la surface d'une liquide soit en équilibre de figure, le repos absolu n'y existe cependant pas: l'action de la pesanteur, nous le savons, oblige incessamment les molécules à glisser du haut vers le bas de la lame, de sorte que celle-ci est le siège de mouvements continuels. Ce phénomène, du reste, n'est pas si simple qu'il le paraît au premier aperçu; nous en ferons, dans les deux chapitres suivants, l'objet d'un examen détaillé.

§ 218. Nous avons commencé (§ 211) notre étude de la génération des lames, en cherchant comment se forme une calotte sphérique laminaire par l'action d'une bulle gazeuse qui monte de l'intérieur du liquide; passons actuellement à des lames obtenues à l'aide d'un autre procédé. Reprenons l'expérience du § 20, expérience qui consiste, on l'a vu, à produire, dans un anneau cylindrique solide, au sein du liquide alcoolique, une lentille bi-concave d'huile. Augmentons les courbures de cette lentille jusqu'à ce que les deux surfaces soient près de se toucher par leurs sommets¹²⁴. On pourrait croire a priori que si l'on absorbait encore du liquide, la masse se désunirait au point où s'effectuerait ce contact, et que l'huile se retirerait en tout sens vers la bande métallique. Pourtant il n'en est point ainsi: on observe alors, au centre de la figure, la formation d'un petit espace circulaire nettement terminé, à travers lequel les objets ne paraissent plus diminués, et l'on reconnaît aisément que ce petit espace est occupé par une lamelle d'huile à faces planes. Si l'on continue à enlever graduellement du liquide, cette lamelle augmente de plus en plus en diamètre, et on peut l'étendre ainsi jusqu'à une assez petite distance de la surface solide. On a donc ainsi une lame liquide développée au sein d'un autre liquide. Dans mon expérience, le cylindre métallique avait un diamètre de sept centimètres, et j'ai pu agrandir la lame jusqu'à ce que sa circonférence ne fût plus distante de la surface solide que d'environ cinq millimètres; mais, à cet instant, elle s'est rompue, et le liquide qui la constituait s'est retiré avec rapidité vers celui qui demeurait encore adhérent à la bande métallique.

La génération d'une semblable lame reçoit la même explication que celle de la calotte sphérique: en effet, les sommets des deux surfaces concaves ne peuvent marcher l'un vers l'autre sans que du liquide soit chassé d'entre ces sommets vers les parties plus épaisses de la masse, et, en supposant que l'absorption s'opère avec une vitesse uniforme, les mouvements des molécules chassées sont nécessairement d'autant plus rapides que l'espace dans lequel ils s'effectuent se rétrécit davantage; il doit donc arriver un instant où, par suite de la viscosité, la rapidité de ces mouvements ne peut plus correspondre à celle de l'absorption, et alors il faut que la figure liquide ou bien se brise, ou bien prenne une forme hétérogène, car il devient évidemment impossible

¹²⁴ Pour effectuer cette opération, on comprend qu'il faut appliquer le bec de la seringue, non au milieu de la figure, mais près de la bande métallique, où l'épaisseur du liquide est plus grande.

que ses surfaces continuent à satisfaire dans toute leur étendue à une même condition d'équilibre, c'est-à-dire à avoir partout une même courbure moyenne; mais la cohésion s'oppose à la rupture; de là conséquemment naissance d'une lame plane à laquelle se rattache la masse pleine restante, avec ses faces à courbure moyenne négative.

Remarquons ici, comme à l'égard de la calotte sphérique, qu'aussitôt la lame développée, l'équilibre n'existe plus que dans la forme générale de l'ensemble: par suite de la concavité des courbures de la partie pleine, celle-ci appelle constamment à elle le liquide de la lame, d'où il résulte que cette lame va toujours en s'amincissant, jusqu'à ce qu'elle éclate.

§ 219. Reprenons aussi nos polyèdres d'huile pleins réalisés (§§29 et 30) au sein du liquide alcoolique, dans les charpentes en fil de fer. Si, après avoir formé l'un de ces polyèdres, on applique le bec de la seringue vers le milieu de l'une de ses faces et qu'on aspire graduellement de l'huile, on voit se produire des phénomènes remarquables. Choisissons comme exemple le cube. Dès que la seringue commence à agir, toutes les faces s'enfoncent simultanément et de mêmes quantités, de manière que les contours solides carrés servent de bases à six figures creuses identiques. On conçoit qu'il en doit être ainsi pour le maintien de l'égalité entre les pressions.

Si l'on enlève de nouvelles portions de liquide, les faces se creusent de plus en plus; mais, pour bien apprécier ce qui se passe lorsqu'on continue cette manoeuvre, il est nécessaire d'énoncer ici une proposition préalable. Supposons que l'on introduise dans le vase une plaque carrée en fer, dont les côtés aient la même longueur que les arêtes de la charpente métallique, puis que l'on mette en contact avec l'une des faces de cette plaque une masse d'huile égale en volume à celle qui est perdue par l'une des faces du cube; le liquide, après s'être étendu sur la plaque, présentera en relief la même figure que la face du cube modifié présente en creux. Alors, en effet, en passant de la surface creuse à la surface en relief, les rayons de courbure correspondants à chaque point ne feront que changer à la fois de signe, sans changer de valeurs absolues; et, par conséquent (§ 2), puisque la condition de l'équilibre est satisfaite à l'égard de la première de ces surfaces, elle le sera également à l'égard de la seconde.

Maintenant, imaginons un plan passant par l'un des côtés de la plaque, et tangent à la surface du liquide qui y adhère. Tant que ce liquide sera en petite quantité, on conçoit, et l'expérience le vérifie, que le plan dont il s'agit sera fortement incliné vers la plaque; mais si l'on augmente graduellement la quantité du liquide, l'angle compris entre le plan et la plaque ira aussi en croissant, et pourra, d'aigu qu'il était, devenir obtus. Or, tant que cet angle sera inférieur à 45° , la surface convexe du liquide adhérent à la plaque demeurera identique avec les surfaces concaves de la masse attachée à la charpente métallique et convenablement amoindrie; mais, au-delà de cette limite, la coexistence, dans la charpente, des six surfaces creuses identiques avec la surface en relief, devient évidemment impossible: car ces surfaces devraient se couper mutuellement. Ainsi, quand on continue à enlever du liquide à la masse qui formait le cube, il arrive un point où la figure d'équilibre cesse d'être réalisable d'après la loi ordinaire; or on se trouve alors évidemment dans des conditions analogues à celles de l'expérience du paragraphe précédent; aussi des lames commencent-elles à se former. Ces lames sont planes; elles partent de chacun des fils de la charpente, et lient à ces derniers le reste de la masse, qui continue à présenter six surfaces concaves.

On conçoit, en effet, que, par cette modification de la figure liquide, l'existence de l'ensemble de celle-ci dans la charpente métallique redevient possible, car rien n'empêche plus alors les surfaces concaves de pren-

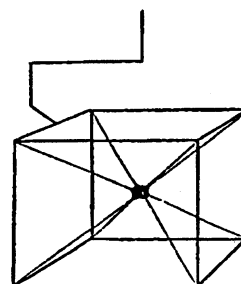


Fig. 93

dre une forme qui s'accorde avec la loi de la courbure moyenne.

Si l'on enlève encore de nouvelles portions de liquide, les lames vont en s'agrandissant, tandis que la masse pleine, qui occupe le milieu de la figure, diminue de volume, et l'on peut ainsi réduire cette masse à des dimensions très minimes; la fig. 93 représente tout le système dans ce dernier état. Il est même possible de faire disparaître entièrement la petite masse centrale, et d'obtenir ainsi un système laminaire complet; mais, pour cela, il est nécessaire d'employer certaines précautions que je vais indiquer. Lorsque la masse centrale est devenue assez petite, il faut d'abord essayer parfaitement le bec de la seringue, sans quoi l'huile adhère à l'extérieur de celui-ci jusqu'à une certaine hauteur, et cette attraction maintient autour de lui une certaine quantité d'huile que l'instrument ne peut absorber dans son intérieur. En second lieu, il faut amener le bec de la seringue assez bas pour qu'il soit près d'atteindre la surface inférieure de la petite masse. Cela étant, on voit, pendant la succion, cette surface s'élever jusqu'à toucher l'orifice de l'instrument, et ce dernier absorbe alors autant de mélange alcoolique que d'huile; mais on ne doit pas s'inquiéter de cette circonstance, et l'on voit la petite masse diminuer par degrés, pour disparaître enfin complètement. Le système est alors celui de la fig. 82; mais il ne se forme que pendant l'action de la seringue; si, lorsque cette action est complétée, on retire lentement le bec de l'instrument, on voit se développer la lamelle centrale quadrangulaire du système de la fig. 71.

Ainsi, par l'exhaustion graduelle de sa masse, notre cube d'huile se convertit en un système laminaire pareil à celui qu'on obtient immédiatement en retirant la charpente du liquide glycérique; la seule différence est que, dans ce dernier, les arêtes liquides sont, comme je l'ai dit, d'une excessive ténuité, tandis que, dans le système laminaire d'huile, elles ont une largeur visible, ce qui permet de constater ce que j'ai avancé (§ 173), savoir que, dans un système laminaire, les arêtes liquides constituent de petites masses, et qu'elles ont de fortes courbures concaves dans le sens transversal.

Indiquons encore une précaution nécessaire pour la réalisation complète de ce système: à partir de l'instant où les lames prennent naissance, il faut faire marcher l'épuisement du liquide le plus rapidement possible, jusqu'à ce que la masse centrale ait atteint un certain degré de petitesse. En effet, dès que les lames commencent à paraître, les arêtes liquides commencent nécessairement à se montrer; or ces arêtes, à cause de la concavité de leurs surfaces, exercent (§ 33) une succion sur le liquide des lames, et déterminent ainsi un amincissement graduel de ces dernières; en outre, un appel semblable, mais moins énergique, est produit par la masse centrale, qui présente aussi des surfaces concaves; si donc l'exhaustion de cette masse par la seringue s'effectuait avec trop de lenteur, le système pourrait se rompre avant qu'elle fût terminée. Lorsque la masse centrale est suffisamment réduite, et l'expérience apprend bientôt à juger du point convenable, il faut ralentir de plus en plus l'épuisement, et enfin employer les autres précautions que j'ai mentionnées. Le système laminaire d'huile ainsi formé dans une charpente cubique de 7 centimètres de côté, peut persister une demi-heure.

§ 220. Lorsqu'on est arrivé, pendant l'action de la seringue, au système de la fig. 82, si, au lieu de retirer l'instrument avec lenteur, on le détache brusquement par une petite secousse, la lamelle additionnelle ne se développe pas; mais on voit se reformer très rapidement la petite masse de la fig. 93. Ce fait confirme d'une manière remarquable l'explication que nous avons donnée à la fin du paragraphe précédent.

En effet, à l'instant où le bec de l'instrument se sépare du système, celui-ci peut être considéré comme composé de pyramides creuses; or les sommets de ces pyramides doivent constituer non de simples points, mais de petites surfaces concaves. Maintenant ces petites surfaces ayant de très fortes courbures dans tous les sens, elles donneront lieu à un appel plus énergique que celui qui est dû aux arêtes liquides, car, dans ces dernières, la courbure est nulle suivant une direction; l'huile des lames doit donc se transporter beaucoup plus abondamment vers le centre de la figure que vers les autres parties des jonctions de ces lames; en outre, les douze lames aboutissant à ce même centre, l'huile y afflue par un grand nombre de sources à la fois. Ces deux causes concourent donc pour déterminer, conformément à l'expérience, la réapparition rapide de la petite masse centrale.

Remarquons, en passant, que l'impossibilité de maintenir le système simple des pyramides autrement que pendant l'action de la seringue, c'est-à-dire pendant que le bec de celle-ci constitue un point solide au centre de la figure, nous donne une preuve expérimentale surabondante de l'instabilité d'un système laminaire d'équilibre où plus de quatre arêtes aboutissent à un même point liquide.

§ 221. Tous les autres polyèdres liquides se transforment, comme le cube, par l'exhaustion graduelle de leur masse, en des systèmes laminaires identiques à ceux qu'on obtient avec le liquide glycérique. Je n'ai pu cependant les amener tous à l'état complet; quelques-uns renfermaient encore de petites masses que je ne suis pas parvenu à faire disparaître, et qui altéraient la forme de l'ensemble; mais cela tenait, je pense, à ce que l'extrémité du bec de ma seringue n'était pas assez mince; avec un bec plus effilé, j'aurais sans doute enlevé ces petites masses. Des considérations analogues à celles que j'ai employées à l'égard du cube feraient voir, dans chaque cas, que les lames prennent naissance dès que les surfaces creuses à courbure moyenne constante cessent de pouvoir coexister dans la charpente solide.

La formation du système provenant de l'octaèdre offre des particularités remarquables : au commencement de l'opération, lorsque les lames naissent, elles sont toutes planes et dirigées vers le centre de la charpente, de manière que le système tend vers la forme représentée fig. 94; mais lorsque l'exhaustion atteint une certaine limite, un changement brusque se produit: les lames se courbent, et, si l'on continue l'épuisement, le système prend une disposition singulière, dont il est difficile de donner une idée précise par des représentations graphiques. La fig. 95 en montre les projections sur deux plans verticaux rectangulaires, et l'on voit que les aspects du système observé sur deux côtés adjacents sont inverses l'un de l'autre.

En examinant ce même système, on reconnaît sans peine qu'il n'est autre chose que celui de la fig. 75, dans lequel les lames se seraient courbées. La chose s'explique aisément: j'ai dit que la forme de quelques uns de mes systèmes laminaires d'huile était altérée par la présence de petites masses que je n'avais pas réussi à épuiser; or, dans la charpente octaédrique, quand, en enlevant graduellement de l'huile, on est arrivé au point où le système se modifie spontanément, les masses de jonction ayant encore une assez grande épaisseur, et l'huile qui les compose s'accumulant, dans le système définitif, tout autour des points où devraient aboutir quatre arêtes liquides de manière à y former des masses beaucoup plus grosses que les

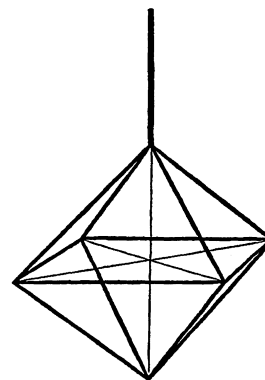


Fig. 94

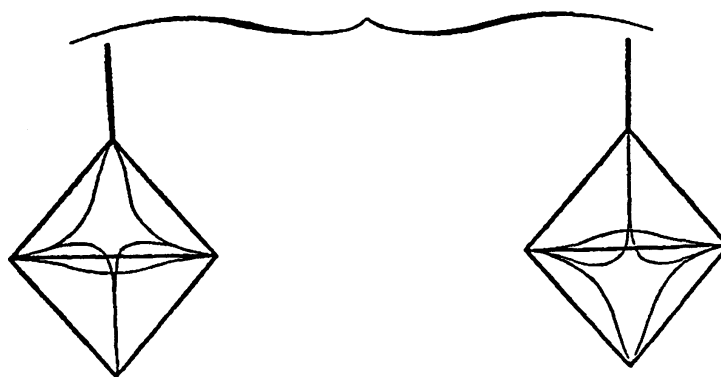


Fig. 95

arêtes en question, enfin plusieurs de ces mêmes arêtes étant assez courtes pour que les masses qui occupent leurs extrémités soient en communication de courbure entre elles, on comprend qu'il doit résulter de là une influence sur la forme des arêtes et des lames, et il n'est pas douteux que si l'on pouvait, sans déterminer la rupture du système, réduire suffisamment l'épaisseur des masses dont il s'agit, toutes les lames ne devinssent planes.

La modification brusque qui se produit pendant l'exhaustion de l'huile dans la charpente dont nous nous occupons, apporte aussi une preuve expérimentale curieuse de l'instabilité d'un système laminaire d'équilibre qui ne satisfait pas aux lois du § 184; en effet, si le système atteignait la disposition de la fig. 94, vers laquelle il tend jusqu'à ce que les masses auxquelles aboutissent les lames soient suffisamment réduites, on aurait partout quatre lames à une même arête liquide, et il y aurait six arêtes liquides concourant au centre de la figure.

§ 222. Puisque l'huile se façonne si aisément, dans le liquide alcoolique, en lames minces assez persistantes, on comprend qu'on doit pouvoir réaliser, avec ces mêmes lames, toutes les figures d'équilibre; et celles-ci seront alors rigoureusement exactes, car on aura éliminé complètement l'action de la pesanteur.

On forme le caténoïde de la manière suivante : les deux anneaux du § 40 préalablement mouillés d'huile étant disposés l'un au-dessus de l'autre dans le liquide alcoolique, on attache à l'anneau inférieur, en des points à peu près équidistants, trois petites masses d'huile ayant chacune environ un centimètre de diamètre¹²⁵, puis on abaisse l'anneau supérieur jusqu'à ce qu'il ne soit plus qu'à un ou deux millimètres de l'autre, et on le fait tourner sur lui-même alternativement en deux sens opposés, de manière à étendre aussi uniformément que possible les masses d'huile sur toute la longueur de l'ensemble des deux anneaux. Aussitôt ce point atteint, supérieur, et l'on développe ainsi le on soulève l'anneau caténoïde laminaire entre eux.

Si l'on continue à soulever l'anneau supérieur, on atteint le point où l'équilibre cesse¹²⁶, et l'on voit le caténoïde s'étrangler de plus en plus et se convertir, comme le caténoïde laminaire de liquide glycérique (§ 111), en deux lames planes occupant

¹²⁵ On amène ces petites masses vers l'anneau métallique au moyen d'un fil de fer (§ 6).

¹²⁶ Il peut arriver, avec certaines qualités d'huile, que la lame obtenue de cette manière se déchire toujours avant le point dont il s'agit; en pareil cas, on augmentera un peu la quantité d'huile; on pourra porter le diamètre des petites masses à 12mm ou même à 14mm.

respectivement les deux anneaux.

§ 223. Pour obtenir, dans les mêmes conditions, une sphère laminaire, ou bulle creuse d'huile, on conçoit qu'il faudra d'abord faire adhérer une petite masse de ce liquide à l'extrémité inférieure d'un tube de fer plongé verticalement d'une certaine quantité dans le liquide alcoolique, puis verser lentement, par l'autre extrémité de ce tube, la portion du même liquide alcoolique qui doit gonfler la bulle.

Mais cette expérience, si simple en principe, exige un assez grand nombre de précautions que je vais indiquer.

Pour faciliter l'introduction du liquide alcoolique, le tube doit être évasé en entonnoir à sa partie supérieure, et, pour qu'il ait une position bien stable, il faut faire adapter à la base de l'évasement un disque en fer de 7 à 8 centimètres de diamètre, traversé à son centre par le tube, et que l'on fera reposer sur le goulot de l'ouverture du couvercle du vase (§ 4). De plus, l'orifice inférieur du tube doit être muni d'un rebord mince d'environ 1mm,5 de largeur; cette addition a pour but d'empêcher la petite masse d'huile destinée à former la bulle de s'élever en partie le long de la paroi extérieure du tube: l'huile s'arrête au contour du petit rebord, conformément aux faits décrits dans le § 14, et se dispose d'une manière parfaitement symétrique. Ajoutons que le diamètre du tube n'est pas indifférent; celui qui m'a donné les meilleurs résultats est de 16mm. La fig. 96 représente la coupe du système.

Il est évident que le liquide alcoolique dont on veut remplir la bulle doit avoir identiquement la même densité que le liquide alcoolique extérieur. On satisfait sans peine à cette condition, en enlevant préalablement, par le robinet du vase, une portion du liquide même contenu dans ce dernier, et se servant de cette portion pour gonfler la bulle.

Ce liquide devra nécessairement arriver dans la bulle d'une manière lente et graduelle, surtout au commencement: il devra couler d'abord goutte à goutte, puis en mince filet, et, en outre, tomber dans l'entonnoir près du bord supérieur de celui-ci, afin que, glissant le long de la paroi inclinée avant de descendre dans le tube, il prenne ainsi moins de vitesse. Mais si, pour effectuer cette opération, l'on se contente de tenir en main le flacon qui renferme le liquide dont il s'agit, on ne parvient jamais, quelques soins que l'on prenne, à donner à la bulle tout le diamètre qu'elle peut acquérir, et cela par deux raisons: en premier lieu, il est impossible de graduer d'une manière assez régulière la vitesse de l'écoulement, et le liquide arrivant parfois en trop grande abondance, produit dans l'intérieur de la bulle des mouvements considérables qui font crever celle-ci; en second lieu, la chaleur de la main augmente quelque peu la température du liquide du flacon, et en diminue ainsi la densité, d'où résulte dans la bulle une tendance à s'élever, qui la fait se porter d'un côté ou d'un autre, et qui, altérant de la sorte la symétrie d'action, amène également la rupture. Pour écarter ces deux causes de non-réussite, j'ai fait construire un flacon en laiton muni d'un robinet et de pieds, de façon que, lorsqu'il était posé sur la plaque de verre qui sert de couvercle au vase, l'orifice du robinet arrivait un peu plus haut que le bord de l'entonnoir; j'introduis dans ce flacon le liquide nécessaire pour former la bulle, et je le laisse ensuite s'écouler dans l'entonnoir par le robinet, avec une vitesse que je puis graduer à volonté, sans avoir à

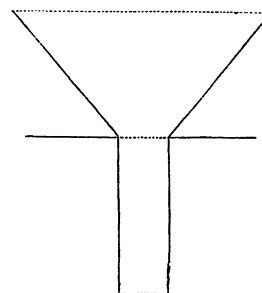


Fig. 96

craindre l'influence de la chaleur de la main¹²⁷.

§ 224. A l'aide du système d'appareils que je viens de décrire, on obtient sans peine des résultats très développés. En donnant à la petite masse d'huile qui devait être attachée à l'orifice du tube un diamètre d'environ trois centimètres, j'ai réalisé souvent de grosses bulles de 12 centimètres de diamètre, et j'aurais été plus loin, sans nul doute, si le vase avait eu plus de capacité¹²⁸. Lorsqu'on est arrivé à la grande dimension que je viens d'indiquer, si l'on enlève l'entonnoir par un mouvement d'une vitesse convenable, la bulle demeure en arrière, et la lame dont elle est formée se prolonge en restant adhérente à l'orifice du tube, de manière à constituer une sorte de traînée; puis celle-ci s'étrangle rapidement et se sépare en deux parties, dont l'inférieure va fermer et compléter la bulle. Ce phénomène s'explique aisément si, pour simplifier, nous supposons que le mouvement du tube soit effectué dans un sens exactement perpendiculaire au plan de l'orifice, la figure laminaire totale ne pourra évidemment cesser d'être de révolution, et puisqu'elle rencontre l'axe et qu'elle n'est plus simplement une portion de sphère, elle ne peut plus constituer une figure d'équilibre (§ 37); elle doit donc se modifier spontanément, et il est clair que cette modification consistera en ce que la sphère se complète; cette dernière se trouve ainsi entièrement isolée au milieu du liquide qui remplit le vase. Elle persiste en cet état pendant un temps plus ou moins long, qui peut aller quelquefois au-delà d'une heure, après quoi elle crève spontanément. L'expérience apprend bientôt à connaître la vitesse avec laquelle il faut retirer l'entonnoir: si cette vitesse est trop grande, la bulle crève; si elle est trop petite, la bulle s'élève avec le tube, et crève encore quand l'orifice de celui quitte la surface du liquide alcoolique.

Le calcul donne, pour l'épaisseur moyenne de la lame qui forme la bulle dans le cas ci-dessus, 0mm,3, c'est-à-dire moins d'un tiers de millimètre; je dis l'épaisseur moyenne, car la lame n'a pas une épaisseur uniforme, et elle doit être, en certains endroits, beaucoup plus mince que 0mm,3.

On peut demander pourquoi, lorsqu'une semblable bulle est isolée du tube, elle ne persiste pas indéfiniment; on ne voit, en effet, dans les actions capillaires, aucune raison qui doive amener sa rupture. Il faut, je pense, chercher la cause de cette rupture dans un reste d'action chimique exercé par le liquide alcoolique sur l'huile.

Comme, dans les expériences que je viens de rapporter, je n'avais pu pousser le gonflement des bulles jusqu'à sa limite, j'ai réduit la petite masse initiale à 2 centimètres de diamètre. Alors les bulles se rompaient ordinairement entre les diamètres de 7 et de 11 centimètres. Cependant j'ai réussi quelquefois à élever le diamètre jusqu'à 12 centimètres, ce qui assigne à la lame une épaisseur moyenne de 0mm,09, c'est-à-dire de moins d'un dixième de millimètre; mais je n'ai jamais pu isoler ces bulles si minces: les unes crevaient spontanément avant que l'entonnoir fût retiré, les autres pendant qu'on le retirait.

Quant à la génération des lames sphériques dont nous nous occupons, il est clair que le liquide graduellement introduit dans la petite masse d'huile, exerce, de dedans en dehors, une pression normale en chaque point de la surface intérieure de la couche d'huile

¹²⁷ Je signalerai ici un fait assez curieux. J'avais d'abord employé un flacon de fer-blanc muni d'un robinet en fer; mais quand le liquide alcoolique contenu dans ce flacon renfermait par hasard de petites sphérules d'huile, celles-ci, en sortant du robinet, entraînaient parfois de l'oxyde de fer, et, devenant ainsi très pesantes, descendaient assez rapidement au fond de la bulle d'huile; or, lorsque cela arrivait, si minime que fût la sphérule ferrugineuse, on voyait, après quelques secondes, la pellicule d'huile s'amincir subitement à l'endroit où reposait cette sphérule, l'amincissement se propageant, par un retrait de l'huile, jusqu'à une petite distance autour du point de contact, puis la bulle crevait presque aussitôt en ce même endroit.

¹²⁸ Le vase dont je me suis servi n'avait que 15 centimètres de largeur intérieure; mais ces dimensions sont trop petites; c'est pourquoi, dans le § 4, j'ai prescrit 20 centimètres.

qui l'enveloppe, et qu'ainsi cette couche, que la cohésion empêche de se rompre, doit s'étendre en s'amincissant. Mais, de plus, cet amincissement tend à être uniforme, car s'il se prononçait davantage en un endroit, la viscosité, par les raisons que nous avons déjà données, rendrait plus difficile son progrès ultérieur en ce même endroit, et le reste s'atténuerait alors plus rapidement. Si la lame n'atteint pas rigoureusement une minceur uniforme, cela tient, sans doute, soit à l'irrégularité des petits mouvements du liquide qui afflue, soit à ce que l'huile n'est pas parfaitement homogène, et contient des portions plus visqueuses que les autres.

On comprend qu'en attachant à deux anneaux ou à deux disques en regard une sphère laminaire d'huile ainsi développée et d'un diamètre convenable, on pourra la transformer en cylindre, en onduloïde, ou en nodoïde, comme nous avons transformé en ces figures (§§112 à 114) les bulles de liquide glycérique.

§ 225. Appliquons maintenant notre théorie à la génération des lames qui partent des fils solides dont se composent nos charpentes, quand celles-ci émergent de l'eau de savon ou du liquide glycérique. Supposons qu'on plonge dans l'un de ces liquides un simple anneau horizontal en fil de fer porté par une fourche, puis qu'on le soulève hors du liquide avec une vitesse convenable, en le maintenant toujours parallèle à la surface de ce liquide. Tant que la distance de l'anneau au plan de celle-ci sera très petite, le liquide s'élèvera un peu, par l'action capillaire, en présentant, à l'extérieur et à l'intérieur de ce même anneau, deux petites surfaces à courbures méridiennes concaves. Or il est aisé de voir qu'à mesure que l'anneau continuera à monter, ces deux petites surfaces iront en se creusant progressivement dans le sens méridien. On sait, en effet, que lorsqu'on soulève lentement un disque solide préalablement mis en contact par sa face inférieure avec la surface d'un liquide susceptible de le mouiller, la portion de ce liquide soulevée par le disque au-dessus du niveau présente bientôt, dans le sens méridien, un creusement qui augmente à mesure que le disque monte; la chose doit donc avoir lieu aussi pour celle de nos petites surfaces qui regarde l'extérieur, et il est clair que l'autre petite surface, c'est-à-dire celle qui regarde l'espace intérieur à l'anneau, doit, pour l'équilibre capillaire de la petite masse soulevée par celui-ci, subir des modifications analogues.

Nos deux petites surfaces iront donc en se rapprochant mutuellement à mesure que l'anneau poursuivra sa marche ascensionnelle, jusqu'à ce qu'elles soient près de se toucher. Mais elles ne peuvent se rapprocher ainsi, qu'en chassant une portion du liquide compris entre elles; or, si l'ascension de l'anneau n'est pas trop lente, la viscosité et la cohésion du liquide agiront ici comme dans les cas précédents, et il se formera, par les mêmes raisons, une lame, qui s'étendra entre la petite portion de liquide demeurée suspendue le long de l'anneau et la petite masse annulaire soulevée à la surface du liquide du vase.

Il est évident que ces considérations s'appliqueraient également au cas où l'anneau, pendant qu'on le retire, serait oblique ou vertical, au lieu d'être horizontal, et qu'elles s'appliqueraient de même à celui où le fil de fer, au lieu d'être courbé circulairement, serait plié suivant un polygone quelconque toujours il se formerait, par les mêmes causes, une lame entre lui et la surface du liquide; si donc nous plongeons dans l'eau de savon ou dans le liquide glycérique l'une de nos charpentes, les fils de fer qui la composent devront, à mesure qu'ils sortent du liquide, être rattachés à celui-ci par des lames, comme le montre, en effet, l'expérience.

§ 226. Reprenons notre anneau horizontal, retirons du liquide en le maintenant bien parallèle à la surface de celui-ci, et dirigeons notre attention sur la lame rentrante qu'il entraîne. L'anneau étant circulaire, cette lame constituera une figure de révolution,

et puisqu'elle est en contact par ses deux faces avec l'air libre, sa figure sera nécessairement une portion de caténoïde. Essayons de déterminer comment cette portion est située dans le caténoïde complet.

La lame peut évidemment être considérée, par la pensée, comme appartenant à un caténoïde laminaire compris entre notre anneau et un autre anneau égal placé au-dessous à une distance convenable. Cela posé, nous savons (§§58 et 80) qu'entre deux anneaux égaux dont l'écartement est moindre que l'écartement limite, il y a toujours deux caténoïdes possibles inégalement rentrés; mais nous savons aussi (§§60 et 111) que lorsqu'on effectue l'expérience, soit dans le liquide alcoolique avec une masse d'huile pleine ou avec une lame d'huile, soit dans l'air avec une lame de liquide glycérique, c'est toujours le caténoïde le moins rentré qui se produit, l'autre étant très probablement instable; on doit admettre conséquemment que, dans l'expérience actuelle, la lame qui s'étend entre l'anneau et le liquide du vase, devra toujours appartenir au caténoïde le moins rentré, et c'est ce qui a lieu, en effet, comme on peut s'en convaincre en observant, dans cette même expérience, le peu d'obliquité de la lame.

Il suit de là qu'en employant un anneau d'un diamètre assez grand, de 70mm par exemple, l'espace circonscrit par la petite masse annulaire qui rattache la lame au liquide du vase sera suffisamment étendu pour que la surface de ce liquide puisse y être regardée comme plane et au même niveau qu'à l'extérieur; conséquemment la lame, à cause de sa tension, aboutira à la crête de la petite masse annulaire suivant une direction verticale, et c'est ce que vérifie encore l'aspect de la figure réalisée. La chaînette méridienne de notre portion de caténoïde peut donc être considérée sans erreur appréciable comme ayant son sommet à la crête de la petite masse annulaire; d'où nous concluons enfin que notre lame constitue la moitié du caténoïde qui serait compris entre deux anneaux égaux à celui d'où elle part et éloignés l'un de l'autre d'une quantité double de la hauteur verticale de cette lame.

§ 227. Mais, entre deux anneaux égaux, il n'y a, nous le savons encore, de caténoïde possible que jusqu'à une limite d'écartement à fort peu près égale aux deux tiers du diamètre de ces anneaux, et, lorsqu'on atteint cette limite, le caténoïde réalisé, s'il est laminaire, s'étrangle spontanément, et se convertit en deux lames planes occupant respectivement les deux anneaux; notre lame actuelle doit donc se transformer spontanément en une seule lame plane dans l'anneau, lorsque celui-ci, en montant graduellement, atteindra, au-dessus de la crête de la petite masse annulaire, une hauteur égale à la moitié de la limite que je viens de rappeler, c'est-à-dire lorsque la distance du plan de l'anneau à la crête en question sera à très peu près égale au tiers du diamètre de cet anneau.

Pour soumettre la chose au contrôle de l'expérience, on a attaché l'anneau, par la queue de sa fourche, à l'extrémité de la lunette d'un cathétomètre (§ 110). On a posé, à une certaine distance au-dessous de cet anneau, une capsule complètement pleine de liquide glycérique, puis, abaissant le système de la lunette jusqu'à ce qu'il n'y eût plus qu'un très petit intervalle entre la surface du liquide et l'anneau, on a rendu celui-ci exactement parallèle à cette surface en courbant un peu, à l'aide d'une pince, la queue de la fourche. Cela fait, on a descendu encore le système, de manière que l'anneau plongeât dans le liquide, et on l'a remonté ensuite avec précaution au moyen de la vis du mouvement graduel, jusqu'à ce que la lame commençât à se former, puis on l'a descendu de nouveau, mais seulement de la quantité nécessaire pour annuler la lame, de façon que la circonférence inférieure de l'anneau fût sensiblement à la crête même de la petite masse annulaire. On a fait alors la première lecture à l'échelle de l'instrument,

après quoi on a remonté le système, par le grand mouvement, d'une quantité un peu moindre que le tiers du diamètre de l'anneau, et l'on a continué, avec beaucoup de ménagement, à l'aide de la vis du mouvement graduel. Or on n'a pas tardé à voir la lame se rétrécir spontanément, et avec assez de rapidité, à sa base, se fermer en cet endroit en se séparant du liquide, et se rendre tout entière dans l'anneau pour l'occuper sous la forme plane. Enfin, après la terminaison du phénomène, on a fait la seconde lecture à l'échelle. Le diamètre intérieur de l'anneau employé était, d'après une mesure prise simplement avec une règle divisée, de 69mm,6; or la différence des hauteurs lues sur l'échelle, c'est-à-dire la distance du dessous de l'anneau à la crête de la petite masse annulaire, était de 22mm,57, quantité très voisine du tiers de la précédente.

Ce résultat ne constitue pas une vérification précise, mais il suffit, quant à présent, pour montrer l'accord de l'expérience avec la théorie.

§ 228. Il nous est aisé actuellement d'expliquer le développement des sphères laminaires complètes par l'insufflation à travers un tube évasé.

Lorsqu'on plonge dans l'eau de savon ou dans le liquide glycérique l'orifice évasé d'un tube ouvert à l'autre extrémité, celui de la tête d'une pipe de terre, par exemple, et qu'on le retire ensuite, il se forme nécessairement une lame partant du bord de cet orifice; or si le soulèvement du tube est opéré de manière que le bord en question demeure horizontal, ce même bord jouera évidemment le rôle de notre anneau, et la lame sera une portion de caténoïde. Si donc l'on continue à soulever le tube, la lame se fermera bientôt à sa base, se séparera du liquide, et ira, sous la forme plane, remplir l'orifice. Quand on veut gonfler une bulle, on ne prend pas, il est vrai, la précaution de maintenir l'orifice horizontal pendant l'ascension du tube, et alors la lame ne peut plus appartenir au caténoïde; mais on comprend qu'elle affecte une forme plus ou moins analogue, et que, participant des propriétés de cette figure, elle se séparera de même du liquide, en donnant aussi pour résultat une lame plane dans l'orifice; c'est d'ailleurs ce qu'on vérifie sans peine au moyen de l'anneau du paragraphe précédent, en le tenant à la main par la queue de sa fourche et en le retirant du liquide dans une position oblique.

Lorsqu'on s'éloigne du liquide après avoir plongé et retiré l'orifice évasé du tube, cet orifice emporte donc toujours avec lui une lame plane. Cela étant, si l'on souffle ensuite par l'extrémité non évasée, la lame en question se trouvant soumise sur l'une de ses faces à un excès de pression de la part de l'air, elle devra ou se briser ou se bomber vers l'extérieur; or, à moins qu'elle ne soit d'une minceur excessive, sa cohésion sera plus que suffisante pour l'empêcher de se rompre; elle commencera conséquemment à se bomber en s'étendant; et comme d'ailleurs les lames d'eau de savon ou de liquide glycérique ne s'amincissent que lentement par la descente du liquide vers leur partie la plus basse, notre lame continuera à se bomber et à s'étendre; enfin, puisqu'elle s'appuie sur une périphérie circulaire et qu'elle est continue dans toute son étendue à partir de cette périphérie, elle constituera une portion de sphère.

Par le progrès de l'insufflation, la portion de sphère ainsi formée doit aller toujours en augmentant, de diamètre; mais cette augmentation finit par amener la rupture de la lame; en effet, celle-ci s'amincit au fur et à mesure, d'abord par son extension même, en second lieu par la descente graduelle des molécules vers sa partie inférieure, et enfin, du moins quand il s'agit d'une simple solution de savon, par l'évaporation de l'eau. Il doit donc arriver un instant où la lame sera tellement atténuée, qu'elle éclatera pour la cause la plus légère. Maintenant si, avant d'approcher du point où ce dernier phénomène se produirait, on cesse de souffler et l'on donne au tube un mouvement assez rapide de bas en haut, la bulle, par suite de son inertie et de la résistance de

l'air ambiant, restera plus ou moins en arrière; mais, à cause de sa cohésion et de son adhérence au bord solide, la lame, en général, ne se brisera pas, et la bulle demeurera unie, pour un instant, à ce bord par une traînée laminaire, comme la bulle d'huile du § 224; puis la traînée s'étranglera de même, pour se séparer en deux portions, dont la supérieure remontera vers l'orifice et occupera celui-ci à l'état de lame plane, tandis que l'inférieure ira fermer la bulle, en sorte que cette dernière se trouvera isolée dans l'air et à l'état de sphère entière; seulement ici le phénomène s'effectue avec trop de rapidité pour que l'oeil puisse en saisir le progrès. Quant à la lame plane qui s'est de nouveau logée dans le bord solide, elle pourra, si elle n'est pas trop mince, servir à gonfler une seconde bulle, et les enfants savent, en effet, parfaitement former ainsi plusieurs bulles de savon successives sans replonger l'orifice dans le liquide.

Tout le monde sait qu'on peut aussi gonfler des bulles à l'extrémité d'un tube étroit non évasé; par exemple à l'extrémité du tuyau d'une pipe dont on a enlevé la tête. Dans ce cas, lorsqu'on a plongé dans le liquide le bout du tube et qu'on l'en retire, la capillarité maintient à l'intérieur une petite colonne de ce liquide, et lorsqu'on souffle ensuite par l'autre bout, la colonne ci-dessus va former à l'orifice une petite masse dans laquelle l'air s'introduit pour l'étendre et la façonner en bulle, absolument comme le fait le liquide alcoolique à l'égard de la petite masse d'huile dans l'expérience du § 224.

§ 229. Arrivons à des lames dans la génération desquelles le rôle de la cohésion et de la viscosité n'est pas tout à fait le même qu'à l'égard des précédentes.

Rappelons un procédé connu, mais singulier, pour la réalisation de lames liquides planes ou à peu près telles: on prend entre les deux mains, par le fond et par le goulot, un flacon renfermant une petite quantité de liquide, et soigneusement bouché; on le tient horizontalement, et on lui imprime un mouvement qui oblige le liquide à en balayer toute la surface concave intérieure; dès qu'on s'arrête, on voit en général une ou plusieurs lames planes disposées en travers du flacon; on peut ensuite redresser ce dernier et le placer sur une table avec ses lames, qui sont alors horizontales; je suppose, bien entendu, qu'on emploie un liquide donnant une persistance suffisante, tel que de l'eau de savon ou du liquide glycérique.

On s'expliquera de la manière suivante la génération de ces lames: au moment où l'on cesse le mouvement du flacon, le liquide, qui forme une couche sur toute la surface concave intérieure, ralentit sa rotation, et la portion qui occupe alors la moitié supérieure de cette surface, retombe par son poids; or, à cause des irrégularités inhérentes à la manoeuvre, cette chute du liquide a lieu de préférence en certains endroits, où la couche a le plus d'épaisseur; là il se forme donc, en travers du flacon, des rideaux de liquide d'une épaisseur considérable; ces rideaux s'amincissent rapidement par la descente ultérieure du liquide qui les constitue, mais les portions qui descendent ainsi diminuant de plus en plus de masse, leur mouvement est de plus en plus entravé par la viscosité; enfin quand elles sont suffisamment réduites, elles ne peuvent plus marcher que très lentement, et les rideaux en question sont devenus de véritables lames.

Les lames réalisées par ce procédé avec du liquide glycérique, présentent des propriétés remarquables elles ont une étonnante durée, et leurs teintes atteignent le noir. Pour obtenir les meilleurs résultats, il faut choisir un flacon aussi exactement cylindrique que possible; il faut, en outre, après avoir redressé celui-ci, le poser sur une tablette à vis calantes, afin de rendre bien horizontale la lame qu'on veut observer; on juge de cette horizontalité par la disposition des teintes.

Au printemps de 1862, la température de la chambre étant de 21°, on a formé, dans un flacon de 7 centimètres de diamètre, une semblable lame, avec un liquide glycérique qui n'était pas des meilleurs; on n'avait pas eu égard au petit défaut de cylindricité du

flacon, et la lame était un peu bombée, tournant sa convexité en haut. Elle s'est bientôt partagée en anneaux colorés irréguliers, puis une tache noire s'est montrée, et l'on a fait mouvoir avec précaution les vis calantes de manière à amener et à maintenir cette tache à peu près au centre; le noir s'est ensuite étendu graduellement avec des alternatives d'arrêt et de petite diminution, et ce n'est qu'après 17 jours que la lame s'est montrée noire dans sa totalité; le lendemain, c'est-à-dire 18 jours après sa formation, elle a éclaté, mais on avait, par mégarde, produit un ébranlement du plancher; sans cette circonstance, elle aurait peut-être persisté plusieurs jours encore.

Pendant l'été de 1865, on a fait encore, avec un liquide glycérique récemment préparé et dont les bulles d'un décimètre ne persistaient que 5 et 6 heures, une lame de cette espèce dans un flacon de 10 centimètres de diamètre, puis on a placé celui-ci, à l'aide d'un soutien convenable, dans une position inclinée d'environ 30° à l'horizon, de manière que le plan de la lame faisait ce même angle avec la verticale. Cette lame est devenue entièrement noire après une heure ou deux, je pense, et elle a persisté en cet état pendant près de 10 jours, malgré son grand diamètre et son inclinaison.

J'ai dit, en parlant de la première de ces lames, qu'elle était légèrement bombée et tournait sa convexité vers le haut. Cette forme provenait de ce que le flacon allait quelque peu en s'élargissant de la partie inférieure à la partie supérieure; nous savons, en effet (§ 216), qu'en vertu de sa tension, une lame qui s'appuie sur une surface solide, doit être dirigée normalement à cette surface; or si la surface intérieure du flacon est exactement cylindrique, une lame plane transversale remplira cette condition de perpendicularité; mais si le flacon est plus ou moins conique, il n'en est pas de même, et la lame se courbe alors de manière que ses derniers éléments soient normaux à la surface solide. Si le flacon était un peu plus large en bas qu'en haut, la lame se courberait évidemment en sens contraire; mais, dans ce cas, le liquide se rassemblerait, par l'action de la pesanteur, vers le milieu de la lame, et conséquemment celle-ci ne pourrait jamais devenir noire dans toute son étendue; il faut donc, si l'on ne peut se procurer un flacon tout à fait cylindrique, en prendre un dont le plus grand diamètre soit en haut.

La plupart des liquides, sinon tous, sont susceptibles de donner ainsi des lames transversales dans un flacon; j'en ai obtenu, par exemple, avec de l'eau distillée, dans un flacon de 14 centimètres de diamètre; seulement elles n'ont aucune persistance.

§ 230. Certaines lames sont développées par l'étalement d'un liquide en mouvement. Savart a le premier appelé l'attention sur ces lames dans deux beaux Mémoires dont nous allons résumer ici les parties qui intéressent notre sujet.

Dans le premier¹²⁹, le célèbre physicien étudie spécialement les phénomènes qui se produisent lorsque la partie continue d'une veine liquide lancée verticalement de haut en bas par un orifice circulaire, vient frapper normalement le milieu d'un petit disque solide. Dans ces conditions, le liquide s'étale en une nappe ou lame qui, toutes choses égales d'ailleurs, affecte des formes différentes suivant la vitesse de l'écoulement. Citons ici le passage où Savart décrit les phénomènes d'une manière générale; le vase est un large tube vertical fermé inférieurement par une plaque au centre de laquelle est percé l'orifice; la charge est originairement de 2 mètres, et le vase se vide librement; le liquide est de l'eau.

«Pour fixer les idées, nous supposerons que le disque ait 27mm de diamètre, que la distance de ce disque à l'orifice soit de 20mm et le diamètre de l'orifice de 12mm. A l'instant où l'écoulement est établi, si le liquide est parfaitement calme dans le tube,

¹²⁹ *Mémoire sur le choc d'une veine liquide lancée contre un plan circulaire* (ANNALES DE CHIMIE ET DE PHYSIQUE DE PARIS, t. LIV, année 1833, p. 55).

la veine après avoir frappé le disque se répand dans tous les sens, et forme une nappe circulaire et continue, dont le diamètre a environ 60 centimètres. La partie centrale de cette nappe est mince, unie et transparente, mais son pourtour, qui a une plus grande épaisseur, est trouble et se présente sous l'aspect d'une zone annulaire recouverte d'un grand nombre de stries rayonnantes coupées par d'autres stries, mais circulaires, qui projettent au loin une multitude de gouttelettes. . . .

« Le niveau du liquide dans le tube s'abaissant continuellement, le diamètre de la nappe s'agrandit peu à peu; en même temps l'auréole change d'aspect, elle devient plus transparente, sa largeur diminue, elle se recouvre de larges bosselures, et enfin elle disparaît entièrement lorsque la pression à l'orifice n'est plus que d'environ 60 ou 62 centimètres. Alors la nappe atteint son diamètre maximum, qui est d'environ 80 centimètres, et elle se présente sous la forme d'une large capsule parfaitement unie, dont la concavité est tournée en bas, et dont le contour libre, légèrement dentelé, lance un grand nombre de gouttelettes qui partent des angles saillants des dentelures.

«La pression à l'orifice continuant toujours à décroître, la nappe unie que nous venons de décrire diminue graduellement de diamètre, mais en même temps elle se recourbe sur elle-même à sa partie inférieure, en se portant vers la tige qui soutient le disque, et, à la pression de 32 à 33 centimètres, elle se ferme entièrement en revêtant la forme d'un solide de révolution d'environ 40 centimètres de diamètre et 45 de hauteur, dont la surface est parfaitement unie et dont la génératrice ressemble beaucoup à une demi-lemniscate. »

Disons, en passant, que M. Tyndall, dans une leçon donnée, en 1854, à l'Institution Royale de Londres¹³⁰, a varié les formes de ces lames, en recevant la veine dans de petits cônes creux de différentes ouvertures; alors, quand la charge est modérée, les lames se façonnent de manière à figurer des vases.

§ 231. On comprend que le liquide, au moment où il vient frapper le disque, est dévié latéralement dans tous les azimuts, et de là doit résulter une tendance au déchirement suivant les prolongements des rayons du disque; mais la cohésion s'oppose à ce déchirement, la viscosité met, de son côté, obstacle à ce que le liquide s'amincisse trop en certains endroits, et il y a conséquemment simple formation d'une lame continue. Ici donc, comme dans les cas précédemment étudiés, c'est encore la cohésion et la viscosité qui président au développement des lames.

Quant à l'auréole, qui ne se manifeste que sous de fortes charges, on peut conclure des observations contenues dans le Mémoire de Savart qu'elle est due à un mouvement vibratoire du liquide, résultant probablement du choc contre le disque.

On comprend également que, sous les fortes charges, la pesanteur ne peut produire d'inflexion bien sensible de la lame, le temps employé par les molécules liquides à aller du bord du disque à celui de la lame étant trop court; mais que, sous des charges plus faibles, il n'en est plus de même, et qu'ainsi la lame doit présenter alors la forme de capsule renversée.

Savart attribue à l'attraction moléculaire les effets qui surviennent quand la charge continue à diminuer, savoir le rétrécissement inférieur, puis la fermeture de la lame, mais il se borne à ce simple aperçu. Comme j'aurai à rappeler des faits de la même catégorie, je vais préciser davantage.

Lorsqu'une lame liquide est courbe et que ses deux courbures principales sont de même sens, chacun de ses éléments exerce, nous le savons, une pression normale dirigée du côté de la concavité. D'après cela, dès que la lame ci-dessus s'infléchit sen-

¹³⁰) *On some phenomena connected with the motion of liquids.* (Philos. Magaz., 4me série, vol. VIII, p. 74).

siblement par l'action de la pesanteur, une nouvelle force, savoir la pression capillaire dont je viens de parler, prend naissance, augmente l'inflexion, et l'effet va en croissant à mesure que la vitesse de translation horizontale des molécules décroît, jusqu'à ce qu'enfin la pression capillaire prédomine, et ferme complètement la lame.

Aussi, en premier lieu, toutes choses égales d'ailleurs, la lame se ferme sous une charge d'autant plus forte que l'orifice est plus petit : par exemple, avec un orifice de 18mm de diamètre, la charge correspondante à la fermeture de la lame n'était que de 21 à 22 centimètres, tandis qu'elle était de plus de 5 mètres avec un orifice de 1mm,5. Et, en effet, il est clair que plus l'orifice est grand, plus il amène de liquide dans le même temps, et conséquemment plus la lame doit avoir d'épaisseur; or la pression capillaire due aux courbures n'émanant que des deux couches superficielles de la lame, elle ne varie qu'avec les courbures et est indépendante de l'épaisseur; mais la masse à mouvoir étant proportionnelle à cette épaisseur, la pression capillaire en question produit nécessairement un effet d'autant plus prononcé que l'épaisseur est moindre, d'où il suit que, pour empêcher la lame de se fermer, il faut aussi une charge d'autant plus considérable.

En second lieu, avec les grands orifices, l'axe vertical des lames fermées l'emporte sur le diamètre de leur équateur, et le contraire a lieu avec les petits orifices; or cela doit être d'après ce qui précède, car plus la lame fermée est mince, plus la pression capillaire lutte avec avantage contre la pesanteur qui tend à abaisser le point inférieur de cette lame.

En troisième lieu, l'élévation de la température du liquide, en diminuant la cohésion, doit aussi diminuer la pression capillaire, de sorte que la lame se ferme sous une charge moindre, et c'est ce que l'expérience vérifie encore: par exemple, avec un orifice de 3mm et un disque de 13m de diamètre, les charges correspondantes à la fermeture de la lame aux températures de 4° et de 90°, étaient respectivement comme 1 à 0,29.

Enfin, comme on pouvait le prévoir, la nature du liquide exerce une influence considérable : dans une suite d'expériences comparatives faites, à la température de 8°, sur l'eau, l'alcool, l'éther sulfurique et le mercure, les charges correspondantes à la fermeture, évaluées toutes en colonnes d'eau, étaient approximativement comme les nombres 1, 0,9, 0,3 et 3.

§ 232. Le second Mémoire¹³¹ auquel nous avons déjà fait allusion (§ 153) concerne l'effet résultant du choc mutuel des parties continues de deux veines liquides lancées par des orifices circulaires dans des directions qui, au point de rencontre, sont exactement opposées. Les orifices étaient à 3 centimètres de distance l'un de l'autre; les charges pouvaient être portées jusqu'à près de 5 mètres; au point de rencontre, les directions des deux jets étaient horizontales; le liquide était de l'eau. Laissons encore Savart décrire lui-même les phénomènes généraux, pour le cas de charges égales et d'orifices égaux de 3mm de diamètre.

« Il se formait, pour toutes les pressions, au point de rencontre des deux veines, c'est-à-dire au milieu de l'intervalle qui séparait les orifices, une nappe plane et circulaire plus épaisse à sa partie centrale qu'à son contour, dont le plan était normal à la tangente aux deux veines, et qui se terminait par une zone annulaire trouble, agitée et sonore, lorsque la pression excédait 120 centimètres, mais qui devenait parfaitement lisse et unie dans toute son étendue, lorsque la pression s'abaissait au-dessous de ce point. Pour la pression la plus forte, qui était de 488 centimètres, le diamètre de cette nappe était d'abord de 24 à 25 centimètres; ensuite il s'accroissait peu à peu à mesure

¹³¹ *Mémoire sur le choc de deux veines liquides animées de mouvements directement opposés* (ANNALES DE CHIMIE ET DE PHYSIQUE DE PARIS, t. LV, année 1833, p. 257).

que la pression devenait plus faible, et quand elle n'était plus que de 115 à 120 centimètres, il était alors d'environ 38 centimètres; ensuite il décroissait de nouveau...

»

Et plus loin:

«Des orifices de 4mm et ensuite de 6mm ayant été substitués à ceux de 3mm, des phénomènes analogues se sont offerts à l'observation, avec cette différence cependant, que le diamètre des nappes était d'autant plus grand, à pression égale, que celui des orifices était lui-même plus grand.

« Tant que la pression est forte et que les nappes sont entourées d'une auréole, elles paraissent sensiblement circulaires, et le point de rencontre des jets en occupe le centre; mais à mesure que la pression décroît, leur rayon vertical supérieur diminue de longueur, tandis qu'au contraire l'inférieur va en augmentant.... Pour les pressions inférieures à celles où l'auréole disparaît entièrement, les nappes sont constamment entourées d'un petit bourrelet arrondi d'où s'échappent une multitude de gouttelettes qui, en général, décrivent des courbes comprises dans le même plan vertical qui contient la nappe.»

Savart est conduit par ses observations aux deux lois suivantes:

Pour les mêmes orifices, le diamètre de la nappe sans auréole est sensiblement proportionnel à la simple charge, et, pour une même charge, quand elle est assez faible, il est sensible proportionnel à l'aire des orifices.

Avec des orifices inégaux, dont les diamètres sont comme 1 à 2 ou à 3, et pour des charges égales suffisamment grandes, « il se forme une nappe conique dont le sommet est situé au point de rencontre des deux jets, au milieu de l'intervalle qui sépare les orifices, et dont la concavité est tournée du côté du jet du moindre diamètre. Lorsque la pression est suffisamment grande eu égard au diamètre des orifices, cette nappe se termine par une partie auréolée. Lorsque la pression diminue, cette auréole s'efface peu à peu, le diamètre de la base de la nappe devient plus grand, et, après avoir atteint une certaine limite, il commence à décroître. La pression continuant toujours à diminuer, la nappe se ferme en affectant une forme qui se rapproche en général de celle d'un ellipsoïde allongé dont le grand axe est horizontal.»

§ 233. Les lames dont il s'agit dans ce second Mémoire se forment évidemment par les mêmes causes que celles du premier, et les auréoles peuvent également être attribuées à des mouvements vibratoires du liquide, provenant du choc; on s'explique sans peine par l'action de la pesanteur la différence entre les rayons verticaux supérieur et inférieur pour des charges assez peu considérables; on se rend de même raison de la forme conique des lames dans le cas des orifices inégaux et des fortes charges; enfin, la surface de ces lames coniques étant courbe dans un sens, cette courbure doit aussi faire naître une pression capillaire, qui ferme la lame quand la vitesse est suffisamment réduite.

Nous avons vu (§ 153) que M. Hagen a indiqué la cause très probable de la limitation des lames de ce même Mémoire lorsqu'elles sont sans auréole, et son explication convient évidemment aussi à la limitation des lames ouvertes du premier Mémoire; pour compléter autant que possible la théorie des phénomènes, il faut encore rendre raison de la formation des gouttes qui s'échappent du bord de toutes les lames dont il s'agit; c'est ce que nous ferons dans le § 426.

Les auréoles qui se manifestent dans ces mêmes lames sous de fortes charges, et qui, ainsi que je l'ai fait remarquer, paraissent dues à des mouvements vibratoires, donneraient lieu aussi, sans doute, à une étude fort intéressante; mais les observations de Savart sur ce sujet ne sont pas suffisamment complètes, et il faudrait soumettre

le phénomène à des expériences nouvelles et plus détaillées; le meilleur procédé à employer serait, je pense, celui que j'ai fait connaître le premier¹³², et qui consiste à observer à travers un disque opaque percé de fentes radiales étroites et tournant sur lui-même avec une vitesse qu'on peut graduer à volonté.

§ 234. Magnus, dans la première partie de ses *Recherches hydrauliques*¹³³ publiée en 1855, décrit une suite d'expériences nouvelles et curieuses au moyen desquelles il oblige aussi un liquide à s'étaler en lames par l'effet du mouvement. Le savant physicien a eu l'idée de chercher ce qui se produit lorsque les parties continues de deux veines se rencontrent, non plus dans des directions opposées, mais en formant un angle entre elles. Résumons ici les faits les plus saillants parmi ceux qu'il a observés.

En premier lieu, avec deux veines d'eau horizontales dont les axes se coupent, et forment entre eux un angle d'environ 40°, des orifices égaux et une charge commune modérée, il se développe, à partir du point de rencontre, une première lame verticale allongée dans le sens du mouvement général, et dont les bords supérieur et inférieur vont se rencontrer sous un certain angle à l'extrémité la plus éloignée; de cette extrémité part une seconde lame de forme analogue, mais ayant son plan perpendiculaire à celui de la première, puis vient une troisième lame, laquelle est de nouveau verticale, et, au delà, le liquide s'éparpille. Ces lames sont épaissies vers leurs bords, et il en résulte souvent des bourrelets nettement dessinés; l'expérience dont il s'agit offre donc un nouvel exemple de bourrelets aux bords libres des lames liquides. Magnus ne parle point de gouttes lancées par ces bords, et si l'on consulte les figures qui accompagnent le Mémoire, on ne voit, en effet, de projection de gouttes représentée que près de l'extrémité de la troisième lame.

Magnus attribue la limitation de ces lames et leur forme allongée et pointue à la cohésion du liquide, laquelle tire d'une manière continue les deux bords l'un vers l'autre, et les oblige enfin à se rejoindre. L'explication sera plus précise si à la cohésion l'on substitue la tension des deux faces, et si l'on y ajoute la pression capillaire due à la courbure transversale des bords. Magnus rend raison de la succession des lames en remarquant que la rencontre de leurs bords épais ayant lieu sous un certain angle, elle doit faire naître un phénomène analogue à celui qui provient de la rencontre des deux veines elles-mêmes, c'est-à-dire le développement d'une lame faisant un angle droit avec le plan contenant les axes de ces bords.

En second lieu, les orifices étant toujours égaux et les vitesses égales et modérées, si les deux veines, au lieu de se rencontrer de manière que leurs deux axes se coupent, ne font que s'entamer mutuellement d'une petite quantité, et si, en outre, l'angle qu'elles forment n'est que d'environ 35°, elles continuent leur course au delà du point de rencontre, avec une lame développée entre elles, et s'infléchissent de façon à aller s'entamer de nouveau plus loin; puis la même chose se reproduit, et, dans des conditions favorables, il peut même arriver qu'elle se répète une troisième fois avant que le tout se réduise en gouttes; ajoutons cette particularité, que la veine qui, à la première rencontre se trouvait être la supérieure, devient l'inférieure à la deuxième rencontre, et ainsi de suite.

Magnus attribue encore simplement à la cohésion l'espèce de traction exercée par les lames interposées et qui ramène les veines l'une vers l'autre; nous dirons, comme dans le cas précédent, que l'effet est produit par la tension des deux faces de ces lames

¹³²Sur un nouveau moyen de déterminer la vitesse et les particularités d'un mouvement périodique très rapide, tel que celui d'une corde sonore en vibration, etc. (BULLET. DE L'ACAD. DE BELGIQUE, 1836, t. III, p. 364).

¹³³*Hydraulische Untersuchungen* (ANN. DE M. POGGENDORFF, vol. XCV, page 1).

jointe à la pression capillaire due à la courbure transversale des parties extérieures des deux veines.

§ 235. On a vu que les lames de Savart, lorsqu'elles affectent des formes courbes et qu'on amoindrit suffisamment la vitesse du liquide, se ferment par l'effet des pressions capillaires qu'exercent tous les points de leurs deux faces en vertu des courbures de celles-ci. C'est au même genre de phénomène qu'appartient la singulière génération de bulles observée par mon fils Félix¹³⁴.

L'expérience consiste à lancer obliquement en l'air de l'eau de savon contenue dans une capsule, de manière à étaler le liquide en nappe ou lame; cette lame se déchire, en général, en plusieurs portions, dont chacune se ferme aussitôt pour constituer une bulle creuse complète, qui descend avec plus ou moins de lenteur. Quelquefois on n'obtient qu'une seule bulle, qui peut alors atteindre 8 ou 9 centimètres de diamètre; mais ordinairement il s'en forme plusieurs, et elles sont alors moins grosses.

La théorie du phénomène est fort simple, et se déduit de ce que j'ai exposé dans les paragraphes précédents. Considérons le cas où la lame ne se déchire pas, et produit conséquemment une bulle unique; ce que nous dirons à l'égard de cette lame pourra s'entendre également des lames partielles résultant du déchirement. Par les mêmes causes que dans les lames de Savart, causes que nous examinerons plus tard (§§426 et 427), au bord de la lame actuelle se forme nécessairement un bourrelet, qui se résout en petites masses isolées; mon fils a constaté, en effet, que ce bord est dentelé et laisse échapper des gouttes nombreuses. Dès qu'elle est développée, la lame commence à tomber en vertu de son poids; mais, par suite de la résistance de l'air, sa partie centrale descend beaucoup moins vite que son bord, le long duquel règne la masse du bourrelet, et elle prend ainsi une figure fortement bombée tournant sa convexité en haut; elle se trouve donc sensiblement dans les mêmes conditions que celles du premier Mémoire de Savart, la résistance de l'air contre sa partie centrale jouant ici le rôle du petit disque solide; et comme les pressions capillaires nées des courbures en tous les points des deux faces n'ont pas à lutter contre un mouvement de translation partant du centre, ces pressions ferment rapidement la lame par le bas, et la façonnent en une bulle sphérique complète.

Mon fils n'avait point réussi à obtenir de cette manière des bulles d'eau pure, parce qu'il opérât d'un point trop peu élevé; mais M. Van der Mensbrugge¹³⁵, en lançant le liquide d'une fenêtre d'un étage supérieur, a vu parfaitement l'eau pure donner des bulles complètes, et il est arrivé au même résultat avec l'alcool, l'essence de térébenthine, l'huile de pétrole, l'huile d'olive et plusieurs solutions salines; il en conclut que la plupart des liquides, sinon tous, sont susceptibles de s'arrondir, par ce procédé, en bulles creuses.

Quant à mon hypothèse relative à la formation des vésicules de vapeur, hypothèse rapportée dans la Note de mon fils, et consistant à admettre que la vapeur gazeuse repasse à l'état liquide sous forme de lamelles isolées, et que ces lamelles, généralement courbes, se ferment comme les lames dont il vient d'être question, je l'abandonne aujourd'hui après un examen plus attentif; en effet, pour donner lieu à des vésicules aussi minimes que celles de la vapeur des nuages, il faudrait que les lamelles fussent elles-mêmes extrêmement petites, et dès lors elles ne tomberaient qu'avec une grande lenteur; on ne pourrait donc supposer une chute rapide de leurs bords libres et une influence énergique de la résistance de l'air sur le reste seulement. Ce qui arriverait au

¹³⁴ *Sur un mode particulier de production de bulles de savon* (BULLET. DE L'ACAD. DE BELGIQUE, 1882, 2e série, t. XIII, p. 288).

¹³⁵ *Sur quelques effets curieux des forces moléculaires des liquides* (BULLET. DE L'ACAD. DE BELGIQUE, 1864, 2e série, t. XVIII, p. 161).

contraire à de semblables lamelles, c'est que les pressions capillaires dues aux courbures de leurs faces effaceraient ces courbures, et qu'en même temps les bords libres revenant sur eux-mêmes avec une excessive vitesse à cause de leur minceur, transformeraient instantanément les lamelles en de petits globules pleins

§ 236. Les expériences ci-dessus m'ont suggéré l'idée d'un mode de réalisation de bulles un peu différent, mais fondé aussi sur la résistance de l'air. Un anneau en fil de fer de 7 centimètres de diamètre, par exemple, est fixé, par un point de son contour, à l'extrémité d'une tige droite dirigée suivant le prolongement d'un diamètre. Tenant cet anneau par sa tige, on y développe une lame plane en le plongeant dans une bonne solution de savon de Marseille, et l'en retirant; puis on lui donne aussitôt dans l'air, avec une vitesse convenable, un mouvement de translation perpendiculaire à son plan. La résistance de l'air creuse alors la lame en arrière, et la transforme en une sorte de sac allongé, fortement renflé à sa partie postérieure, et présentant un étranglement dans le voisinage de l'anneau; enfin, par un petit ralentissement de la vitesse, l'étranglement se ferme, et une bulle, dont le diamètre peut être environ double de celui de l'anneau, se trouve isolée dans l'air. D'ordinaire la portion de l'étranglement qui s'appuie sur l'anneau éclate dès que cet étranglement s'est fermé; mais quelquefois elle va former dans l'anneau une nouvelle lame plane, et l'on peut alors obtenir une seconde bulle immédiatement après la première. Pour réussir dans cette expérience, il faut quelque habitude, car le succès dépend du plus ou moins de vitesse qu'on donne à l'anneau.

Le phénomène s'explique par les mêmes principes que la génération des bulles complètes au moyen d'une pipe (§ 228); en effet, que de l'air en mouvement soit dirigé contre une lame adhérente à un contour solide immobile, ou bien que ce contour avec sa lame soit transporté normalement à celle-ci dans de l'air immobile, les résultats doivent évidemment être analogues.

§ 237. Mentionnons encore la bizarre production de bulles signalée par MM. Minary et Sire¹³⁶.

L'expérience, telle que ces physiiciens la décrivent, « consiste à verser dans une certaine quantité d'huile d'olive une fois et demie à deux fois son volume d'acide sulfurique concentré, et à agiter violemment le mélange à l'aide d'une baguette de verre.

«L'agitation étant pratiquée dans un verre à pied d'une capacité convenable, on ne tarde pas à voir s'élever du mélange une foule de petites bulles creuses qui voltigent dans tous les sens. Les plus grosses (qui atteignent parfois 1 à 2 centimètres de diamètre) retombent le plus souvent dans le mélange après une faible ascension; mais les plus petites s'élancent facilement dans l'air ambiant en trahissant ses agitations. Il se produit dans ces circonstances des bulles d'une grande ténuité, et d'autant plus nombreuses que l'agitation est plus violente et effectuée dans un certain sens qui paraît favoriser leur formation.... Le mélange huile et acide ne permet pas de souffler facilement des bulles à l'extrémité d'un tube évasé; c'est à peine si l'on peut en produire de 1 à 2 centimètres de diamètre, qui d'ailleurs ne persistent pas.»

Je regarde comme impossible que les portions de gaz qui arrivent de l'intérieur du mélange ci-dessus puissent former à sa surface autre chose que des calottes sphériques laminaires, et soient capables de continuer à soulever la pellicule liquide de manière à compléter des bulles laminaires sphériques isolées dans l'air; en effet, le gaz emprisonné a évidemment beaucoup trop peu de masse pour que l'inertie de son mouvement ascensionnel surmonte la pression capillaire exercée par la pellicule convexe qu'il détermine à la surface du mélange. Je n'ai pas fait répéter l'expérience de MM. Minary

¹³⁶Sur un mode particulier de formation de bulles liquides (COMPTES RENDUS 1862, t. LV, p. 515).

et Sire, et conséquemment je ne hasarderai aucune explication. Cette expérience ne me paraît pas sans danger, des gouttelettes acides pouvant être projetées dans les yeux de l'observateur; il faut, je pense, regarder à travers un écran de verre.

§ 238. Il me reste à parler d'une dernière espèce de lames; elles sont formées, comme celles que nous avons passées en revue dans les § 230 à 235, par un liquide en mouvement; mais la cohésion et la viscosité ne jouent dans leur génération qu'un rôle secondaire, parce que les filets moléculaires dont on peut les regarder comme composées n'ont point de tendance à s'écarter les uns des autres. Telle est la veine lancée verticalement de haut en bas par un orifice en forme de fente rectiligne ou de rectangle allongé.

Ces lames présentent aussi des phénomènes remarquables; la veine ci-dessus par exemple, se montre, on le sait, formée, jusqu'à une certaine distance de l'orifice, d'une suite de portions dont les plans ont des directions alternatives à angle droit les unes par rapport aux autres, comme dans la première des expériences citées au § 234, et le fait s'explique évidemment de la même manière dès que la veine sort, de l'orifice, les deux bords de la lame qu'elle constitue sont chassés l'un vers l'autre par les pressions capillaires dues à leurs fortes courbures transversales; il s'y forme donc des bourrelets, qui, venant à se rencontrer angulairement, obligent le liquide à s'épanouir dans un plan perpendiculaire, puis le même effet se produit dans cette seconde lame, et ainsi de suite. Magnus, qui a consacré une partie de ses recherches hydrauliques¹³⁷ aux veines lancées par des orifices non circulaires, rend raison du phénomène dont il s'agit ici par une théorie qui revient à la précédente.

§ 239. J'ai fait connaître, il y a longtemps¹³⁸, une expérience qui me semble curieuse en ce qu'elle montre aux yeux une grande lame liquide verticale dont l'un des bords libres, muni d'un bourrelet, est rectiligne et incliné à l'horizon. Elle consiste à faire écouler de l'eau par une fente verticale et rectiligne pratiquée dans la paroi latérale du vase, depuis un point voisin du fond de celui-ci jusqu'au-dessus du niveau du liquide. C'est le bord libre supérieur de la lame qui présente la forme indiquée; seulement il ne commence à paraître exactement droit qu'à partir d'une petite distance de son origine, c'est-à-dire du point de la fente correspondant au niveau de l'eau dans le vase, mais il conserve son aspect rectiligne jusqu'à la distance où le bourrelet qui le garnit est rencontré par le bord libre inférieur; l'angle qu'il fait avec l'horizon est d'un peu plus de 45°; le bourrelet, peu épais à son extrémité supérieure, va en grossissant à partir de là jusqu'à l'autre extrémité; telle est du moins l'apparence générale qu'il offre à la première observation; nous verrons plus loin que sa constitution réelle n'est pas si simple. Le bord inférieur de la lame est également garni d'un bourrelet, qui va aussi en grossissant à partir de son origine, mais qui est beaucoup moins volumineux que le premier; enfin ce bourrelet inférieur n'est pas dirigé exactement suivant la parabole que tracerait un filet liquide isolé partant de l'extrémité inférieure de la fente: il est moins descendant, et même, près de son origine, il commence par avoir une direction montante, de sorte qu'il va toujours rencontrer le bourrelet supérieur plus haut que ne le ferait la parabole en question.

La théorie rend raison de toutes ces particularités. Si, par la pensée, on substitue à la fente une suite d'ouvertures infiniment petites, infiniment rapprochées, et rangées suivant une même verticale, si, en outre, on suppose que chacun des filets liquides lancés par ces ouvertures décrive exactement sa parabole sans être influencé ni par la

¹³⁷ Voir la note du § 234.

¹³⁸ Note sur la figure de la nappe liquide qui s'écoule par une fente étroite, rectiligne et verticale, partant du fond d'un réservoir et s'élevant jusqu'au-dessus du niveau du liquide (BUL. LET. DE L'ACAD. DE BELGIQUE, 1836, t. III, p. 145).

résistance de l'air ni par les autres filets, et si l'on cherche quelle est l'enveloppe de toutes ces paraboles, on trouve sans peine que c'est une droite faisant avec l'horizon un angle de 45° . Passant de ces conditions fictives aux conditions réelles, et négligeant, pour un moment, l'effet des pressions capillaires au bord libre considéré, on comprend que rien n'empêche chaque filet de décrire la portion de sa parabole comprise entre le point d'où il s'échappe et celui où il va toucher la droite enveloppe; mais comme, pour continuer à suivre cette même parabole, le filet devrait descendre dans l'épaisseur de la lame à travers les filets inférieurs, ce qui est impossible, il se trouve contraint de longer tous ceux-ci, c'est-à-dire d'effectuer sa marche ultérieure dans la direction du bord libre. Ce bord libre doit donc affecter sensiblement la forme rectiligne trouvée pour les conditions fictives; mais les filets qui s'y rendent et s'y accumulent ainsi en quantité d'autant plus considérable qu'on s'éloigne davantage du point situé au niveau du liquide, doivent, indépendamment de l'action des pressions capillaires, former le long de ce même bord un bourrelet qui va en grossissant à partir de son extrémité supérieure.

De leur côté, les pressions capillaires doivent produire un effet sensible jusqu'à une petite distance de cette extrémité supérieure, car, près du haut de la lame, le bord libre n'a reçu encore que peu de filets, et la vitesse de projection du liquide est peu considérable; dans l'espace dont il s'agit, ces pressions doivent donc refouler le bord libre et lui donner une courbure concave dans le sens longitudinal; mais, on le conçoit, l'effet doit être d'autant moins prononcé que la fente est moins étroite, et c'est ce que vérifie l'expérience, comme on le verra bientôt; avec une fente de 2mm de largeur, la courbure concave s'étend tout au plus à un centimètre et demi de distance¹³⁹. Quant au bourrelet du bord libre inférieur, on comprend qu'il est dû presque entièrement à la pression capillaire, et l'on s'explique sans peine, d'après cela, son relèvement près de la fente, ainsi que son moindre volume. Enfin si, dans l'expérience, l'angle que fait le bord libre supérieur avec l'horizon excède un peu 45° , on peut l'attribuer, je pense, à la tension des deux faces de la lame.

Mon appareil consiste en un réservoir cylindrique de 50 centimètres de diamètre et 54 de hauteur; la fente, dont la hauteur est de 49 centimètres, est constituée par un intervalle entre les bords en regard de deux règles de fer épaisses, réunies par une traverse à chacune de leurs extrémités; ces bords sont taillés en biseau du côté qui regarde l'intérieur du vase.

J'ai répété l'expérience avec des fentes de différentes largeurs, et j'ai reconnu que la largeur la plus convenable était de 2mm environ; quand la fente est notablement plus étroite, la pression capillaire au haut de celle-ci est tellement énergique, qu'elle empêche la sortie du liquide jusqu'à une certaine distance au-dessous du niveau: avec une fente de $\frac{1}{3}$ de millimètre à peu près, le liquide est retenu ainsi sur une lot d'environ six centimètres et c'est seulement du bas de cette distance que part le bord libre supérieur de la lame; en outre, avec une fente trop étroite, le bord libre inférieur se relève beaucoup, de manière que la portion rectiligne du bourrelet supérieur se trouve considérablement raccourcie. Avec une fente de 2mm de largeur, la résistance à la sortie du liquide ne s'est plus manifestée, le bord libre inférieur ne se relevait plus qu'assez faiblement près de son origine, et l'on a pu constater la forme rectiligne du profil, du bourrelet supérieur sur une longueur de 75 centimètres environ.

Je dois insister sur la nature des deux bourrelets. Celui du bord libre inférieur est transparent, presque uni, et ressemble à une tige de cristal courbe; mais celui du bord

¹³⁹ A l'époque où j'ai publié ma Note, j'avais moins étudié qu'aujourd'hui les actions capillaires; aussi ai-je donné, dans cette même Note, une explication erronée de la courbure concave dont il s'agit.

supérieur présente une constitution fort singulière: à partir du milieu de sa longueur à peu près (toujours avec une fente de 2mm) ses deux parties latérales se convertissent chacune en une gerbe de gouttelettes, et la partie intermédiaire se montre trouble, comme si elle-même était formée de gouttes en mouvement; si l'on regarde avec attention la portion de ce même bourrelet comprise entre l'origine de celui-ci et le lieu où s'opère la résolution en gouttes, on constate qu'elle est striée longitudinalement, quoique d'une manière un peu confuse. Nous reviendrons (§ 446) sur cette constitution.

Ainsi qu'on peut le voir dans une addition à ma Note¹⁴⁰, Le François a généralisé la question par l'analyse, dans l'hypothèse des filets exactement paraboliques et indépendants entre eux, en supposant la paroi du vase inclinée, et la fente percée suivant la direction de la plus grande pente. Il est arrivé ainsi à des résultats curieux, parmi lesquels je me bornerai à citer les suivants : 1° quelle que soit l'inclinaison de la paroi, le bord libre de la lame, celui, bien entendu, qui part du niveau, est toujours rectiligne; 2° pour une inclinaison donnée de la paroi, si l'on imagine que le liquide soit placé alternativement d'un côté puis de l'autre de cette paroi, les bords libres droits respectivement correspondants à ces deux cas sont toujours perpendiculaires entre eux.

§ 240. Aucun liquide n'étant exempt de cohésion et de viscosité, il suit de notre théorie que tous doivent être susceptibles de se convertir en lames minces. Et, en effet, nous avons vu, dans les expériences de Savart, l'eau, l'alcool, l'éther et le mercure s'étendre en de semblables lames; nous avons vu de même l'eau, l'alcool, l'essence de térébenthine, l'huile de pétrole et l'huile d'olive, dans l'expérience de M. Van der Mensbrugge, s'arrondir en bulles creuses complètes; enfin M. Gladstone, dans une Note dont il sera question bientôt, affirme que tous les liquides donnent, par l'agitation, des calottes laminaires à leur surface.

Ajoutons qu'avec la plupart des liquides, sinon avec tous, les lames peuvent, par l'emploi de moyens appropriés, acquérir des dimensions considérables; c'est ce que montrent, par exemple, les lames de Savart, que je viens de rappeler.

FIN DU TOME PREMIER.

¹⁴⁰ BULLETT. DE L'ACAD. DE BELGIQUE, 1836, t. III, p. 222.

TABLE ANALYTIQUE

DES

MATIÈRES DU TOME PREMIER.

CHAPITRE PREMIER.

Notions préliminaires. Condition générale à laquelle doit satisfaire, dans l'état d'équilibre, la surface libre d'une masse liquide supposée sans pesanteur. — Procédés pour soustraire un liquide à l'action de la pesanteur, en le laissant libre, soit sur toute sa surface, soit sur une partie de celle-ci, d'obéir à ses propres attractions moléculaires. — Emploi du premier procédé: sphère liquide; vérifications expérimentales des principes de la théorie de l'action capillaire. — Figures terminées par des surfaces planes: polyèdres liquides.

Pour qu'une masse liquide supposée sans pesanteur soit à l'état d'équilibre, sa surface libre doit avoir une forme telle que la somme algébrique des deux courbures principales y ait partout la même valeur	§1
Deux surfaces, la sphère et le plan, satisfont évidemment à la condition générale ci-dessus, mais elles sont loin d'être les seules. Les surfaces qui satisfont à cette même condition, sont aussi celles dont la courbure moyenne est constante. Elles sont en nombre illimité. — Propriété de ces surfaces dans le cas où la courbure moyenne est nulle. — Les géomètres ont considéré les surfaces dont il s'agit comme ayant toujours une étendue minima. — L'expression de la condition générale peut se mettre sous la forme d'une équation différentielle du second ordre, laquelle représente ainsi toutes les figures d'équilibre. — Il est indifférent que le liquide soit situé d'un côté ou de l'autre de la surface, de sorte que chaque figure d'équilibre en relief a sa correspondante identique en creux.	§2
Deux procédés permettent de placer un liquide dans des circonstances telles qu'il se comporte comme s'il ne pesait pas. Premier procédé: immersion d'une masse d'huile d'olive dans un mélange d'eau et d'alcool de même densité que l'huile; la masse immergée, lorsqu'elle n'est adhérente à aucun solide, prend toujours la forme d'une sphère parfaite. Boyle et Segner ont approché de ce procédé. — Deuxième procédé: lames liquides minces développées dans l'air; les figures qu'elles affectent coïncident, sans différence appréciable, avec celles d'une masse pleine sans pesanteur.	§3
Appareil nécessaire aux expériences à effectuer par le premier procédé	§4
Première cause perturbatrice: petite action dissolvante mutuelle entre le liquide alcoolique et l'huile	§5
Comment on prépare les deux liquides de manière à les rendre à fort peu près inertes l'un à l'égard de l'autre	§6
Seconde cause perturbatrice: variations de la température	§7
Précautions prises pour éviter toute erreur dans les observations	§8
Détails de la réalisation de la sphère	§9
Comment, dans le cas d'une leçon publique, on obvie à l'influence des variations de température	§10

Nécessité des précautions décrites. — Circonstance perturbatrice qui se présente assez souvent, et moyen d'y remédier	§11
Vu la différence des lois qui régissent l'attraction moléculaire et l'attraction universelle, on ne peut tirer des expériences aucune induction à l'égard de faits astronomique	§12
Vérification des principes les plus importants de la théorie de l'action capillaire, et d'abord de celui en vertu duquel toutes les actions capillaires émanent de la couche superficielle: maintien de la forme sphérique de la masse d'huile, quand son intérieur est occupé dissymétriquement par des masses étrangères qui n'atteignent pas la couche superficielle. Cas où un système solide plongé dans la masse atteint cette couche	§13
Autre expérience : disque solide mis en contact avec la surface de la sphère liquide; l'huile s'étend sur ta face du disque, et s'arrête nettement au bord de celui-ci	§14
Autre expérience encore : disque solide introduit dans une sphère d'huile trop petite pour l'envelopper entièrement; l'huile forme alors deux segments de sphères s'appuyant respectivement sur les deux faces du disque	§15
Quand une figure liquide s'arrête à un contour solide, elle appartient à une figure d'équilibre plus étendue	§16
Fait à ajouter à ceux des § 13 à 16, en confirmation du même principe : par un séjour prolongé dans le liquide alcoolique, la masse, si elle est formée d'huile non préparée, se recouvre d'une mince pellicule, et alors elle devient indifférente à toutes les figures	§17
Vérification du principe des pressions exercées par la couche superficielle. Première expérience, relative aux surfaces convexes de courbure sphérique. Remarque	§18
Modification de l'expérience précédente : réalisation d'une lentille bi-convexe entièrement liquide à l'exception de sa circonférence	§19
Expérience relative aux surfaces planes et aux surfaces concaves de courbure sphérique. Remarque	§20
Dans cette expérience, on a réalisé une lentille liquide bi-concave; assemblage de celle-ci et de la bi-convexe, pour en former une lunette de Gaulée	§21
Vérification d'un autre point: un liquide soustrait à la pesanteur doit pouvoir s'élever indéfiniment, par l'action capillaire, dans un tube vertical de grand diamètre; indication de l'expérience à faire avec de l'huile au sein du liquide alcoolique	§22
Précautions à prendre	§23
Résultats de l'expérience, avec un tube de 14m de diamètre intérieur et de 42 centimètres de longueur. Le mouvement ascensionnel de l'huile est retardé	§24
Cause de cette particularité	§25
Si l'on effectue l'expérience avec du liquide alcoolique au sein de l'huile, on doit s'attendre à obtenir un mouvement accéléré	§26
Précautions à prendre dans ces dernières conditions	§27
Résultats de l'expérience; le mouvement ascensionnel est, en effet, accéléré. Remarque	§28
Réalisation de polyèdres entièrement liquides à l'exception de leur sarêtes	§29
Détails de l'expérience, et précautions. Cas d'un auditoire nombreux	§30
Les polyèdres qu'on veut former doivent ne pas avoir d'angles dièdres rentrants; pourquoi	§31

Prisme triangulaire à faces liquides employé à produire le phénomène de la dispersion — M. Mach : réalisation des polyèdres liquides dans l'air, au moyen de charpentes de dimensions minimales	§32
---	-----

CHAPITRE II.

Considérations relatives aux figures d'équilibre en général. Figures d'équilibre de révolution: sphère, plan, cylindre, onduloïde, caténoïde, nodoïde; étude expérimentale à l'aide du premier procédé; résultats des géomètres.

Les figures d'équilibre sont à courbure moyenne positive, négative ou nulle; la pression qu'exerce leur couche superficielle est, suivant les trois cas, supérieure, inférieure ou égale à celle d'une couche superficielle plane	§33
Très—probablement la sphère est la seule surface fermée à courbure moyenne constante	§34
Toutes les autres figures peuvent être réalisées par portions, entre des limites solides convenables	§35
On peut arriver par l'expérience et le simple raisonnement aux formes générales et à tous les détails des figures d'équilibre de révolution	§36
Parmi ces figures, la sphère et le plan sont les seules dont les lignes méridiennes atteignent l'axe	§37
Les lignes méridiennes des autres ne peuvent avoir aucun point de rebroussement	§38
Le cylindre fait partie de ces mêmes figures	§39
Réalisation du cylindre entre deux anneaux. Les bases de la figure sont convexes; pourquoi	§40
Le rayon des sphères auxquelles appartiennent ces bases est égal au diamètre du cylindre	§41
Comment on vérifie ce principe par des mesures	§42
Précautions à prendre pour les effectuer	§43
Résultats qu'elles ont donnés; ils confirment le principe théorique	§44
Quand la hauteur qu'on veut donner au cylindre surpasse notablement le triple du diamètre, la figure s'altère toujours spontanément avant qu'on ait atteint la forme cylindrique, puis elle se sépare en deux portions inégales	§45
Ce phénomène a lieu aussi bien à l'égard d'un cylindre horizontal qu'à l'égard d'un cylindre vertical; on en conclut qu'un cylindre liquide dont la longueur excède notablement le triple du diamètre, constitue une figure d'équilibre instable. Comment on réalise les cylindres horizontaux. Cas d'un auditoire nombreux	§46
Expérience conduisant à une figure d'équilibre de révolution autre que la sphère et le cylindre	§47
Cette nouvelle figure se compose d'une suite indéfinie de renflements égaux alternant avec des étranglements égaux; nous la nommons l'Onduloïde	§48
Comment l'équilibre existe dans une semblable figure. Quand on en réalise une portion entre deux anneaux, les bases sont convexes; pourquoi	§49
L'onduloïde complet peut varier de forme entre deux limites, qui sont le cylindre, et une suite indéfinie de sphères égales qui se touchent sur l'axe	§50

Les variations de l'onduloïde ont une troisième limite, consistant en un étranglement unique s'étendant indéfiniment de part et d'autre de son cercle de gorge	§51
L'expérience conduit à regarder la portion d'onduloïde limitée par les cercles de gorge de deux étranglements consécutifs, comme étant à la limite de la stabilité	§52
L'onduloïde indéfini est conséquemment une figure instable	§53
Quand on étire une sphère d'huile entre deux anneaux égaux en regard, et qu'on n'est pas encore arrivé au cylindre, la figure constitue toujours une portion d'onduloïde	§54
Quand, en continuant l'étirement, le cylindre que l'on forme n'est pas trop court, si l'on poursuit l'étirement plus loin, la figure étranglée qu'on obtient est aussi une portion d'onduloïde. Autre moyen de réaliser ces portions étranglées	§55
En enlevant de l'huile à un cylindre dont la hauteur n'excède pas les environ du diamètre, on voit les bases s'affaisser, et on peut les rendre parfaitement planes. La portion étranglée comprise entre les anneaux appartient alors à une nouvelle figure d'équilibre. Celle-ci est à courbure moyenne nulle. La ligne méridienne de la figure complète est une chaînette. Nous nommons cette nouvelle figure le caténoïde	§56
Le caténoïde a deux aspects différents, suivant qu'on suppose le liquide d'un côté ou de l'autre de sa surface	§57
Pour des anneaux d'un diamètre donné, il y a un maximum d'écartement au delà duquel aucune portion de caténoïde n'est plus possible entre eux. A tout écartement moindre correspondent deux caténoïdes distincts, inégalement rentrés	§58
Tous les caténoïdes complets sont des figures semblables	§59
Des deux caténoïdes partiels correspondants à un écartement inférieur à la limite, le plus rentré est instable. Le caténoïde partiel de plus grande hauteur doit être considéré comme étant à la limite de la stabilité. Difficulté apparente	§60
La troisième limite des variations de l'onduloïde est le caténoïde. Tout étranglement s'appuyant sur deux anneaux et présentant des bases convexes, est un étranglement d'onduloïde	§61
Détermination expérimentale approchée du rapport maximum entre la hauteur du caténoïde partiel et le diamètre des bases	§62
Etranglement appartenant à une nouvelle figure d'équilibre	§63
Poursuite de la ligne méridienne de celle-ci au delà des limites du système Solide. Cette ligne doit présenter, à une distance finie du sommet qui regarde l'axe de révolution, deux points où la tangente est parallèle à l'axe de symétrie	§64
Confirmations expérimentales	§65
Au delà, les deux parties de la courbe vont se couper sur l'axe de symétrie, en formant un nœud	§66
Réalisation de la portion de figure engendrée par ce nœud	§67
La figure complète est susceptible de variations comme l'onduloïde	§68
On ne peut se représenter la figure complète qu'à l'état de simple surface, parce qu'elle a des portions engagées dans le liquide	§69
Au delà de la pointe du nœud, la courbe conserve le même sens de courbure, et chacune de ses branches présente un point où la tangente est parallèle à l'axe de révolution ...	§70

Vérification expérimentale. Quand on rapproche trop les bases solides, la figure devient instable	§71
La ligne méridienne complète se compose d'une suite indéfinie de noeuds identiques rangés le long de l'axe de révolution, et reliés entre eux par des arcs également identiques. Nous donnons à la figure engendrée le nom de Nodoïde	§72
Les figures réalisées dans les expériences du § 71, appartiennent au Nodoïde	§73
L'une des limites des variations du nodoïde lui est commune avec l'onduloïde; c'est la suite indéfinie de sphères tangentes	§74
Une seconde, limite consiste en un cylindre placé transversalement par rapport à l'axe de révolution, qui en est infiniment éloigné	§75
Différents moyens de réalisation d'un nodoïde partiel approchant de cette seconde limite	§76
La troisième limite des variations du nodoïde, est le caténoïde	§77
Il n'y a pas d'autres figures d'équilibre de révolution que celles étudiées dans les paragraphes précédents	§78
Résultats des géomètres. Poisson intégrale première de l'équation des figures d'équilibre de révolution	§79
Goldschmidt: étude analytique du caténoïde parnum80	
MM. Lindelof et Moigno idem	§81
Delaunay génération géométrique des lignes méridiennes des surfaces de révolution à courbure moyenne constante	§82
M. Lamarle: il n'y a pas de surfaces de ce genre autres que celles dont les lignes méridiennes sont ainsi engendrées	§83
Beer: intégrale elliptique de l'équation de ces lignes	§84
Conséquences qu'il déduit de ses formules	§85
Remarques à ce sujet	§86
Evaluation, par le même, au moyen des fonctions elliptiques, du volume et de la surface d'une portion d'onduloïde	§87
M. Mannheim: évaluation de la longueur d'une portion déterminée de la ligne méridienne de l'onduloïde	§ 88
M. Lindeléf: nouvelle étude des surfaces de révolution à courbure moyenne constante ..	§89
Vérification expérimentale de l'un des résultats de ce travail	§90
Détermination précise, par le même, des dimensions du caténoïde limite lorsque les diamètres des bases ont entre eux un rapport quelconque donné	§91
Rayons de courbure des lignes méridiennes de l'onduloïde et du nodoïde, au minimum et au maximum de distance à l'axe	§92
Liquides pouvant être substitués à l'huile et au mélange alcoolique; expériences de M. Dufour et de M. D'Henry	§93
Expérience proposée par M. D'Henry. Expérience de Matteucci	§94
Notre procédé peut servir à réaliser sur une grande échelle les phénomènes capillaires ordinaires, c'est-à-dire ceux où la pesanteur intervient	§94bis

CHAPITRE III

Deuxième procédé; démonstration. — Liquide donnant des lames d'une très— grande persistance. — Réalisation, au moyen des lames, des figures d'équilibre de révolution. — Pression exercée par une lame sphérique sur l'air qu'elle contient. — Recherche d'une limite supérieure très-petite du rayon d'activité sensible de l'attraction moléculaire.

Démonstration de l'identité entre les figures des lames liquides minces et celles des masses pleines sans pesanteur	§95
Remarque sur le signe de la constante de la formule de l'équilibre dans le cas des lames	§96
Quand une lame liquide mince a ses deux faces dans l'air libre, elle représente toujours une surface à courbure moyenne nulle	§97
Liquide fournissant des lames d'une très-grande persistance ; nous le nommons liquide glycérique. Comment on l'essaie	§98
Préparation de ce liquide par des procédés simples, mais qui ne donnent pas les meilleurs résultats	§99
Procédé plus compliqué, mais fournissant un liquide bien supérieur	§100
Résultats des essais avec le liquide préparé par ce dernier procédé	§101
Altération lente du liquide	§102
Avantages de la substitution de l'oléate de soude pur au savon de Marseille dans la composition du liquide	§103
Résultats des essais avec le liquide glycérique à l'oléate de soude	§104
Grande importance des proportions, tant dans le liquide au savon, que dans le liquide à l'oléate de soude	§105
Les bulles de liquide glycérique persistent bien plus longtemps encore quand elles sont formées en vase clos. Conditions d'une bonne réussite	§106
Exemples de bons liquides glycériques préparés avec différents savons et des glycérines de différentes provenances	§107
Phénomènes remarquables que présentent les bulles de liquide glycérique quand elles persistent assez longtemps	§108
Causes de ces phénomènes	§109
Appareils nécessaires pour la réalisation, au moyen des lames, des figures d'équilibre de révolution. Comment on prépare les expériences	§110
Réalisation du caténoïde. Transformation spontanée quand on dépasse la hauteur limite	§111
Réalisation du cylindre	§112
Réalisation de l'onduloïde, 1° étranglé en son milieu, 2° renflé en son milieu	§113
Réalisation de la portion du nodoïde engendrée par un arc de la ligne méridienne convexe vers l'extérieur	§114
Beauté de ces figures laminaires, et facilité des expériences	§115
Démonstration du principe que l'intensité de la pression exercée par une bulle sphérique laminaire sur l'air emprisonné, est en raison inverse du diamètre de cette bulle	§116

Formule générale qui représente cette pression	§117
Recherches du Dr Hough, de M. Henry, de M. De Tesson, de Sir W. Thomson et de M. Tait	§118
Vérification expérimentale du principe du § 116	§119
Procédé et précautions	§120
Résultats des expériences	§121
Vérification expérimentale de la formule du § 117	§122
Recherche d'une limite supérieure très-petite du rayon de l'attraction moléculaire, première évaluation de ce rayon avancée par de Maistre; principe sur lequel repose notre recherche	§123
Expériences	§124
Expériences ultérieures	§125
On en déduit ce résultat que, dans le liquide glycérique, le rayon d'activité sensible de l'attraction moléculaire est moindre que de 1/17000 millimetre	§126
Résultats obtenus depuis la première publication du précédent, par Dupré et par M. Quincke. Opinion de ce dernier savant sur un minimum au-dessous duquel l'épaisseur d'une lame ne peut descendre sans que la lame éclate	§127

CHAPITRE IV.

Figures d'équilibre qui ne sont pas de révolution. Principe général concernant la réalisation des surfaces courbure moyenne nulle. Résultats des géomètres et vérifications expérimentales.

Principe général qui permet de réaliser, à l'état laminaire, toute surface à courbure moyenne nulle dont on a soit l'équation en coordonnées finies, soit la génération géométrique ..	§128
Résultats de M. Catalan et de M. Lamarle concernant les surfaces réglées à courbure moyenne constante	§129
Réalisation, à l'état laminaire, de l'hélicoïde gauche à plan directeur	§130
M. Lamarle a résolu d'une manière complète la question des hélicoïdes à courbure moyenne constante	§131
Réalisation, avec de l'huile au sein du liquide alcoolique, de l'un de ces hélicoïdes	§132
Travaux des géomètres sur les surfaces à courbure moyenne nulle intégrale de Monge. Surfaces que M. Scherk en a déduites	§133
Travail de M. Bjorling	§134
M. Ossian Bonnet autre intégrale générale. Génération géométrique de l'une des surfaces de M. Scherk	§135
Travail de M. Serret	§136
M. Catalan discussion de l'une des surfaces de M. Scherk. Autre intégrale générale. Génération géométrique d'une nouvelle surface	§137
Réalisation, à l'état laminaire, de l'une des surfaces de M. Scherk	§138
Idem, par M. Van der Mensbrugge, d'une autre des surfaces de M. Scherk	§139

M. Mathet: équation différentielle générale des surfaces à courbure moyenne nulle, passant par une courbe plane donnée	§140
M. Enneper: équation algébrique d'une surface à courbure moyenne nulle	§140bis
M. Schwarz : discussion de la surface à courbure moyenne nulle passant par un contour formé de quatre arêtes d'un tétraèdre régulier	§141
Riemann : recherche générale des surfaces à aire minima passant par plusieurs lignes limites	§142
M. Schwarz: détermination de la surface s'appuyant sur les côtés d'un quadrilatère gauche, dans un cas plus général que celui du § 141; idem d'une autre surface dérivant de la précédente par flexion. — Symétrie dans les surfaces à aire minima sur lesquelles on peut tracer une ligne droite, et dans celles qui peuvent être coupées par un plan de telle manière que, tout le long de la section, leurs éléments soient perpendiculaires à ce plan. Détermination, par les fonctions elliptiques, de deux surfaces particulières	§143
M. Enneper : généralisation de l'une des équations de M. Scherk	§143bis
Expériences qui montrent que, un contour fermé quelconque étant donné, il y a toujours au moins une surface à courbure moyenne nulle dont une portion finie peut le remplir	§144
Expérience qui constate qu'une infinité d'autres surfaces à courbure moyenne nulle peuvent passer par le même contour	§145

CHAPITRE V.

Tension des surfaces et des lames liquides; historique. Systèmes laminaires. Lois auxquelles ils sont soumis; comment ils se développent; principe général qui régit leur constitution. Démonstration théorique de leurs lois.

Segner : première idée d'une tension dans la couche superficielle des liquides	§146
Leidenfrost : première constatation de la force contractile, ou tension, des bulles de savon; idées singulières. Monge: l'hypothèse de la tension pourrait servir à rendre raison des phénomènes capillaires	§147
Young : le principe de la tension traité d'une manière exacte, son application aux phénomènes capillaires. Young ne considère la tension que comme une hypothèse. Laplace: opinion sur les recherches de Segner et de Young	§148
Dr Hough: erreur dans la même application. Hypothèse sur la cause de la tension. De cette force naît une pression sur l'air intérieur aux bulles: loi inexacte	§149
Mile: il est conduit aussi à une tension ; mais, telle qu'il la considère, elle suivrait des lois inadmissibles	§150
Mossotti: nouvelle application du principe de la tension aux phénomènes capillaires; la tension est indépendante des courbures; évaluation de la tension pour différents liquides; tension à la surface commune de deux liquides; évaluations; hypothèse sur la cause de la tension	§150bis
M. Henry: énoncé net de la dépendance entre la pression d'une bulle et la tension de la lame; vraie loi de cette pression; expérience. On peut regarder M. Henry comme ayant prouvé le premier la réalité de la tension	§151
M. Hagen: nouvelle application de la tension aux phénomènes capillaires. Plusieurs procédés pour la mesure de la tension. La tension de l'eau décroît par l'exposition	

de ce liquide à l'air. Valeurs des tensions de plusieurs autres liquides. Hypothèse sur la cause de la tension. La tension paraît être d'autant plus faible que le liquide mouille mieux les autres corps	§152
Le même: c'est la tension qui limite le diamètre des disques liquides de Savart	§153
Les lames liquides doivent être assimilées à des membranes tendues	§154
M. J. Thomson: phénomènes curieux expliqués par des différences de tension	§155
Sir W. Thomson: expression analytique, en fonction de la tension, de la pression exercée par une bulle creuse	§156
Langberg: la tension a une influence notable sur les mesures aréométriques	§156bis
Wilhelmy: expériences tendant à jeter quelque doute sur la précision des valeurs de la tension obtenues par le procédé le plus ordinaire	§157
M. Lamarle : première démonstration théorique de l'existence de la tension. Démonstration par les sphères laminaires	§158
La tension, dans une sphère laminaire, est indépendante du rayon, et conséquemment elle existe, avec la même valeur, dans les lames planes	§159
Point de vue particulier sous lequel M. Lamarle envisage la tension	§160
M. Marangoni: l'étalement d'une goutte liquide sur un autre liquide est un phénomène de tension; condition de sa production. Lame d'eau de savon traversée par des veines liquides. Expérience qui montre que la tension est modifiée à la surface commune de deux liquides en contact	§160bis
Dupré autre démonstration de l'existence de la tension. Expériences simples constatant cette existence. — Hypothèse sur la cause de la tension. — La tension est bien réellement indépendante des courbures. — La tension des lames est indépendante de leur épaisseur, tant que celle-ci n'est pas inférieure à une certaine limite extrêmement petite; accord avec mes expériences. — Influence de la température. — Le calcul donne, a priori, la tension d'un liquide en fonction des équivalents chimiques des éléments de celui-ci. — Loi du retrait d'une lame qui éclate. Loi de la diminution progressive d'une bulle qui se vide par le tube d'insufflation. — Procédés nouveaux pour la mesure de la tension. — Valeurs des tensions de 18 substances	§161
M. Van der Mensbrugghe: nouveaux procédés pour la constatation et la mesure de la tension des lames. — Lois relatives à la forme que prend un fil flexible qui intercepte une portion d'une lame courbe, quand on a crevé cette portion. Remarques de M. Lamarle; vérifications expérimentales. — Expérience curieuse	§162
M. Luvini: expériences sur la tension à la surface des gouttes liquides	§162bis
M. Quincke: tensions des surfaces solides; leurs valeurs soit énormes. — Mesure des tensions des métaux fondus, du verre fondu, des sels et d'autres corps composés fondus	§163
Dupré: nouvelles applications de ses méthodes. Procédé pour la mesure de la tension à la surface commune de deux liquides. — Condition pour qu'une goutte d'un liquide s'étale en lame mince sur un autre liquide	§164
Examen de l'opinion de M. Quincke mentionnée à la fin du §127	§165
M. Lütge: loi concernant l'extension d'un liquide en lame mince sur un autre liquide. — Substitution spontanée d'un liquide à un autre dans une lame	§166

- M. Van der Mensbrugge: un grand nombre de phénomènes sont dus à des différences de tension. — Courant centrifuge et courant centripète, à l'approche d'une gouttelette d'un liquide volatil. — Dans le cas où une goutte d'un liquide prend, sur un autre liquide, la forme lenticulaire, condition analytique de l'équilibre de cette forme; cas de l'étalement. — Condition générale de l'équilibre de figure d'une calotte laminaire reposant sur un liquide; cas où ce liquide a une tension différente de celle de la lame; vérification expérimentale. Nouveaux faits de substitution d'une lame à une autre. — Explication de certains courants ascensionnels dans de l'eau qui glisse sur une paroi inclinée. — Explication des mouvements qu'exécutent, sur l'eau, des parcelles de camphre et de plusieurs autres substances §167
- Le même : nouvelle vérification de la formule du Mémoire précédent relative aux calottes laminaires. — Nouvelles expériences sur la substitution d'une lame à une autre. — Disparition instantanée de la mousse §168
- M. Quincke : nouveau procédé pour la mesure de la tension à la surface commune de deux liquides; résultats de ces mesures. Application du même procédé à la mesure de la tension d'un liquide isolé. — Autres procédés encore concernant la tension à la surface commune de deux liquides. — Loi de l'étalement d'un liquide en lame mince sur un autre liquide §169
- Récapitulation des résultats relatifs à la tension §170
- Cause probablement vraie de la tension; comment la tension est engendrée dans les surfaces planes §171
- M. Félix Plateau: expérience curieuse concernant l'action de la chaleur sur la tension des lames §172
- Quand deux, calottes laminaires sont accolées et qu'ainsi le système présente une cloison laminaire, cette cloison est de courbure sphérique ou plane; formule qui donne la valeur de son rayon. Les angles sous lesquels se joignent les deux calottes et la cloison, sont de 120° ; pourquoi §173
- Cause de la génération de la cloison, dans le cas où deux calottes primitivement séparées viennent à s'unir §174
- Construction géométrique de la base du système de deux calottes et de leur cloison; vérification expérimentale §175
- Cette construction donne, pour le rayon de la cloison, la même valeur que le calcul du §173 §175bis
- Vérification expérimentale des résultats du §174 §176
- Cas de trois calottes accolées; construction géométrique de la base du système §177
- Démonstration §178
- Expérience de vérification ; jointe à celle du §175, elle vérifie en même temps la loi de la raison inverse de la pression au diamètre §179
- Cas de l'accolement de quatre calottes: deux dispositions possibles du système, l'une contenant quatre cloisons, et l'autre cinq; la seconde est seule stable. — Dans tous nos assemblages de calottes, chaque arête liquide n'est commune qu'à trois lames faisant entre elles, à cette arête, des angles égaux §180
- Dans ceux où des arêtes liquides se joignent en un même point, celles-ci sont toujours au nombre de quatre, et font entre elles, à leur point commun, des angles égaux. Cette

égalité est une conséquence de celle des angles entre les lames. Le cosinus des angles entre les arêtes est égal à $-1/3$	§181
Systèmes laminaires développés, avec le liquide glycérique, dans les charpentes polyédriques en fil de fer; leur régularité et leur symétrie	§182
Beauté de ces systèmes. Disposition qui en rend l'observation commode. On peut, à la rigueur, substituer l'eau de savon au liquide glycérique	§183
Le fait de trois lames à une même arête liquide et celui de quatre arêtes liquides à un même point liquide se retrouvent dans tous les système laminaires, et constituent ainsi deux lois générales. L'égalité des angles entre les lames et celle des angles entre les arêtes, constituent deux autres lois générales	§184
Vérification expérimentale, sur les systèmes composés de lames planes, des lois ci-dessus relatives aux angles	§185
Autre vérifications sur les systèmes qui contiennent des lames courbes. Lame polygonale centrale parallèle aux bases dans les systèmes des charpentes prismatiques	§186
Autre vérification encore	§186bis
Faits qui établissent l'instabilité de tout système laminaire dans lequel plus de trois lames aboutiraient à une même arête liquide, ou plus de quatre arêtes liquides à un même point liquide	§187
Constitution de la mousse formée sur les liquides; vérification expérimentale	§188
Comment les lames qui doivent constituer le système d'une charpente se disposent pendant qu'on retire celle-ci du liquide : cas des charpentes prismatiques dont les bases ont au moins six côtés, quand on les retire en maintenant leur axe vertical	§189
Cas des charpentes prismatiques dont les bases ont moins de six côtés, et qu'on retire de la même manière	§190
Comment se complètent les systèmes des charpentes du § 189 comme exemple, celui du prisme hexagonal. Particularité qu'il présente; cause de celle-ci	§191
Comment se complètent les systèmes des charpentes du § 190 parnum192	
Cas d'une charpente symétrique autour d'une axe passant par un sommet, et retirée du liquide par ce sommet	§193
Pourquoi les systèmes des charpentes ne contiennent aucun espace fermé. — Toutes leurs lames représentent des surfaces à courbure moyenne nulle	§194
Quand, dans la charpente du prisme pentagonal, le rapport entre la hauteur et les dimensions de la base dépasse une certaine limite, la lame pentagonale centrale ne peut plus subsister, et l'on obtient un système tout différent de celui décrit dans le §186	§195
Dans des conditions analogues, la charpente du prisme hexagonal, quand on la retire en maintenant l'axe vertical, donne encore un système avec une lame polygonale centrale; comment le système se dispose pour amener ce résultat. Je nomme imparfait un système de ce genre; pourquoi	§196
Une disposition semblable s'observe, à plus forte raison, dans les systèmes des prismes à un plus grand nombre de côtés, retirés de la même manière; elle est d'autant plus prononcée que le nombre des côtés est plus grand	§197
Avec ces mêmes prismes, une diminution dans le rapport entre la hauteur et les dimensions de la base n'empêche pas la disposition dont il s'agit	§198

Explication de ce dernier fait	§199
Les côtés de la lame polygonale centrale sont d'autant plus courbes que le nombre des côtés du prisme est plus grand; pourquoi	§200
Avec des charpentes prismatiques hexagonale et heptagonale dont la hauteur est environ 2 1/2 fois le diamètre du cercle qu'on inscrirait à la base, on obtient, quand on les retire du liquide leur axe étant horizontal, trois systèmes différents sans lame centrale; l'un de ceux de la charpente heptagonale est instable. Ce qui a lieu pour des hauteurs plus grandes. Cas du prisme octogonal	§201
Principe général de M. Van Rees concernant les systèmes des char pentes prismatiques dans lesquelles le rapport entre la hauteur et les dimensions de la base ne permet plus l'existence de la lame polygonale centrale	§202
Formation, à l'intérieur des systèmes des charpentes, d'une figure laminaire fermée. — Effet curieux produit par un souffle léger sur le système de la charpente cubique. — Modifications curieuses de quelques systèmes par la rupture de certaines de leurs lames	§203
Résultats de M. Lamarle concernant surtout les polyèdres laminaire intérieurs	§204
Systèmes parfaits, systèmes imparfaits, systèmes nuls; conditions dans lesquelles on les obtient	§205
Procédé curieux de Brewster permettant de produire certains systèmes avec une très-petite quantité de liquide. Autre procédé	§206
Systèmes des charpentes représentant des polyèdres de fantaisie	§207
Nouvelle expérience concernant l'effet de la chaleur sur la tension des lames. Modifications produites ainsi dans un système laminaire. Autre moyen, indépendant de la chaleur, de produire des modifications analogues	§208
Tout système laminaire se constitue de manière que la somme des aires de ses lames soit un minimum	§209
Démonstration donnée par M. Lamarle, en partant du principe ci-dessus, des lois du § 184	§210
Réalisation curieuse, par M. Mach, du système du tétraèdre régulier au moyen de lames de caoutchouc. — idée théorique, du même savant sur la tendance des liquides au minimum de surface	§210bis

CHAPITRE VI.

Théorie de la génération des lames liquides; moyens différents de produire ces lames; particularités qu'elles présentent suivant le procédé employé pour les développer.

La génération des lames liquides s'explique par l'influence de la cohésion et de la viscosité: premier exemple, la calotte laminaire développée à la surface d'un liquide par l'ascension d'une bulle d'air. Application à certains faits que présentent les masses-d'huile ans le liquide alcoolique	§211
La calotte une fois formée est de courbure sphérique; le raisonne ment montre qu'elle tend à constituer un hémisphère	§212
Particularités qu'elle présente: petite masse soulevée le long de son bord; dépression de la surface du liquide dans l'espace circonscrit par cette petite masse; expérience qui constate cette dépression	§213

Quand la calotte a un grand diamètre elle peut être considérée comme hémisphérique; mais quand elle est très-petite, elle est fort affaissée; expérience à ce sujet	§214
Limite de diamètre au-dessous de laquelle l'affaissement commence à se montrer au simple aspect dans les calottes de liquide glycérique	§215
Formule de M. Van der Mensbrugge relative à l'équilibre d'une calotte laminaire.; cette formule démontre, en premier lieu, qu'une semblable calotte reposant sur une couche épaisse de liquide n'est jamais rigoureusement un hémisphère, mais en approche d'autant plus que son diamètre est plus grand; et, en second lieu, que si la calotte repose sur un plan solide mouillé du même liquide, elle est toujours exactement hémisphérique	§216
La lame qui constitue une calotte laminaire est le siège de mouvements continuels dus à la descente graduelle des molécules vers la base	§217
Génération des lames d'huile dans le liquide alcoolique: premier exemple, exhaustion graduelle de la lentille bi-concave du § 20	§218
Transformation des polyèdres d'huile pleins en systèmes laminaires :cas du cube; particularités	§219
Autre particularité; explication	§220
Cas de l'octaèdre; particularités et explication	§221
Formation, avec de l'huile, au sein du liquide alcoolique, de toutes les figures d'équilibre à l'état laminaire : premier exemple, formation du caténoïde	§222
Formation de la sphère; dispositif de l'expérience; précautions	§223
Résultats obtenus : sphères de 12 centimètres de diamètre, pleines de liquide alcoolique, et isolées dans le même liquide. Comment on pourra réaliser les autres figures d'équilibre de révolution	§224
Génération des lames d'eau de savon ou de liquide glycérique qui partent des fils solides des charpentes. Cas d'un simple anneau retiré du liquide dans une position horizontale	§225
La lame qui se forme entre cet anneau et la surface du liquide, est une portion de caténoïde	§226
Si l'anneau est assez grand, et qu'on le soulève jusqu'au point où l'équilibre cesse, la figure, en ce moment, constitue la moitié d'un caténoïde de hauteur maxima. Vérification expérimentale	§227
Génération des sphères laminaires complètes par l'insufflation à travers un tube	§228
Génération des lames planes en travers d'un flacon. Quand elles sont formées de liquide glycérique, elle possèdent des propriétés remarquables -	§229
Lames développées par l'étalement d'un liquide en mouvement: lames de Savart obtenues par le choc d'une veine liquide contre un petit disque solide; particularités qu'elles présentent. Modifications apportées à ces lames par M. Tyndall	§230
Explication de la génération de ces lames et de leurs particularités	§231
Lames de Savart résultant du choc de deux veines liquides opposées; lois qui les régit ; particularités	§232
Les explications données au § 231 s'appliquent également à ces dernières lames	§233

Lames de Magnus résultant de la rencontre de deux veines dont les directions forment un angle	§234
Bulles laminaires complètes obtenues par M. Félix Plateau, puis par M. Van der Mensbrugghe, en lançant un liquide obliquement en l'air de manière à l'étaler en nappe; théorie du phénomène	§235
Autre moyen de produire, dans l'air, des bulles laminaires complètes, sans insufflation .	§236
Observation, par MM. Minary et Sire, de petites bulles laminaires s'échappant d'un mélange fortement agité d'huile d'olive et d'acide sulfurique	§237
Veine laminaire lancée verticalement de haut en bas par un orifice en forme de fente rectiligne; cause de l'aspect qu'elle présente	§238
Lame lancée par une longue fente verticale s'étendant jusqu'au-dessus du niveau du liquide; son bord supérieur est rectiligne et incliné l'horizon. Théorie. Résultats de Le François	§239
Tous les liquides sont susceptibles de se convertir en lames minces	§240

FIN DE LÀ TABLE DES MATIÈRES DU TOME PREMIER.

STATIQUE
EXPÉRIMENTALE ET THÉORIQUE
DES LIQUIDES
SOU MIS
AUX SEULES FORCES MOLÉCULAIRES,

PAR

J. PLATEAU

Professeur à l'Université de Gand,
Membre de L'Académie de Belgique, Correspondent de l'Institute de France,
de la Société Royale de Londres, de l'Académie de Berlin, etc.

TOME SECOND.

PARIS, GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustine, 55.	LONDRES, TRÜBNER ET Cie, Ludgate Hill, 57 et 59.
--	--

GAND ET LEIPZIG: F. CLEMM.

1873.

STATIQUE DES LIQUIDES

SOUMIS

AUX SEULES FORCES MOLÉCULAIRES.

CHAPITRE VII.

Recherche des causes principales d'où dépendent le facile développement et la persistance des lames liquides: Viscosité superficielle; influence du rapport entre cette viscosité et la tension.

§ 241. Si tous les liquides peuvent se développer en lames minces, ils présentent néanmoins, quant à la facilité de ce développement et quant à la persistance des lames engendrées, des différences considérables : on gonfle aisément, par exemple, de grosses bulles à l'orifice d'une pipe avec de l'eau de savon, et personne ne s'aviserait d'essayer avec de l'eau pure; les lames transversales dans un flacon persistent un temps énorme si le liquide employé est du liquide glycérique, et elles éclatent presque immédiatement si c'est de l'eau (§ 229).

Où attribue généralement à la viscosité l'extension aisée de l'eau de savon et de quelques autres liquides en lames minces de grande étendue; je ferai voir que la viscosité, du moins telle qu'on l'entend, ne joue qu'un rôle minime dans cette facilité d'extension, et je tâcherai d'arriver à la véritable cause du phénomène.

§ 242. M. Gladstone est, je pense, le seul qui se soit occupé un peu sérieusement de la question. Ce savant a publié, en 1857, une Note¹⁴¹ sur la mousse qui se forme, par l'agitation ou autrement, à la surface de certains liquides; je vais en traduire les passages qui se rapportent à notre sujet:

«Tous les liquides, » dit M. Gladstone, «lorsqu'on les secoue avec de l'air, forment des bulles; mais, sur les uns, ces bulles éclatent et s'évanouissent dès que l'agitation cesse, tandis que, sur d'autres, se montre une mousse plus ou moins permanente. Cette différence entre les liquides paraît tenir à un caractère spécifique, et l'on ne peut, jusqu'ici, la faire dépendre d'aucune autre qualité.

«En règle générale, les solutions aqueuses de corps organiques sont les plus propres à donner de la mousse.

«Les solutions des acétates sont particulièrement disposées à la production d'une mousse persistante; elles possèdent cette propriété à un tel degré, que j'ai pu quelquefois, parmi différents mélanges de solutions salines, reconnaître par ce moyen ceux qui contenaient un acétate. L'acétate de fer est au premier rang; mais les acétates de cuivre, de plomb et d'autres métaux présentent la même propriété d'une manière très prononcée. Cependant l'acide acétique lui-même ne montre aucune disposition à la formation de la mousse. Les bulles développées par l'agitation de l'alcool ou de l'éther disparaissent instantanément... Le citrate de fer est analogue à l'acétate.

« Cette faculté de mousser est complètement indépendante de la densité: une solution dense d'acide sulfindigotique mousse par l'agitation, mais une solution de chlorure d'ammonium d'une grande densité ne produit aucune mousse durable, tandis que, d'un autre côté, une faible solution de savon, qui diffère peu de l'eau distillée, donne lieu, comme chacun le sait, à une mousse très persistante.

¹⁴¹Note on froth (PHILOS. MAGAZ., 4me série, vol. XIV, p. 314).

Dans cette Note, on le voit, il s'agit surtout de la mousse; mais, nous le savons, celle-ci n'est qu'un assemblage de lames, et il paraît naturel d'admettre qu'un liquide qui se recouvre, par l'agitation, d'une mousse abondante et persistante, doit se laisser gonfler aisément en bulles à l'orifice d'une pipe ou d'un tube. C'est là, en effet, le cas général, et l'eau de savon nous en offre un exemple familier. J'ai cependant rencontré, à cet égard, de curieuses exceptions; je les ferai connaître plus loin.

M. Gladstone signalant l'acétate de fer comme remarquable au point de vue de la mousse, je me suis procuré une solution concentrée et aussi neutre que possible d'acétate de peroxyde de fer; elle moussait très bien, et l'on a pu effectivement en gonfler sans peine, à l'orifice d'une pipe, des bulles de cinq et même quelquefois de six centimètres de diamètre.

Ce qu'il nous importe surtout de remarquer, c'est que M. Gladstone déclare ne pouvoir faire dépendre la faculté de mousser d'aucune propriété connue des liquides, et qu'il regarde conséquemment les différences de viscosité et de cohésion comme insuffisantes pour rendre raison de la diversité que présentent les liquides à cet égard.

§ 243. Reprenons la question où il l'a laissée, et essayons de la poursuivre.

Tandis que la cohésion s'oppose à la rupture des lames, la tension constitue, au contraire, une force qui agit sans cesse pour provoquer cette rupture. Mais la tension est nécessairement inférieure à la cohésion des couches superficielles, sans quoi il est évident que la réalisation des lames serait tout à fait impossible.

En second lieu, puisque la tension est indépendante de l'épaisseur (§ 161), il s'ensuit qu'une lame n'a, par elle-même, pas plus de tendance à se rompre lorsqu'elle est mince que lorsqu'elle est épaisse.

Cette déduction semble, au premier aperçu, s'accorder mal avec l'observation; en effet, on voit ordinairement les lames diminuer beaucoup d'épaisseur avant de crever: quand on gonfle une bulle de savon, elle atteint souvent de grandes dimensions, et n'éclate conséquemment que lorsque la lame est devenue très mince; si l'on dépose sur la surface de l'eau de savon une bulle de ce liquide, bulle qui se transforme aussitôt en calotte sphérique, la teinte du sommet de celle-ci peut aller, on le sait, jusqu'au noir intense, ce qui correspond à une épaisseur d'environ 0,mm00001, etc.

Pendant examinons la chose de plus près. Les bulles de savon et les calottes du même liquide, éclatent fréquemment aussi avant que les lames qui les constituent se soient beaucoup atténuées; quand une grosse bulle formée d'un bon liquide glycérique est déposée sur un anneau, la lame va d'abord en s'amincissant, puis reprend (§ 108) une épaisseur croissante, et c'est seulement lorsque celle-ci approche de nouveau de sa valeur originale, que la bulle se brise; on peut réaliser des lames d'eau pure de différentes manières: par exemple en calottes sphériques à la surface du liquide par l'ascension de bulles d'air, sous la forme plane en travers d'un flacon, etc.; or, sauf de rares exceptions, ces lames d'eau demeurent parfaitement incolores jusqu'à leur disparition, d'où il suit qu'elles se rompent lorsqu'elles ont encore, comme lames, une épaisseur considérable. Nous verrons d'ailleurs que beaucoup d'autres liquides sont dans le même cas.

Si donc les lames paraissent plus disposées à éclater lorsqu'elles sont plus ténues, c'est qu'alors probablement elles résistent moins à des causes extérieures telles que de petits ébranlements, etc.; nous avons vu, en effet (§ 229), qu'une grande lame de liquide glycérique soustraite, autant que possible, à ces causes extérieures et devenue noire dans toute son étendue, a persisté, avec cette excessive minceur, pendant un grand nombre de jours.

§ 244. Comme j'aurai à comparer les lames d'un grand nombre de liquides, je vais

décrire les procédés que j'ai employés pour leur production et leur observation.

Les lames formées d'un même liquide et dans les mêmes circonstances persistent, en général, d'autant plus qu'elles ont moins d'étendue; or, pour la très grande majorité des liquides, les lames de dimensions un peu considérables éclatent presque à l'instant de leur développement; il fallait donc se borner à de petites lames. J'ai choisi les calottes produites à la surface des liquides par l'ascension de bulles d'air, et l'on n'a porté son attention que sur celles dont la base avait 10mm à 12mm de diamètre. Voici le procédé qui m'a le mieux réussi :

On pose au fond d'un bocal en verre un petit vase en porcelaine ou en verre, dont le bord a environ quatre centimètres de diamètre, on le remplit, jusqu'un peu au de ce bord, du liquide à essayer, puis on y introduit l'extrémité inférieure d'un tube de verre façonné comme je vais le dire : celui qui a servi à mes expériences a 5mm de diamètre intérieur; son extrémité inférieure, repliée à angle droit sur une très petite longueur, va en se rétrécissant, et son orifice n'a que 2mm,5 ; une portion courte en caoutchouc relie l'autre extrémité à un second tube de verre, qui peut ainsi prendre toutes les directions, et auquel on applique la bouche. Cette disposition permet à l'expérimentateur de se placer commodément: il tient la portion en caoutchouc appuyée sur le bord du goulot du bocal, et il donne au tube de verre extérieur une direction obliquement descendante; ce dernier tube est d'ailleurs replié, vers son extrémité libre, sous un angle obtus, afin d'aboutir horizontalement à la bouche; là il est fermé par un tampon de papier à filtre qui serre assez pour ne laisser entrer l'air qu'en petite quantité et rendre l'insufflation aussi modérée qu'on le veut; ajoutons que la profondeur la plus convenable de l'orifice inférieur au-dessous de la surface du liquide, dépend de la nature de celui-ci; l'expérimentateur trouve aisément de lui-même ces petites modifications, et il acquiert bientôt l'habitude de produire à peu près à volonté des calottes du diamètre requis.

Quand un liquide fournit des calottes d'une persistance suffisante, celles tendent à aller s'attacher au tube; pour les en empêcher, il faut, dès que l'une d'elles est formée, soulever doucement le tube hors du liquide; comme la calotte ne peut d'ailleurs aller se heurter contre le bord du petit vase à cause de la légère convexité qu'y présente le liquide, elle reste vers le milieu de la surface de ce dernier, et conséquemment dans les conditions les plus favorables; en effet, elle est alors entièrement libre, et la paroi du bocal la protège contre les petites agitations de l'air ambiant, et contre l'haleine de l'expérimentateur quand celui-ci observe de près.

Enfin la plupart des liquides exigent d'autres précautions encore, si l'on veut soustraire leurs calottes à toute influence étrangère. L'une de ces influences est l'évaporation, quand il s'agit de liquides plus ou moins volatils. Pour l'écarter, on commence par verser dans le bocal une petite couche du liquide à essayer, ou simplement d'eau si le liquide à essayer ne fournit que de la vapeur d'eau; puis on applique contre la paroi intérieure, depuis le fond jusqu'au haut, à droite et à gauche de la direction par où doit passer la lumière, de larges bandes de papier à filtre imprégnées du même liquide; ou bien, si ce liquide est caustique, on le promène sur toute la paroi intérieure pour qu'elle en soit mouillée; on descend alors le petit vase vide au fond du bocal, et l'on ferme celui avec une plaque de caoutchouc fortement serrée au goulot et percée de deux trous; par l'un de ces trous passe, à frottement, le tube servant à l'insufflation; par l'autre on introduit le col d'un petit entonnoir, col qui doit être assez long pour atteindre à peu près l'orifice du petit vase, et l'on ferme, par l'extérieur, cet entonnoir avec un petit bouchon de liège. Cela fait, on abandonne l'appareil pendant un temps qu'on juge suffisant pour que l'atmosphère intérieure soit à peu près saturée de vapeur.

Après ce temps, qui, dans mes expériences, était au moins de deux heures, on débouche l'entonnoir, et, par son canal, on remplit le petit vase, puis on replace le bouchon, et l'on procède immédiatement aux essais.

Avec les liquides très volatils, tels que l'alcool, l'éther sulfurique, etc., ces précautions mêmes sont insuffisantes, à cause, sans doute, de la difficulté de saturer complètement l'atmosphère du bocal. Dans ce cas, on produit les calottes en secouant simplement le liquide dans un flacon abandonné préalablement pendant plusieurs heures après avoir été fortement agité. Mais si ce dernier procédé permet d'opérer dans une atmosphère aussi saturée que possible, il présente des inconvénients qui doivent le faire rejeter toutes les fois qu'on le peut : le liquide est en mouvement lors de l'apparition des calottes, ce qui rend l'observation difficile, et, si les calottes n'ont pas une très courte persistance, elles vont souvent s'attacher à la paroi, où elles se déforment plus ou moins.

Certains liquides non volatils, tels que la glycérine, l'acide sulfurique, etc., absorbent l'humidité de l'air, ce qui constitue une autre influence étrangère. Pour s'en garantir, on introduit au fond du bocal une substance qui elle-même absorbe l'humidité, telle que du chlorure de calcium ou de l'acide sulfurique, tout le reste étant disposé comme précédemment. Après un temps regardé comme suffisant pour que l'atmosphère du bocal soit des séchée, on remplit le petit vase, et l'on opère aussitôt.

§ 245. Mes expériences, effectuées avec toutes les précautions que je viens de décrire, m'ont conduit à partager les liquides, au point de vue de leurs lames, en trois catégories principales.

Les liquides qui composent la première, présentent les caractères suivants: fortement agités dans un flacon, ils ne produisent jamais de mousse très abondante, plusieurs même n'en donnent pas du tout; ils ne se laissent point gonfler en bulles à l'orifice d'une pipe, ou si l'on obtient quelquefois des bulles, elles dépassent à peine l'orifice en diamètre; leurs calottes n'ont qu'une durée assez courte, durée très variable pour chaque liquide, et très différente, quant à son maximum, d'un liquide à un autre, mais ne dépassant jamais un petit nombre de minutes ; pour plusieurs de ces liquides, toutes les calottes demeurent incolores jusqu'à leur rupture; pour d'autres, la plupart restent également blanches, mais un nombre relativement petit montrent, après un intervalle plus ou moins long, un faible commencement de coloration. Celui-ci consiste ordinairement dans l'apparition, au sommet de la calotte, d'un système exigu d'anneaux rouges et verts, qui n'excède pas 1mm,5 en diamètre; ce système se développe en un temps très court, puis conserve la même dimension minimale jusqu'à ce que la calotte éclate; quelquefois, en outre, les calottes les plus durables finissent par se revêtir, sur tout le reste de leur surface, d'un moiré pâle rose et vert; pour certains liquides, ce moiré se manifeste seul, c'est-à-dire sans qu'il y ait eu préalablement formation des petits anneaux. Enfin, chose bien singulière, les liquides aqueux chez lesquels on observe, dans une atmosphère saturée de vapeur d'eau, ces phénomènes de couleurs naissantes, n'en laissent plus voir aucune trace lorsqu'ils sont placés dans une atmosphère desséchée, et qu'ainsi leur évaporation, au lieu d'être supprimée, est au contraire activée.

En résumé donc, les caractères généraux de cette première catégorie sont peu ou point de mousse, impossibilité de gonfler des bulles, courte durée des lames, absence de couleurs sur les calottes ou coloration tardive, seulement naissante, et n'offrant, quand elle s'étend sur toute la lame, que le rouge et le vert des derniers ordres.

Parmi les nombreux liquides qui se rangent dans la catégorie dont il s'agit, je citerai l'eau, la glycérine, les acides sulfurique et azotique, l'ammoniaque, des solutions saturées d'acide tartrique, d'azotate de potasse, de carbonate de soude et de chlorure

de calcium.

Les liquides de la deuxième catégorie, comme les précédents, développent peu de mousse ou n'en développent aucune, et ne se laissent pas gonfler en bulles à l'orifice d'une pipe; leurs calottes ont, en général, des durées beaucoup plus courtes encore; mais, pour un même liquide, toutes les calottes, ou au moins une partie d'entre elles, se revêtent, à l'instant de leur formation ou très peu de temps après, de teintes prononcées des différents ordres sur toute leur surface; ces teintes peuvent se disposer en anneaux horizontaux, et alors, pour certains liquides et dans certaines conditions, elles indiquent que l'épaisseur de la lame va en croissant de la base au sommet de la calotte. Ajoutons que, par suite du peu de persistance, il faut souvent l'habitude que donne la répétition multipliée de semblables expériences pour bien juger des teintes et de leur arrangement.

Ainsi, d'une manière générale, les liquides en question se distinguent de ceux de la catégorie précédente par une coloration des lames prompte, prononcée, et montrant les teintes de tous les ordres.

Les liquides de cette deuxième catégorie sont les huiles grasses, l'acide lactique, l'acide acétique cristallisable, l'essence de térébenthine, l'alcool, la benzine, la liqueur des Hollandais, le chloroforme, l'éther sulfurique, le sulfure de carbone, et sans doute un grand nombre d'autres.

Les liquides qui appartiennent à la troisième catégorie se recouvrent, par l'agitation, d'une mousse volumineuse et très persistante; on les gonfle aisément en bulles à l'orifice d'une pipe; leurs calottes se maintiennent beaucoup plus longtemps que celles des deux catégories précédentes, ordinairement plusieurs heures, quelquefois même plusieurs jours; elles ont d'abord, en général, une phase incolore très notable, dont la durée diffère beaucoup d'un liquide à un autre, puis se teintent graduellement, mais d'une manière qui varie un peu avec les liquides. Ces liquides sont peu nombreux; ils se réduisent, je pense, aux solutions des différents savons, à la solution de saponine et à celle d'albumine; on peut y joindre la solution d'acétate de peroxyde de fer. Je ne parle pas de la solution d'oléate de soude, parce qu'elle doit se placer avec celles des savons, ni du liquide glycérique, dont la propriété de s'étendre aisément en grosses bulles résulte du savon ou de l'oléate de soude qu'il renferme, ni de la décoction de bois de Panama, qui contient de la saponine, ni de quelques autres liquides encore dans la composition desquels entre une substance albuminoïde. Certaines substances solides à la température ordinaire, mais que la chaleur rend liquides, possèdent aussi, sous ce dernier état, la propriété de donner sans peine des bulles de grand diamètre : telles sont le verre, et un mélange de colophane avec de l'huile de lin, comme l'a indiqué M. Böttger¹⁴².

Enfin, on le comprend, les trois catégories ci-dessus ne sont pas tellement tranchées qu'il n'y ait certains liquides formant pour ainsi dire passage de l'une d'elles à une autre : je citerai comme exemples une solution d'une partie de gomme-arabique dans dix parties d'eau, qui participe à la fois de la première et de la troisième catégorie, et une solution convenable de colophane dans l'huile d'olive, qui participe de la deuxième et de la troisième.

§ 246. Avant d'aller plus loin, je vais exposer avec quelques détails les faits particuliers relatifs aux calottes de chacun des liquides que j'ai soumis à l'expérience¹⁴³. Les substances employées étaient, à peu d'exceptions près, telles qu'on les trouve dans le commerce; il eût été inutile pour l'objet de mon travail de chercher à les avoir chim-

¹⁴² *Beiträge zur Physik und Chemie*. Frankfurt a. M., 1838, p. 13.

¹⁴³ Ainsi que je l'ai su depuis, Fusinieri avait fait, en grande partie, ces mêmes expériences (§ 324), mais dans un but tout différent, et pour en tirer des conclusions d'une tout autre nature que les miennes.

iquement pures. Commençons par la première catégorie.

Eau distillée. 1° Dans une atmosphère saturée de sa vapeur. Sur cent calottes successives, quatre-vingt-trois, dont les durées ont varié d'une fraction de seconde à 7'', sont demeurées incolores jusqu'à leur rupture; seize ont montré, après des phases incolores respectives de 1'' à 6'', le système de petits anneaux rouges et verts; parmi ces dernières, les deux qui ont eu les plus longues durées, savoir 11'' et 13'', ont fini par se recouvrir du moiré pâle rouge et vert; dans celle de 11'', le rouge et le vert des petits anneaux ont peu à peu fait place à d'autres teintes; enfin une calotte, dont la durée a été de 10'', a présenté, en approchant de sa rupture, le moiré pâle sans petits anneaux.

2° Dans une atmosphère desséchée au moyen de l'acide sulfurique. Cent calottes, dont les durées ont varié d'une fraction de seconde à 12'', sont restées complètement blanches.

Glycérine de Price, dans une atmosphère desséchée. Cent calottes produites à la manière ordinaire, toutes demeurant incolores, mais ne persistant au maximum que 2''. On en obtient de plus durables en en formant rapidement les unes sous les autres plusieurs petites, qui se confondent en une seule à laquelle on donne sans peine le diamètre requis; quarante calottes ont été engendrées par ce procédé, et, sur l'une d'elles qui a persisté 80'', on a distingué, après 46'', le petit système d'anneaux.

Acide sulfurique, dans une atmosphère desséchée. Cent calottes d'une fraction de seconde à 28'', dont six, de 3'' à 8'', offrent, après des intervalles de 2'' à 5'', le petit système d'anneaux; dans l'une de celles-ci, les petits anneaux ont fini par devenir pourpres et bleus.

Acide azotique, dans une atmosphère saturée de sa vapeur. Cent calottes d'une fraction de seconde à 1'', toutes demeurant incolores.

Ammoniaque, dans une atmosphère saturée de sa vapeur. Cent calottes d'une fraction de seconde à 4'', toutes demeurant incolores.

Solution saturée d'acide tartrique, dans une atmosphère saturée de vapeur d'eau. Quatre-vingt-dix calottes d'une fraction de seconde à 142'', toutes demeurant incolores.

*Solutions saturée d'azotate de potasse*¹⁴⁴, dans une atmosphère saturée de vapeur d'eau. Cent calottes d'une fraction de seconde à 6'', toutes demeurant incolores.

*Solution, saturée de carbonate de soude*¹⁴⁵. 1° Dans une atmosphère saturée de vapeur d'eau. Cent calottes d'une fraction de seconde à 26'', dont cinq avec le petit système d'anneaux après les intervalles de 3'' à 9''.

2° Dans une atmosphère desséchée par du chlorure de calcium. Cent calottes d'une fraction de seconde à 30'', une de 58'', toutes demeurant incolores.

Solution, saturée de chlorure de calcium. Comme ce liquide ne tendait probablement ni à émettre, ni à absorber de vapeur aqueuse, on l'essaie en laissant le bocal ouvert. Soixante-dix calottes de 1'' à 229'', dont cinq de 116'' à 229'', ont montré, après des intervalles de 100'' à 150'', le moiré pâle rose et sans le petit système d'anneaux; les durées de celles qui sont demeurées incolores, ont été de 1'' à 148''.

Je dois dire ici que, pour quelques-uns de ces liquides, pour l'acide sulfurique, par exemple, les calottes beaucoup moindres, comme de 3mm à 4mm, persistant souvent beaucoup plus longtemps, finissent par se colorer.

§ 247. Agissons de même à l'égard de la deuxième catégorie.

Huile d'olive, dans le bocal ouvert. Les calottes persistent, au maximum, 0'',7; toutes, après un intervalle si court que l'existence en est douteuse, manifestent des couleurs : on voit descendre jusqu'à la base, et très rapidement, des anneaux rouges

¹⁴⁴ Le sel avait été purifié par une seconde cristallisation.

¹⁴⁵ Même observation.

et verts suivis d'anneaux bleus et pourpres, puis d'un anneau orangé, puis d'un jaune, lequel laisse dans son intérieur un espace blanc; cet espace se fonce, devient d'un gris bleuâtre, et envahit presque toute la calotte; enfin le sommet s'assombrit encore, et la calotte éclate. Les teintes sont donc rangées de manière à indiquer une épaisseur décroissante de la base au sommet des calottes, disposition que nous nommerons directe.

Huile d'amande douce, dans le bocal ouvert. Durée maxima 0'',2; phénomènes analogues, mais plus difficiles à observer, à cause du peu de persistance; on peut cependant s'assurer que les teintes sont également directes.

Acide lactique. Ce liquide absorbant l'humidité de l'air, on l'essaie dans une atmosphère desséchée par du chlorure de calcium. Durée de 1'' à 18''; après un intervalle très court, mais appréciable, phénomènes analogues à ceux de l'huile d'olive; seulement le temps de la descente des anneaux est de 1'' à 2'', après quoi la calotte entière est blanche, puis passe au gris légèrement bleuâtre en commençant par le sommet, etc.; les teintes ont donc encore la disposition directe.

Le même liquide essayé dans le bocal ouvert, n'a donné que des calottes de 0'',6 au maximum, et toutes ont montré les teintes dans la disposition inverse¹⁴⁶, d'où il suit que dans ces calottes, l'épaisseur allait en croissant de la base au sommet.

Acide acétique cristallisable. 1° Dans une atmosphère saturée de sa vapeur, procédé des secousses dans un flacon. Durée maxima 0'',8; toutes les calottes, après une phase blanche très courte, se montrent colorées, la plupart en anneaux horizontaux, et offrant les teintes directes.

2° Dans le bocal ouvert. Durée d'une fraction de seconde à 2'; phase incolore extrêmement courte, puis subitement teintes inverses nettement accusées, depuis le blanc du premier ordre à la base, jusqu'au rouge et au vert des derniers ordres au sommet; ces teintes persistent sans se modifier, et sans descendre ni monter; seulement les anneaux supérieurs éprouvent des trépidations.

Essence de térébenthine. 1° Procédé des secousses dans un flacon. Durée d'une fraction de seconde à 6''; toutes les calottes sont colorées dès leur formation, et, dans presque toutes celles où la disposition est régulière, les teintes sont directes et descendent très vite; dans quelques-unes on a observé le gris bleuâtre sur toute la surface, parfois seul, parfois succédant à la descente d'autres couleurs; sur un grand nombre, une seule a présenté la disposition inverse.

2° Dans le bocal ouvert. Durée de 12'' à 4'; dès l'instant de la formation, teintes inverses, comme pour les acides lactique et acétique dans les mêmes circonstances; mais, après un temps qui varie de 4'' à 30'', on voit se produire un phénomène singulier: tout le système d'anneaux se relève rapidement d'un côté en s'abaissant de l'autre, de façon à ne plus constituer que des demi-anneaux verticaux, ayant leur centre commun au niveau du liquide; en même temps les anneaux colorés les plus éloignés de ce centre se resserrent de telle sorte que leur système occupe moins de la moitié de la calotte, dont tout le reste est alors blanc du premier ordre, et les choses demeurent en cet état jusqu'à la rupture.

Alcool. 1° Procédé des secousses dans un flacon. Durée maxima 1'',3; toutes les calottes sont colorées, après une phase blanche très courte; dans celles à anneaux horizontaux, les teintes sont directes.

2° Dans le bocal ouvert. Durée d'une fraction de seconde à 10''; après une phase

¹⁴⁶ Ce liquide, tel qu'il m'avait été fourni, était peu visqueux, et devait conséquemment renfermer de l'eau; on l'a concentré en le chauffant au bain-marie pendant plusieurs heures.

incolorer extrêmement courte, teintes inverses subites, et ne changeant pas, comme pour les trois liquides précédents dans la même condition.

*Benzine*¹⁴⁷ et *liqueur des Hollandais*. 1° Procédé des secousses dans un flacon. Pour chacun de ces deux liquides, durée maxima 1''; après une phase blanche plus longue, et quelquefois beaucoup, que la phase colorée, la plupart des calottes offrent des anneaux, et les teintes de ces derniers sont presque toujours directes.

2° Dans le bocal ouvert. Toutes les calottes sont incolores; pour la benzine, elles éclatent à l'instant ou presque à l'instant de leur formation, et, pour la liqueur des 1 elles ont une durée maxima de 0'',6.

Chloroforme et éther sulfurique. 1° Procédé des secousses dans un flacon. Durée maxima 1''; presque toutes incolores, les régulièrement colorées extrêmement rares, et offrant tantôt la disposition directe, tantôt la disposition inverse; phase blanche plus longue que la phase colorée.

2° Dans le bocal ouvert. Toutes incolores; pour le chloroforme, éclatant à l'instant de leur formation; pour l'éther, persistant au maximum 0'',4.

Sulfure de carbone. On n'obtient jamais de couleurs, du moins aux températures ordinaires. Dans le flacon, la durée maxima est de 0'',8; dans le bocal ouvert, toutes les calottes éclatent à l'instant de leur formation.

On comprendra nettement plus loin pourquoi, malgré l'absence de coloration, j'ai rangé ce liquide dans la deuxième catégorie. On voit, d'ailleurs, qu'il appartient à celle-ci par la courte persistance; dans le bocal ouvert, il se comporte comme le chloroforme, et l'on admettra sans peine que, dans le flacon, l'absence des couleurs tient au peu de durée des calottes, qui éclatent avant la fin de la petite phase blanche.

§ 248. Passons à la troisième catégorie.

*Solution de savon de Marseille*¹⁴⁸, dans une atmosphère saturée de vapeur d'eau. Les calottes demeurent d'abord incolores pendant un intervalle de 6'' à 20'', puis se recouvrent d'un moiré extrêmement pâle rouge et vert, qu'on voit quelquefois naître au sommet; ce moiré se fonce, et alors on reconnaît qu'il est formé de trois larges zones, dans chacune desquelles l'une des deux couleurs domine sous la forme de têtards; ceux-ci ont un mouvement ascensionnel, et changent de teinte en passant d'une zone à une autre; les couleurs dominantes des zones, toujours dues à des têtards qui montent, varient ensuite, et indiquent la disposition directe. Après un temps de 3' à 20' à partir de la formation de la calotte, on voit apparaître, au sommet, une petite tache noire qui s'entoure de blanc, grandit très lentement et finit, après un intervalle d'une demi-heure à deux heures, par envahir toute la calotte; celle-ci persiste alors en cet état, et sa durée totale est de plusieurs heures; des calottes ont persisté au delà de vingt-quatre heures, avec une particularité dont nous parlerons plus loin.

Dans le bocal toujours fermé, mais sans eau au fond ni sur les parois, les calottes ne durent que 4' à 5', et la tache noire n'atteint, au maximum, que 5mm de diamètre.

*Solution de savon mou de ménage*¹⁴⁹, dans une atmosphère saturée de vapeur d'eau.

¹⁴⁷ C'était de la benzine à fort peu près pure, préparée par M. Donny.

¹⁴⁸ Ce liquide a été préparé en dissolvant, à une chaleur modérée, une partie de savon dans 40 parties d'eau distillée, filtrant la solution après refroidissement, et la reversant dans le filtre jusqu'à ce qu'on l'obtient limpide, il faut l'employer le jour même de sa préparation; dès le lendemain, elle est déjà plus ou moins altérée.

¹⁴⁹ Elle a été préparée comme celle de savon de Marseille, avec cette différence qu'elle contenait une partie de savon pour 30 parties d'eau; j'ai cru nécessaire d'employer cette proportion un peu plus forte, à cause de la grande humidité du savon mou.

Ce savon, de qualité très inférieure, étant sans doute assez impur, la solution, bien que rendue parfaitement limpide par filtration, ne tarde pas à se ternir à sa surface, où vient probablement se rassembler quelque substance étrangère; il faut donc, avant de s'en servir, en enlever les couches supérieures au moyen d'une

Phase incolore de 5'' à 14''; les phénomènes ultérieurs n'ont été suivis que sur une seule calotte; elle s'est d'abord comportée sensiblement comme celles de savon de Marseille, jusqu'à ce qu'elle fût devenue entièrement noire; mais, en l'observant une heure et demie plus tard, on a constaté avec surprise qu'elle était de nouveau incolore, avec quelques points jaunes, et n'offrait plus qu'une tache noire très petite. Elle a éclaté peu de temps après, et avait persisté au delà de trois heures.

*Solution de savon de colophane à base de potasse*¹⁵⁰, dans une atmosphère saturée de vapeur d'eau. Les calottes présentent une particularité exceptionnelle dans cette catégorie elles n'ont pas de phase incolore; dès leur apparition, elles sont couvertes d'anneaux rouges et verts qui, peu de temps après, se transforment en un moiré général des mêmes couleurs; un peu plus tard, ce moiré prend d'autres nuances, ou fait place à une teinte uniforme vert jaunâtre pointillée de bleu. Sur plusieurs calottes, 10' à 30' après leur formation, une tache noire apparaît au sommet, grandit assez rapidement, et envahit la totalité ou la presque totalité de la calotte. Durée maxima une heure.

*Solution de saponine*¹⁵¹, idem. Phase incolore de 25' à 40', puis apparition d'un moiré général rouge et vert, dans lequel on voit quelquefois, plus tard, un peu de pourpre et de bleu. Durée maxima douze heures.

*Solution d'albumine*¹⁵², idem. Phase incolore de plusieurs heures, puis apparition d'un moiré général rouge et vert. La calotte persiste ensuite dans le même état, et sa durée totale peut comprendre plusieurs jours.

Solution d'acétate de peroxyde de fer, idem. La plupart des calottes manifestent un phénomène bizarre : après une phase incolore de 15'' à 30'', on voit naître, à la base de la calotte, des anneaux rouges et verts qui bien tôt se convertissent en un moiré des mêmes couleurs; ce moiré s'étend graduellement à plus ou moins de hauteur, pâlit, et disparaît pour donner lieu à une seconde phase incolore; à celle-ci succède, une demi-heure environ après la formation de la calotte, un nouveau moiré rouge et vert qui se montre partout à la fois, et qui, lorsque la calotte persiste assez longtemps, prend ensuite d'autres teintes. Ces calottes peuvent se maintenir au déjà de vingt-quatre heures. Pour quelques autres, il n'y a qu'une seule phase incolore, mais qui peut

cuiller, ou recueillir, avec un siphon, le liquide sous-jacent.

¹⁵⁰ Ce savon ne se trouvant pas, je pense, dans le commerce, on l'a préparé en dissolvant, à chaud, de la colophane en poudre fine dans une solution de potasse caustique formée d'une partie de potasse solide et de 20 parties d'eau distillée. Pour avoir un liquide neutre, on a continué à ajouter de la colophane jusqu'à ce qu'il on restât un dépôt notable au fond; par le refroidissement, il s'est précipité une quantité considérable de savon non dissous; on a ajouté alors à l'ensemble la moitié de son volume d'eau distillée, on a chauffé de nouveau, puis on a abandonné le mélange à lui-même jusqu'au lendemain, après quoi on a décanté. Ce liquide a donné, avec la pipe, des bulles dont le diamètre maximum était de 18 centimètres.

Je dois dire qu'une nouvelle préparation, effectuée avec un autre échantillon de colophane, m'a donné des résultats différents; la solution, au lieu de laisser déposer, par le refroidissement, du savon non dissous, s'est prise en gelée, et l'addition d'eau y a déterminé un abondant précipité; on a fait disparaître complètement celui-ci en dissolvant dans le liquide quelques petits fragments de potasse; mais, avec la solution ainsi obtenue, le diamètre maximum des bulles n'était que de 12 centimètres. Je me suis donc contenté des essais de calottes faits en employant la première solution.

¹⁵¹ Une partie environ de saponine dans 100 parties d'eau distillée. Je dis environ, parce qu'une circonstance m'a empêché de connaître la proportion exacte. Cette solution donnait, avec la pipe, des bulles de 12 centimètres de diamètre maximum.

Avec d'autres échantillons de saponine, j'ai dû, pour obtenir ces grosses bulles, employer une proportion d'eau un peu moindre. Il faut avoir soin d'amener le liquide, par des filtrations, à l'état de limpidité parfaite; un trouble, même léger, amoindrit considérablement les bulles.

¹⁵² Pour préparer cette solution, on a simplement battu des blancs d'oeufs frais en neige, puis on a attendu que cette neige eût reformé du liquide en quantité suffisante; enfin on a ajouté à celui-ci un dixième de son volume d'eau distillée. Ce mélange donne, avec la pipe, des bulles de 13 centimètres de diamètre maximum.

atteindre une heure.

§ 249. Restent les deux liquides intermédiaires mentionnés à la fin du § 245.

Solution d'une partie de gomme arabique dans 10 parties d'eau. Cette solution ne donne pas de bulles avec la pipe. On a fait, dans une atmosphère saturée de vapeur d'eau, onze calottes, parmi lesquelles sept, dont les durées ont été de 20'' à 60'', sont restées incolores jusqu'à leur rupture; sur deux autres, qui ont duré 1' environ, il y a eu, après une phase incolore de 20'', apparition, au sommet, d'un peu de moiré rouge et vert demeurant dans le même état; mais deux ont persisté respectivement seize heures et vingt et une heures, et se sont couvertes en totalité, après de longues phases incolores, d'un moiré rouge et vert qui, plus tard, a passé au jaune, pourpre et bleu. Enfin ce liquide fournit une mousse assez abondante, et extrêmement durable.

Parmi les calottes, on le voit, la plupart se comportent comme celles de la première catégorie, mais quelques-unes comme celles de la troisième; l'abondance et la persistance de la mousse appartiennent à la troisième catégorie, et la non-formation des bulles à la première.

La solution dont il s'agit constitue l'un des liquides exceptionnels auxquels j'ai fait allusion dans le § 242, comme fournissant une mousse volumineuse et persistante, et ne se laissant cependant pas gonfler en bulles.

*Solution de colophane dans l'huile d'olive*¹⁵³, dans le bocal ouvert. Après une phase incolore très courte, toutes les calottes manifestent des phénomènes de coloration pareils à ceux de l'huile d'olive pure (247), seulement ils sont moins rapides; la durée des calottes est très variable, et peut atteindre 2',5. Ces faits sont de la deuxième catégorie; mais, à l'orifice de la pipe, on obtient des bulles de 3,5 centimètres au maximum, ce qui est une tendance vers la troisième.

Avec plusieurs autres liquides encore, tels que des solutions saturées ou convenablement concentrées de borates neutres de soude et de potasse, de perchlorure de fer, de chlorure d'or, etc., on obtient de petites bulles de 3 à 4 centimètres, et, si l'on examinait ces liquides au point de vue de leurs calottes, on trouverait, sans doute, qu'ils appartiennent aussi à des catégories intermédiaires, ou, tout au moins, qu'ils sont à la limite de l'une des trois catégories principales.

§ 250. Bien que les expériences dont les résultats sont rapportés dans les quatre paragraphes précédents aient été effectuées sur des lames de petites dimensions, elles nous ont révélé des faits remarquables, tels qu'une partie des caractères qui distinguent nos trois catégories, la grande influence des atmosphères dans lesquelles les lames sont produites, etc., et plusieurs de ces faits jettent, on le verra, un grand jour sur la question que j'essaie de résoudre dans ce chapitre.

Considérons une calotte au moment où elle vient d'être développée, et cherchons ce qui doit s'y passer. Nous savons que le liquide, entraîné par la pesanteur, descend de tous les côtés autour du sommet, d'où résulte un amincissement progressif de la lame; mais nous allons examiner de plus près comment s'opère cet amincissement.

Pour simplifier, portons d'abord notre attention sur l'une des deux faces de la lame, sur la face convexe, par exemple, et concevons-la partagée en anneaux moléculaires horizontaux, depuis le sommet jusqu'à la base. Tous ces anneaux descendent, et conséquemment chacun d'eux va en augmentant toujours de diamètre, ce qui exige que ses molécules s'écartent davantage et que d'autres molécules, appartenant à la couche sous-jacente, viennent se loger dans les interstices pour rétablir un arrangement uni-

¹⁵³ On n'a pas mesuré la proportion de colophane; seulement on a constaté qu'elle ne devait pas dépasser une certaine limite, sans doute parce qu'alors le liquide est trop visqueux. La solution a été préparée à chaud, puis, après refroidissement, filtrée à travers un papier suffisamment perméable.

forme. La même chose doit s'entendre de la face concave, et il est clair, en outre, que des mouvements moléculaires analogues se produisent dans l'épaisseur même de la lame. C'est évidemment au sommet et dans son voisinage que les phénomènes dont il s'agit sont le plus prononcés; c'est là que les écarts des molécules sont surtout considérables et que, par suite, l'appel du liquide intérieur est le plus abondant.

Si donc la cause que je viens de signaler agissait seule, l'amincissement serait toujours le plus rapide au sommet et dans ses environs, et la lame présenterait toujours une épaisseur décroissante à partir de la base. Mais, ainsi que je l'ai déjà fait remarquer (§ 109), ces inégalités d'épaisseur donnent elles-mêmes naissance à une seconde cause, qui tend à les effacer, ou au moins à les diminuer; en effet, les portions plus épaisses étant plus pesantes, surmontent plus aisément les résistances de frottement qui s'opposent à leur descente, et celle-ci doit conséquemment être accélérée du sommet à la base; or, par suite de cette accélération, les molécules vont en s'écartant de plus en plus dans le sens méridien, à partir du sommet, d'où résulte un appel de liquide intérieur de plus en plus abondant jusqu'à la base, et l'accroissement de ce dernier appel doit compenser, en tout ou en partie, le décroissement de celui qui provient de la première cause.

Enfin une dernière cause s'ajoute à la seconde: c'est que, plus on se rapproche de la base, plus est rapide la pente sur laquelle glisse le liquide. Si la première des trois causes prédomine, la lame présentera nécessairement une épaisseur décroissante de la base au sommet; s'il arrive que cette première cause soit contre-balancée par l'ensemble des deux autres, l'épaisseur de la lame deviendra uniforme, et continuera ensuite à s'amoinrir également partout; enfin si l'ensemble des deux dernières causes l'emporte, l'épaisseur sera croissante de la base au sommet; or nous avons vu ces trois cas se réaliser :

En effet, quand on opérât dans des conditions convenables, le premier s'est montré, immédiatement ou peu de temps après le développement de la lame, dans les calottes de tous les liquides de la deuxième catégorie, sauf, bien entendu, celles de sulfure de carbone; il s'est montré sans doute aussi dans celles de savon de colophane, quoiqu'on n'ait pu le déduire nettement des teintes des anneaux; enfin il s'est montré encore, après la longue phase blanche, dans les calottes de savon de Marseille. Le phénomène se produit probablement, dans les autres calottes de la troisième catégorie, pendant la phase blanche, et dans toutes celles de la première; mais l'absence de couleurs ne permet pas d'en acquérir la certitude.

Le second cas a suivi le premier dans les calottes d'huile d'olive, d'huile d'amande douce, et dans celles d'acide lactique formées au sein d'une atmosphère desséchée, puisque, en approchant de la rupture, la totalité ou la presque totalité de leur surface présentait le blanc du premier ordre ou le gris bleuâtre qui précède le noir. Quelques calottes d'essence de térébenthine ont offert un résultat analogue; dans celles de savon de colophane, le moiré fin rouge et vert qui a succédé aux anneaux peut être regardé comme à peu près équivalent à une teinte uniforme, car la moyenne des épaisseurs des petites portions rouges et vertes juxtaposées est sans doute la même sur toute l'étendue de la calotte; et ceci doit s'entendre, à plus forte raison, du moiré semblable qui apparaît après la phase blanche dans d'autres calottes de la troisième catégorie et dans quelques-unes de celles de la première, moiré qui ordinairement naît partout à la fois.

Enfin le troisième cas est celui des calottes de la deuxième catégorie sur lesquelles les teintes ont pris, dans certaines conditions, la disposition inverse.

§ 251. Insistons un moment sur ce troisième cas. Pour peu qu'on y réfléchisse,

on comprendra que l'accélération de vitesse due à l'excès d'épaisseur des portions inférieures de la lame est tout au plus capable d'effacer cette inégalité, et qu'un décroissement d'épaisseur du sommet à la base, décroissement qui donne l'inversion des teintes, peut être attribué aux variations de la pente; c'est ce qu'appuie, en effet, une expérience simple:

Dans un tube de verre de 1,5 centimètre de diamètre et de 15 de longueur, fermé à une extrémité, on a introduit une petite quantité d'essence de térébenthine; puis, tenant ce tube incliné à environ 45° , on y a produit, par des secousses convenables, une lame transversale, lame conséquemment inclinée aussi, mais qui, étant plane, présentait la même pente du haut jusqu'au bas. La lame ainsi placée ayant sa face inférieure tournée vers le liquide et sa face supérieure vers l'ouverture du tube, se trouvait, à l'égard de l'évaporation, sensiblement dans les mêmes conditions que les calottes du même liquide formées dans le bocal ouvert; or, tandis que ces dernières s'étaient nettement revêtues de teintes inverses (§ 247), la lame plane du tube a, dans tous les essais successifs, montré des teintes directes : au premier moment, ces teintes étaient, en partant de la bande inférieure, le bleu, l'indigo, le violet, l'orangé et le jaune, et celui-ci occupait plus de la moitié de la hauteur de la lame, puis on voyait naître immédiatement, vers le haut, du blanc qui s'étendait rapidement en refoulant les autres teintes, et envahissait la presque totalité de la lame.

§ 252. Les calottes de la deuxième catégorie se colorent, on l'a vu, immédiatement ou après fort peu de temps, sur toute leur surface, et leurs teintes atteignent en un instant, soit au sommet, soit à la base, le jaune ou le blanc du premier ordre, et même quelquefois un gris voisin du noir; d'où il faut conclure que les lames de cette deuxième catégorie s'amincissent avec une extrême vitesse. Pour plusieurs liquides, il est vrai, c'est seulement dans une partie des calottes que l'atténuation est poussé si loin; mais comme, à l'égard de ces liquides, la durée maxima n'excède guère $1''$, on peut admettre que les calottes qui restent blanches sont formées de lames accidentellement plus épaisses, et revêtiraient bientôt toutes les teintes, si elles persistaient un peu plus long temps. C'est, en effet, ce que nous avons observé dans les calottes de benzine, de liqueur des Hollandais, de chloroforme et d'éther, où la phase incolore approchait quelquefois de $1''$. Je reviendrai d'ailleurs sur ce point.

Dans les calottes de la première catégorie, il n'y a jamais, on l'a vu aussi, coloration immédiate ou presque telle; la très majorité restent blanches jusqu'à leur rupture, bien que, pour certains liquides, elles puissent durer au delà de $2'$; sur les rares calottes où l'on observe des phénomènes de coloration, ces phénomènes se réduisent, en général, à un système minime d'anneaux occupant le sommet et conservant ses petites dimensions; enfin, dans le nombre de cas fort restreint où il y a coloration totale, celle-ci ne se montre qu'après plusieurs secondes, quelquefois après deux minutes. Il résulte évidemment de tout cela que les lames de la première catégorie s'amincissent, au contraire, très lentement.

Dans les calottes de la troisième catégorie, il y a également, nous le savons encore, une phase blanche généralement longue, et la coloration qui se manifeste ensuite ne varie jamais avec rapidité. Il suit de là que, dans la troisième catégorie, comme dans la première, l'amincissement des lames est fort lent. A la vérité, par exception, les calottes de la solution de savon de colophane n'ont pas de phase incolore, et sont d'abord couvertes d'anneaux rouges et verts; mais elles peuvent persister une heure, en changeant progressivement d'aspect.

Faut-il attribuer à la viscosité, telle qu'on l'entend, cette grande différence dans la vitesse d'amincissement des lames entre la deuxième catégorie et les deux autres?

Nullement, car les huiles grasses et l'acide lactique, qui appartiennent à la deuxième catégorie, sont des liquides beaucoup plus visqueux que la plupart de ceux de la première et de la troisième; enfin l'essence de térébenthine, de la deuxième également, est plus visqueuse que l'eau, qui est de la première.

Or ce qui caractérise une lame, c'est l'étendue considérable des surfaces relativement au volume; force nous est donc de reconnaître ici une influence des faces de la lame, et de chercher la cause de la grande différence dont il s'agit dans une sorte de viscosité propre des couches superficielles, indépendante, ou à peu près, de la viscosité intérieure, et qui, très faible dans les liquides de la deuxième catégorie, est, au contraire, très forte dans ceux de la première et de la troisième.

Ainsi que je l'ai déjà dit, une opinion du même genre avait été avancée il y a longtemps, et elle a été soutenue depuis par plusieurs physiiciens; j'y reviendrai plus loin (§ 261 à 290), et l'on verra alors ce qui distingue mon principe.

§ 253. Ce principe admis, appliquons-le aux phénomènes. Prenons de nouveau une calotte au moment de sa génération, concevons encore ses deux faces partagées en anneaux moléculaires horizontaux qui descendent en s'élargissant, et considérons en particulier l'un d'eux à son départ du sommet. Il est clair que, pour un petit trajet effectué, les distances entre les molécules de cet anneau s'accroissent considérablement: par exemple, de la position où son diamètre est de 0mm,01 à celle où il est de 0mm, 1, ces distances sont devenues décuples. On admettra, de plus, sans peine que les mouvements dont il s'agit ne s'exécutent pas avec une régularité mathématique, et qu'ainsi, dans un même anneau, les intervalles moléculaires ne demeurent pas absolument égaux entre eux. Cela posé, imaginons que quelque cause mette obstacle à la libre arrivée des molécules sous-jacentes dans les interstices; l'un ou l'autre de ceux-ci deviendra bientôt assez grand pour que l'attraction des molécules qu'il sépare ne puisse plus contrebalancer la tension; alors ces molécules entraîneront aisément leurs voisines plus intérieures, qui, elles aussi, subissent des écartements, la séparation s'approfondira de proche en proche, et la lame se déchirera en ce point. Or, dans les calottes de la première catégorie, les couches superficielles ont, d'après mon principe, une très forte viscosité, les mouvements moléculaires y sont difficiles, et l'on comprend dès lors que, très près du sommet de l'une ou de l'autre des faces, un intervalle moléculaire agrandi peut n'avoir pas le temps d'être comblé avant que la tension, si elle est assez énergique, y détermine le déchirement ci-dessus. Telle est, selon moi, l'explication de la rupture de presque toutes les calottes de la première catégorie avant qu'on distingue sur elles aucune coloration.

Mais, on le comprend aussi, ce déchirement peut ne pas être complet; il peut ne provoquer qu'une atténuation locale, autour de laquelle les molécules prendront un arrangement régulier; on aura alors le système de petits anneaux au sommet. Ce système doit donc apparaître brusquement, ce qui est conforme à l'expérience, et il doit conserver ensuite sensiblement ses dimensions, la cause qui l'a fait naître ayant produit tout son effet, ce qui est également conforme à l'expérience. Mais rien n'empêche évidemment le reste de la lame de continuer à s'amincir par degrés, et, en effet, deux de nos calottes d'eau distillée qui avaient le petit système en question, ont offert, peu avant leur rupture, le moiré général.

Quant à la rupture définitive en présence de ce petit système, elle provient de ce que la portion exigüe de lame qui occupe le centre de celui-ci s'amincit ultérieurement et éprouve ainsi elle-même un déchirement qui, cette fois, est complet par suite de la minceur; ou bien de ce que la lamelle dont il s'agit s'atténue à tel point qu'elle ne peut plus résister aux trépidations venues de l'extérieur.

Si ces idées sont exactes, toute cause qui tendra à imprimer des mouvements irréguliers aux molécules des faces de la lame, devra favoriser le déchirement; or c'est ce que confirme une expérience curieuse si l'on produit les calottes d'eau distillée dans une atmosphère saturée de vapeur d'alcool, vapeur dont l'absorption par la surface extérieure des lames doit nécessairement y occasionner des mouvements désordonnés, toutes éclatent à l'instant in de leur formation.

Mais pourquoi les calottes d'eau ne présentent-elles jamais le petit système d'anneaux quand on les développe dans une atmosphère desséchée? C'est que, sans doute, lorsqu'un déchirement tend à se produire avec assez peu de force pour ne donner lieu qu'à ce petit système, les molécules extérieures dont l'écartement aurait amené le déchirement partiel, sont enlevées par l'évaporation avant que le phénomène ait pu progresser; dans ce cas donc, les déchirements assez énergiques pour briser la lame sont les seuls qui s'accompliront.

Enfin comment se fait-il que les calottes d'eau, qui ont persisté aussi longtemps dans une atmosphère desséchée que dans une atmosphère humide, n'aient jamais, dans la première, présenté le moiré général, bien que l'évaporation dût, semble-t-il, activer l'amincissement? Essayons de rendre raison de cette singularité. Chacune des deux couches superficielles ayant l'une de ses faces libre dans l'air, les molécules qui occupent cette face éprouvent beaucoup moins de résistance dans leurs mouvements que celles plus profondément situées dans la même couche; ces molécules doivent conséquemment descendre avec moins de lenteur, et communiquer une partie de leur petit excès de vitesse aux molécules sous-jacentes; dès lors l'évaporation, en enlevant incessamment les molécules de la face extérieure de la calotte, empêche cette communication de vitesse, et retarde ainsi la descente. Si donc l'évaporation tend à accélérer l'amincissement en soustrayant de la matière à la lame, elle tend en même temps à le ralentir en ralentissant la descente, et l'on comprend que le second effet peut l'emporter sur le premier. Nous verrons bientôt cette conjecture appuyée.

On voit maintenant pourquoi il est impossible de gonfler des bulles avec les liquides de la première catégorie : c'est que la lame ne peut s'étendre sous l'action du souffle sans que les molécules de ses deux faces s'écartent continuellement pour appeler dans leurs interstices des molécules plus intérieures, ce qui donne lieu à des chances multipliées de déchirement.

Souvent même la lame plane qu'on puise avec l'orifice de la pipe, éclate avant qu'on ait eu le temps de commencer à souffler. C'est que cette lame est attachée au pourtour de l'orifice par l'intermédiaire d'une petite masse à courbures transversales concaves extrêmement fortes, et que celle-ci, en vertu de ces fortes courbures, attire puissamment à elle le liquide de la lame (§ 219); or de là résultent, surtout dans le voisinage du pourtour, de grands mouvements moléculaires qui, à cause encore de la liberté relative des molécules des deux faces extrêmes, déterminent, dans ces dernières, des écarts considérables avec appel du liquide intérieur.

Enfin c'est par la même raison que les liquides dont il s'agit ne donnent jamais de mousse abondante et persistante; chacune des lamelles dont l'ensemble compose la mousse étant également attachée aux lamelles environnantes par l'intermédiaire de petites masses à très fortes courbures concaves.

§ 254. Dans les lames de la deuxième catégorie, les déchirements par les causes que j'ai signalées doivent être infiniment plus rares; ici, en effet, d'après mon principe, la mobilité moléculaire des couches superficielles est très grande, et conséquemment il y a peu d'obstacle à l'arrivée des molécules intérieures dans les interstices agrandis des extérieures. Aussi avons-nous vu les lames de cette catégorie atteindre rapidement une

extrême ténuité, soit dans toute l'étendue d'une même calotte, soit surtout au sommet ou à la base. Si les lames se brisent ensuite, c'est sans doute sous l'influence des petites vibrations propagées par le sol, et l'on comprend que les lames des différents liquides doivent résister inégalement à cette cause accidentelle de rupture; ainsi, tandis que les calottes d'huile d'amande douce ne persistent au maximum que 0'',2, celles d'acide lactique peuvent durer 18'', et celles d'essence de térébenthine 6'' dans le flacon, et jusqu'à 4' dans le bocal ouvert.

Cette atténuation si rapide nous apprend pourquoi l'on ne parvient pas non plus à gonfler des bulles avec les liquides dont il s'agit: quand on a puisé une lame plane dans l'orifice de la pipe, la succion opérée par la petite masse qui règne le long du pourtour, et la descente du liquide due à ce qu'on ne tient pas l'orifice parfaitement horizontal, rendent presque instantanément cette lame si mince, qu'elle éclate souvent par les petits mouvements inévitables de la main avant qu'on ait pu porter le tube à la bouche; et lorsque cela n'arrive pas, l'extension naissante de la lame par l'insufflation, et la descente du liquide vers le point le plus bas, amènent bientôt le même effet. Ces considérations s'appliquent également à la mousse.

Cependant on conçoit qu'il peut y avoir des liquides à couches superficielles très mobiles, mais tels que leurs lames, même fort atténuées, aient encore assez de cohésion pour résister plus ou moins aux causes de rupture ci-dessus; ces liquides se laisseront gonfler en bulles de quelques centimètres de diamètre, et c'est que dont la solution de colophane dans l'huile d'olive nous a offert un exemple (§ 249).

§ 255. Le phénomène de l'inversion des teintes est également lié au peu de viscosité des couches superficielles, puisqu'il ne se manifeste qu'avec les liquides de la deuxième catégorie; et, en effet, pour que l'amincissement puisse s'opérer plus vite dans le bas d'une calotte que dans le haut, il faut que la portion inférieure de l'une au moins des deux couches superficielles n'entraîne pas la portion supérieure, il faut qu'il y ait une sorte d'indépendance entre ces deux portions, indépendance qui exige évidemment une grande mobilité moléculaire dans les couches en question. On comprend, de plus, que les causes qui peuvent apporter du trouble dans les molécules superficielles, favoriseront cette indépendance en dérangeant la liaison des différents points d'une même couche; c'est ainsi que l'absorption de l'humidité dans les calottes d'acide lactique, et l'évaporation dans celles d'acide acétique, d'essence de térébenthine et d'alcool, déterminent l'inversion des teintes.

Je ferai remarquer ici que ces causes de trouble provoquent encore le phénomène de l'inversion lors même qu'elles sont extrêmement peu intenses par exemple, on a produit des calottes d'acide acétique et d'essence de térébenthine dans le bocal fermé, en employant toutes les précautions indiquées au § 244; pour l'essence de térébenthine, on avait même introduit dans le bas du tube de la ouate imbibée du même liquide, afin de saturer l'air amené par le souffle; dans ces circonstances, l'atmosphère intérieure devait être à fort peu près saturée, de sorte que l'évaporation était nécessairement bien faible, et cependant les teintes ont été nettement inverses. Dans ces mêmes conditions, les calottes d'acide acétique les moins durables n'avaient que du rouge et du vert à la base, ce qui montre bien que le développement des teintes inverses provient de ce que le bas de la lame commence par s'amincir plus vite que le haut.

Mais l'amincissement d'abord si rapide dans le bas, ne doit pas tarder à se ralentir, par la diminution même de l'épaisseur de cette portion de la lame, et bientôt la perte qu'éprouve cette même portion par la descente de son liquide et par l'évaporation, doit se trouver exactement compensée par le liquide qui arrive dès portions supérieures; à partir de ce moment, les anneaux inférieurs doivent donc paraître stationnaires dans

leurs teintes et dans leurs positions, ce que nous avons effectivement constaté, on l'a vu, dans les calottes qui persistent assez longtemps.

J'ai essayé (253) de faire comprendre que l'évaporation pouvait ralentir l'amincissement; or c'est ce que confirment nos expériences sur les calottes à teintes inverses j'ai dit, plus haut, que l'acide acétique et l'essence de térébenthine donnaient encore de semblables calottes dans une atmosphère à très peu près saturée et lorsque, par conséquent, l'évaporation était considérablement réduite; or les durées maxima respectives ont été alors 0",4 et 2', tandis que, dans le bocal ouvert, c'est-à-dire avec une évaporation libre, les durées maxima respectives se sont élevées à 2' et à 4'.

Quant à la chute latérale du système des anneaux dans les calottes à teintes inverses d'essence de térébenthine, on peut, je pense, l'expliquer en assimilant ce qu'il y a d'excédant en épaisseur dans la portion supérieure de la calotte, à une seconde calotte de moindre base posée sur la première; cette seconde calotte se trouve, en effet, dans un état d'équilibre instable, et les petites causes étrangères doivent la faire glisser de côté. Seulement il est singulier que les calottes d'alcool produites dans le bocal ouvert, calottes qui, nous le savons, ont aussi les teintes inverses et persistent assez longtemps, ne sentent pas le même phénomène.

§ 256. Disons ici que M. Van der Mensbrugge me propose une explication de l'inversion des teintes toute différente de celle que j'ai avancée dans les paragraphes précédents. L'expérience du § 172 montre qu'il suffit d'une variation excessivement minime dans la température, et conséquemment dans la tension d'une partie d'une lame liquide pour amener des changements très notables dans la distribution des teintes; or M. Van der Mensbrugge suppose que, dans les calottes de la deuxième catégorie formées de liquides volatils au sein d'une atmosphère non saturée, l'évaporation est, par une cause quelconque, un peu plus abondante au sommet qu'à la base; de là, dans le haut de la calotte, un refroidissement un peu plus grand, et, par suite, une petite augmentation de tension, d'où résulte un appel du liquide de la partie inférieure, et une épaisseur croissante de bas en haut. On se rendrait ainsi nettement raison du maintien des teintes dans leurs positions respectives, de la durée plus grande de la calotte lorsque les teintes sont inverses que lorsqu'elles sont directes, de la non-inversion des teintes dans une atmosphère saturée de la vapeur du liquide, et enfin des courants ascendants partant de la base et qui ont été observés par Fusinieri (§ 324). L'acide lactique, qui n'est pas volatil, a donné aussi, il est vrai, des calottes à teintes inverses; mais ce liquide absorbe l'humidité de l'air, et si l'on admet que cette absorption est quelque peu plus active dans le haut de la calotte, on comprendra qu'il doit en résulter aussi une augmentation de tension.

Cette théorie est ingénieuse, mais elle devrait être appuyée par de nouvelles expériences: il faudrait montrer l'origine de la différence d'évaporation ou d'absorption au sommet et à la base; en outre, si l'on songe que l'inversion des teintes se manifeste encore dans une atmosphère presque complètement saturée, on aura peine à concevoir que l'excès de tension pour ainsi dire insensible qui pourrait naître dans ce cas, suffise pour surmonter l'action de la pesanteur sur le liquide de la calotte; enfin, après la chute latérale des anneaux dans les calottes d'essence de térébenthine, l'excès d'évaporation au sommet devrait les y ramener; Fusinieri a observé, à la vérité, de semblables retours, mais ils auraient dû se produire également dans mes expériences.

D'autre part, suivant ma théorie, du liquide descend continuellement de la partie supérieure de la calotte pour réparer la perte que subirait la partie inférieure; si donc Fusinieri ne s'est pas trompé, si les courants ascendants ont bien réellement lieu, ils constituent une objection sérieuse contre mon explication; enfin celle-ci ne mon-

tre pas bien comment, dans une calotte qui persiste quelquefois plusieurs minutes, l'évaporation ne finit pas par, amincir sensiblement la lame, et laisse ainsi les teintes inverses invariables jusqu'à la rupture. Des recherches ultérieures éclairciront sans doute ces difficultés.

§ 257. Un fait plus obscur que l'inversion des teintes, c'est la rupture spontanée, avant la fin de la phase blanche, de la grande majorité des calottes de chloroforme et d'éther, et de toutes celles de sulfure de carbone. Ce phénomène paraît dépendre non de l'évaporation elle-même, puisqu'il se produit dans l'atmosphère aussi saturée que possible du flacon, mais plutôt de la grande tendance des liquides ci-dessus à s'évaporer. En effet, si l'on range tous nos liquides volatils de la deuxième catégorie d'après l'ordre croissant de leurs volatilités respectives, on a, la série suivante : 1° l'acide acétique et l'essence de térébenthine; 2° l'alcool; 3° la benzine et la liqueur des Hollandais; 4° le chloroforme; 5° l'éther; 6° le sulfure de carbone¹⁵⁴; or nous avons vu que, dans le flacon 10 toutes les calottes d'acide acétique, d'essence de térébenthine et d'alcool se sont colorées soit sans phase blanche, soit après une phase blanche très courte; 2° toutes celles de benzine et de liqueur des Hollandais se sont de même colorées, mais après une phase blanche qui approchait quelquefois de 1" et ne laissait alors à la phase colorée que la durée d'un éclair; 3° presque toutes celles de chloroforme et d'éther ont éclaté sans couleurs; 4° toutes celles de sulfure de carbone ont éclaté de cette manière; d'où l'on peut inférer que la disposition à éclater pendant la phase blanche croît avec la disposition à s'évaporer.

L'alcool employé dans ces expériences était l'alcool du commerce; j'ai voulu savoir ce que donnerait l'alcool absolu, qui se place, quant à sa volatilité, entre le précédent et le couple benzine et liqueur des Hollandais; or dans le flacon, beaucoup de ses calottes éclatent incolores; il se trouve donc, sous ce point de vue, entre le couple ci-dessus et le couple chloroforme et éther, et constitue ainsi une légère anomalie; mais je ne pense pas que celle-ci suffise pour empêcher d'admettre d'une manière générale l'influence de la volatilité.

Maintenant comment la simple tendance à se volatiliser peut-elle occasionner la rupture? N'est-il pas permis de croire que si, dans une atmosphère libre, les liquides en question perdent avec tant de facilité leurs molécules superficielles par l'évaporation, c'est que ces molécules ont fort peu de cohérence entre elles? Dans cette hypothèse, on comprend qu'il faut peu de chose pour amener un déchirement malgré la mobilité des couches superficielles; alors aussi une cause de trouble dans les molécules extérieures, l'évaporation, par exemple, favorisera ce déchirement, et nous avons vu, en effet, que, dans le bocal ouvert, les calottes de benzine, de liqueur des Hollandais, de chloroforme, d'éther et de sulfure de carbone éclatent à l'instant de leur formation, ou persistent à peine au delà d'une demi-seconde.

Enfin je me suis dit que si la volatilité exerçait réellement une influence si prononcée sur les calottes de ces liquides, les phénomènes qu'elles présentent devaient se modifier si l'on diminuait la volatilité par un grand abaissement de la température. Or c'est ce que l'expérience a confirmé : des flacons renfermant respectivement du chloroforme, de l'éther et du sulfure de carbone ont été exposés pendant deux heures à l'extérieur, par une température de -4° , puis on y a fait, toujours à l'extérieur, l'essai des calottes. Dans ces conditions, les durées n'ont augmenté qu'un peu, mais les calottes colorées de chloroforme et d'éther ont été bien plus fréquentes, et le sulfure

¹⁵⁴ Pour comparer sous ce point de vue les liquides dont il s'agit, on en a rempli exactement une suite de verres de montre identiques placés à distance les uns des autres sur l'appui extérieur d'une fenêtre au Nord, par une température de 18° , et on les a observés de temps en temps afin de constater leurs diminutions respectives.

de carbone a donné un assez grand nombre de calottes vivement teintées; enfin les phases blanches précédant les couleurs se sont de beaucoup raccourcies. Ce dernier fait paraît indiquer que, même dans le flacon où l'on a pris toutes les précautions pour saturer l'atmosphère intérieure, la saturation n'est pas absolument complète, de sorte que les calottes subissent toujours une minime évaporation; dès lors, en effet, on comprend qu'une température très basse amoindrissant encore ce petit reste d'évaporation, accélère un peu l'amincissement, et, par suite, raccourcit la phase blanche.

On voit actuellement que le sulfure de carbone, qui, aux températures ordinaires, ne manifeste jamais de coloration, devait cependant être placé, comme je l'ai fait, dans la deuxième catégorie. Ajoutons que s'il donne avec tant de difficulté des lames colorées, cela doit tenir, en partie, à la valeur élevée de son indice de réfraction; en effet, d'après la loi connue, il suit de cette valeur élevée que l'apparition des couleurs exige, dans les lames de sulfure de carbone, une ténuité plus grande que dans celles de tous les autres liquides.

§ 258. Arrivons enfin à la troisième catégorie, c'est-à-dire à la plus importante, à celle des liquides qui se laissent gonfler en bulles. Ici, comme dans la première catégorie, les couches superficielles ont peu de mobilité moléculaire, et l'amincissement s'effectue avec lenteur; mais les déchirements sont rares, puisque, malgré la descente du liquide et l'action du souffle, les lames persistent et peuvent recevoir une grande extension. Si l'on admet les idées exposées au § 253, on en conclura que, dans les liquides de la catégorie actuelle, la tension est insuffisante pour produire les déchirements, et c'est ce que vient appuyer la comparaison des tensions respectives de l'eau et de notre solution de savon de Marseille la tension d'une lame d'eau à la température ordinaire, est, d'après Dupré, 14,6, et celle d'une lame de la solution de savon n'est, d'après le même savant, qui a bien voulu la déterminer pour moi, que 5,64, c'est-à-dire entre la moitié et le tiers de la précédente.

Cependant pour qu'un liquide puisse s'étendre en bulles, il n'est pas indispensable que sa tension soit faible d'une manière absolue; il suffit qu'elle le soit relativement à la viscosité des couches superficielles, ou, en d'autres termes, que le rapport entre la viscosité superficielle et la tension soit assez grand. Par exemple, les tensions respectives des lames de la solution saturée de chlorure de calcium et de la solution d'albumine, tensions mesurées par M. Van der Mensbrugge¹⁵⁵, sont 11,06 et 11,42, c'est-à-dire à peu près égales et toutes deux assez fortes, et pourtant le premier de ces liquides ne donne pas de bulles, et, avec le second, on en obtient qui atteignent 13 centimètres de diamètre; mais comme, dans les calottes de chlorure de calcium qui se

¹⁵⁵ La plupart des tensions dont nous aurons à faire usage ont été évaluées par M. Van der Mensbrugge, au moyen de deux procédés différents: le premier revient à celui de l'aréomètre de Dupré (§ 161); le second, qui est dû à M. Van der Mensbrugge, présente cet avantage qu'il permet d'opérer sur une quantité extrêmement petite de liquide; voici en quoi il consiste essentiellement:

Un fil fin de coton est tendu horizontalement entre deux points fixes distants d'environ 12 centimètres. D'autre part, un tube en verre d'un décimètre de longueur et de 1mm à peu près de diamètre extérieur, est garni, près de chacune de ses extrémités, d'un petit anneau en fil de fer mince, et soutient, par un fil de coton attaché en son milieu, un petit plateau en papier. Pour mesurer une tension, on mouille d'abord du liquide à essayer le fil horizontal, puis on transporte le tube sous celui-ci, de manière à le toucher par les deux petits anneaux; entre ce tube et le fil horizontal règne ainsi un espace étroit, qu'on remplit du même liquide avec un pinceau; après quoi on abandonne le tube, qui demeure suspendu par la tension des deux faces de la petite masse liquide. On verse alors doucement du sable fin sur le petit plateau, jusqu'à ce que le tube se détache. Enfin on pèse l'ensemble du tube, du plateau et du sable, et l'on divise le poids, exprimé en milligrammes, par la longueur comprise entre les deux petits anneaux; le quotient est la valeur, en milligrammes, de la tension, par millimètre, d'une lame du liquide.

M. Van der Mensbrugge a mesuré plusieurs tensions par les deux procédés successivement, et toujours les résultats se sont trouvés sensiblement d'accord.

sont moirées (§ 246), la phase incolore n'a été, au maximum, que de 150'', et que, dans celles d'albumine (§ 248), elle a été de plusieurs heures, on voit que la viscosité superficielle de ce dernier liquide doit être regardée comme de beaucoup supérieure à celle du premier, et qu'ainsi le rapport entre cette viscosité et la tension est aussi beaucoup plus grand à l'égard du second liquide qu'à l'égard du premier.

Si l'on compare de même, au point de vue de leurs tensions et des viscosités propres de leurs couches superficielles, la solution de savon et celle d'albumine, les valeurs ci-dessus montrent que la tension des lames de la seconde est double de celle des lames de la première; mais, dans les calottes de savon, la phase incolore n'est, au maximum, que de 20'', tandis que, dans celles d'albumine, elle est, comme je viens de le rappeler, de plusieurs heures; ainsi, en passant du premier liquide au second, la tension et la viscosité des couches superficielles augmentent toutes deux considérablement, de sorte que leur rapport demeure suffisamment grand.

C'est que les déchirements exigent des mouvements relatifs des molécules, et que la viscosité propre des couches superficielles, viscosité qui rend ces mouvements difficiles, gêne aussi bien ceux qui mènent aux déchirements que ceux qui apportent des molécules intérieures dans les interstices agrandis des extérieures. Ainsi, en passant du savon à l'albumine, la tension, c'est-à-dire la force qui tend à déchirer les lames, devient double, mais la résistance à ce déchirement augmente en même temps par l'augmentation de la viscosité des couches superficielles, et les lames d'albumine s'étendent en bulles comme celles de savon, seulement à un moindre degré.

§ 259. Telle est donc la théorie que je propose: pour qu'un liquide puisse se développer en lames à la fois grandes et persistantes, et conséquemment se laisse gonfler en bulles, il faut d'abord que la viscosité propre des couches superficielles de ses lames soit forte, afin que l'amincissement s'opère avec lenteur; mais il faut, en outre, que sa tension soit relativement faible, afin qu'elle ne puisse vaincre la résistance opposée au déchirement par la viscosité ci-dessus lorsque, dans les mouvements superficiels, des molécules s'écartent outre mesure. Les liquides qui ont en même temps une forte viscosité superficielle et une tension relativement forte, ne donnent pas de bulles, parce que, chez eux, la tension est toujours capable de surmonter la résistance, en question. Enfin les, liquides qui n'ont qu'une faible viscosité superficielle ne donnent pas non plus de bulles, parce que leurs lames atteignent en trop peu de temps une ténuité extrême, et qu'alors elles se brisent par les petits ébranlements venus de l'extérieur, ou par d'autres causes étrangères.

Seulement, j'ai à présenter ici une remarque. Considérons deux liquides dont l'un ait une viscosité superficielle moins énergique que l'autre. Si l'on s'en tenait simplement aux principes ci-dessus, on devrait admettre que la tension suffisante pour opérer un déchirement est nécessairement plus faible suivant la même proportion dans le premier de ces liquides que dans le second, ou, en d'autres termes, qu'à chance égale de déchirement, le rapport des deux éléments, viscosité superficielle et tension, est le même dans les deux liquides; mais il faut faire attention que, lorsqu'un intervalle superficiel est trop agrandi, les molécules sous-jacentes viennent le remplir avec moins de difficulté dans premier liquide que dans le second, de sorte que le déchirement exige relativement plus de tension pour s'accomplir. Nous arrivons donc à cette conséquence qu'à égalité de chances de déchirement, ou, ce qui revient au même, à égalité de diamètre maximum des bulles quand les liquides sont de la troisième catégorie, le rapport des deux éléments est moins grand à l'égard du liquide dont la viscosité superficielle est moins forte. Et de là découle évidemment une deuxième conséquence, c'est que si le rapport des deux éléments est le même pour les deux liquides, les chances de déchire-

ment deviennent moindres pour celui qui a la moindre viscosité superficielle, de sorte qu'il doit donner des bulles plus grosses que l'autre, ou que, tandis qu'il en donne, l'autre n'en donne pas. Nous verrons plus loin (§ 297) les résultats des expériences s'accorder avec ces déductions.

Enfin une dernière conséquence, que nous connaissons déjà et que nous savons être vérifiée par les faits, c'est que, dans la deuxième catégorie, où la viscosité superficielle est extrêmement faible, les chances de déchirement sont, en général, pour ainsi dire nulles quelle que soit la tension, de sorte que les lames arrivent librement à une excessive ténuité; aussi beaucoup de liquides de cette catégorie se laisseraient-ils façonner en grosses bulles, si la rapidité de l'amincissement n'y mettait obstacle. Seulement, chez les plus volatils, intervient une propriété qui ramène, les chances de déchirement, et qui paraît consister (§ 257) en un défaut de cohésion dans les couches superficielles.

Notre théorie permet, on a pu s'en convaincre, d'expliquer d'une manière satisfaisante tous les phénomènes observés dans les expériences précédemment décrites; jusqu'ici cependant elle est encore trop hypothétique, mais nous allons voir de nouveaux faits se grouper autour d'elle et lui donner, j'espère, un appui solide.

§ 260. Avant d'exposer ces nouveaux faits, je dois, pour compléter ce qui concerne nos petites calottes, mentionner un phénomène fort curieux que m'ont présenté celles de la solution de savon de Marseille. Ainsi que je l'ai dit (§ 248), ces calottes deviennent entièrement noires après deux heures au maximum, et persistent ensuite, en cet état, quelquefois au-delà de vingt-quatre heures; or, dans ces calottes si persistantes, j'ai constaté avec surprise une diminution progressive et continue du diamètre, de sorte qu'elles finissent par s'annuler complètement; pendant cette diminution graduelle, la lame demeure toujours noire. Il faut conclure de là que la descente du liquide est sans cesse compensée par le resserrement de la calotte; c'est ce qui explique la longue durée de celle-ci.

L'un des principaux arguments par lesquels on a cherché à prouver l'impossibilité de l'état vésiculaire dans la vapeur d'eau visible, consiste en ce que l'air emprisonné dans l'intérieur d'une vésicule si minime serait soumis, de la part de la lame, à une pression considérable, (§ 118), et, par suite, passerait graduellement à travers cette lame, de sorte que la vésicule se réduirait bientôt à une gouttelette pleine; or, on le voit, mes calottes noires de savon de Marseille réalisent ce passage graduel de l'air intérieur à travers l'enveloppe liquide. A la vérité, si la vapeur d'eau visible était à l'état vésiculaire, les enveloppes ne seraient évidemment pas noires, et auraient conséquemment une épaisseur beaucoup plus grande que les lames qui constituent les calottes dont il s'agit; mais, d'autre part, la pression sur l'air intérieur des vésicules d'eau serait plus de mille fois aussi forte que dans nos calottes récemment formées.

§ 261. Je passe maintenant aux nouveaux faits annoncés plus haut. J'ai cherché d'abord à établir, par des expériences directes, l'existence de la viscosité propre des couches superficielles, et les différences qu'elle présente d'un liquide à un autre. Voici le mode d'expérimentation que j'ai adopté, et qui m'a parfaitement réussi.

Au centre d'une capsule cylindrique en verre d'environ 11 centimètres de diamètre intérieur et 6 de profondeur est fixé un pivot de 2 centimètres de hauteur, portant une aiguille aimantée; celle-ci, en forme de losange très allongé, comme à l'ordinaire, a 10 centimètres de longueur, 7mm de largeur en son milieu, et à peu près 0mm,3 d'épaisseur; la durée de chacune de ses petites oscillations sous la seule influence du magnétisme de la terre, est approximativement de 1",7. La capsule est munie de vis calantes afin qu'on puisse rendre le pivot vertical, et tout le système est placé sur une table devant une fenêtre exposée au Nord. Un petit chevalet en fil de laiton, servant

de repère, pince le bord de la capsule au point situé dans le méridien magnétique, du côté du Sud; un autre chevalet semblable se trouve du côté Est à 90° du précédent, et il y en a un troisième entre eux à 5° du premier, de sorte que de ce troisième chevalet au chevalet Est, la distance angulaire est de 85° . Enfin une bande de papier divisée en degrés est collée sur la paroi extérieure de la capsule, à partir du chevalet Sud et allant vers l'Ouest.

Tout étant bien réglé, lorsqu'on veut procéder à une expérience, on verse dans la capsule du liquide à essayer, jusqu'à ce qu'il affleure simplement la face inférieure de l'aiguille; on s'assure d'ailleurs, en regardant à travers la paroi de la capsule, que la face dont il s'agit est, aussi exactement que possible, dans le prolongement de la surface du liquide, et que de petites bulles d'air n'y sont point adhérentes. Cela fait, on amène, au moyen d'un barreau aimanté, la pointe de l'aiguille qui était dirigée vers le Sud, exactement en face du chevalet Est, et on l'y maintient en posant le barreau sur un support extérieur, à la hauteur de l'aiguille et près de la capsule; on attend quelques moments pour que la surface du liquide soit redevenue immobile, puis on enlève brusquement le barreau, en le retirant dans le sens de la longueur de l'aiguille, et l'on compte le temps qu'emploie cette dernière pour atteindre le chevalet suivant, c'est-à-dire pour parcourir un angle de 85° ; enfin on note l'angle qu'elle décrit, en continuant sa course, au delà du méridien magnétique, angle qu'on mesure à l'aide des divisions de la bande de papier. On ne compte le temps que jusqu'à 85° du point de départ, et non jusqu'au méridien magnétique, 'parce qu'avec certains liquides visqueux, l'aiguille ralentit tellement sa marche en approchant de ce dernier point, que l'instant où elle l'atteint ne peut être précisé.

On ajoute alors du même liquide jusqu'à deux centimètres environ au-dessus de l'aiguille, puis, saisissant cette dernière avec une pince en laiton, on la retourne dans l'intérieur du liquide, on fait sortir de la chape la bulle d'air qui s'y trouve engagée, en l'absorbant avec une pipette, on replace l'aiguille sur le pivot, et l'on effectue les déterminations de durée et d'angle comme ci-dessus.

En général, lorsque l'aiguille, soit sur la surface, soit dans l'intérieur du liquide, dépasse le méridien magnétique, elle se borne à y revenir ensuite lentement pour s'y arrêter.

Dans ces expériences, mon fils exécutait la manoeuvre du barreau, et observait l'aiguille; il prononçait un premier tope à l'instant où il enlevait le barreau, et un second tope à l'instant où la pointe de l'aiguille passait devant le repère suivant. De mon côté, tenant près de l'oreille une montre qui battait les cinquièmes de seconde, je pouvais estimer le temps du parcours à moins d'un dixième de seconde près. Chaque observation était répétée en général dix fois, et l'on prenait la moyenne des résultats, lesquels étaient toujours très concordants. Ajoutons que lorsqu'il s'agissait de liquides volatils ou absorbants, on recouvrait la capsule d'une cloche en verre, à travers laquelle on observait, et que, dans le cas des solutions aqueuses, on appliquait, à l'intérieur de cette cloche, des morceaux de papier à filtre imbibés d'eau et placés de manière à ne pas empêcher la vue du parcours de la pointe considérée de l'aiguille; dans ce cas aussi, la capsule était posée sur une assiette dans laquelle on versait un peu d'eau.

§ 262. Commençons par les résultats relatifs à l'eau distillée; ils ont été obtenus à la température de 18° à 19° .

Sur la surface de ce liquide, la durée du parcours de l'angle de 85° a été trouvée, comme moyenne de dix observations, égale à $4''{,}59$; la plus petite et la plus grande des valeurs partielles étaient respectivement $4''{,}5$ et $4''{,}7$.

A l'intérieur du liquide, dix observations aussi ont donné, en moyenne, pour la

durée du même parcours, 2'',37; les valeurs partielles extrêmes étaient 2'',3 et 2'',5.

Ainsi, bien que, sur la surface, une seule des faces de l'aiguille frotte contre l'eau, tandis qu'à l'intérieur les deux faces frottent simultanément et que, par suite, l'aiguille semble devoir rencontrer une résistance double, cependant elle marche près de deux fois moins vite sur la surface qu'à l'intérieur. On doit donc conclure de là que la surface de l'eau oppose une résistance particulière, qu'il faut bien attribuer à une viscosité propre de la couche superficielle de ce liquide.

A la vérité, dans l'intérieur, l'ensemble de l'aiguille et de sa chape perd une petite partie de son poids, et conséquemment appuie un peu moins sur la pointe du pivot; mais, d'autre part, la chape frotte alors par toute sa surface contre l'eau, et, en outre, la tranche de l'aiguille, tranche qui a, comme je l'ai dit, 0,3 de hauteur, pousse directement le liquide, d'où naissent des résistances bien plus que suffisantes pour compenser la légère diminution du frottement à la pointé.

D'ailleurs ce n'est pas tout. Sur la surface, l'aiguille, en continuant sa course, a décrit, en moyenne, au delà du méridien magnétique, un angle de près de 8°, tandis qu'à l'intérieur, malgré sa vitesse plus grande, elle n'a dépassé le méridien magnétique que de 3° $\frac{1}{2}$. Ces faits en apparence contradictoires m'ont beaucoup étonné d'abord; mais je n'ai pas tardé à en avoir l'explication, et ils m'ont fourni une preuve nouvelle de la forte viscosité superficielle de l'eau : on a recommencé l'expérience sur la surface, mais après avoir saupoudré celle-ci d'un léger nuage de lycopode; alors on a reconnu que cette surface tout entière tournait en même temps que l'aiguille¹⁵⁶, seulement avec une vitesse moindre; c'est donc la couche superficielle qui, en tournant ainsi, entraîne l'aiguille si loin au delà du méridien magnétique, et dès lors il est tout simple qu'à l'intérieur du liquide, où cette action n'existe pas, l'aiguille n'atteigne qu'une distance beaucoup plus petite.

J'ai dit que la surface tourne moins vite que l'aiguille; c'est qu'elle a à vaincre, sur toute son étendue, le frottement contre le liquide sous-jacent. En observant le lycopode, on constate, le long du bord antérieur de chacune des moitiés de l'aiguille, un courant allant de la chape à la pointe; et, en effet, l'aiguille ne pouvant glisser sur la couche superficielle à cause de la résistance de celle-ci, et possédant assez de force pour marcher malgré cet obstacle, il faut bien que les parties de la couche en question sur lesquelles elle agit immédiatement soient déviées et forment les courants dont j'ai parlé.

Enfin j'ai réfléchi qu'en entravant la rotation de la couche superficielle, on augmenterait la résistance au mouvement de l'aiguille, et que, par suite, on ralentirait encore ce dernier. J'ai donc fait construire deux petites cloisons rectangulaires en verre, propres à être installées dans la capsule suivant des directions allant de la paroi de celle-ci vers l'axe. Ces cloisons ont l'une et l'autre 40mm de longueur, 12 de hauteur et 2 d'épaisseur; chacune d'elles est fixée à un fil de laiton ployé en forme de chevalet, qui pince le bord de la capsule, mais qui s'élève au-dessus de ce bord, de sorte qu'on a la faculté de descendre plus ou moins la cloison dans le liquide. Les deux cloisons ont été placées à l'opposé l'une de l'autre, la première dans la partie Sud de la capsule, à 42° environ à l'Ouest du méridien magnétique, et la seconde, par conséquent, dans la partie Nord, à 42° à l'Est de ce même méridien; enfin, pour qu'elles ne pussent exercer aucune action capillaire sur l'aiguille, on les a enfoncées jusqu'à ce que leur petite surface supérieure affleurât celle de l'eau. Dans ces conditions, la durée moyenne du parcours des 85°, sur la surface, s'est élevée à 6'',44; alors aussi l'aiguille n'a plus

¹⁵⁶ On verra (§ 286) que le mouvement de toute la surface de l'eau produit par celui d'un corps placé sur cette surface, avait déjà été constaté.

dépassé le méridien magnétique.

Ces expériences ne laissent, on le voit, aucun doute sur l'existence, dans la couche superficielle de l'eau, d'une viscosité propre, supérieure de beaucoup à la viscosité de l'intérieur du même liquide, et si l'on considère que l'épaisseur de la couche superficielle d'un liquide est égale au rayon d'activité sensible de l'attraction moléculaire et conséquemment d'une excessive petitesse, on devra conclure des faits ci-dessus que la viscosité propre de la couche superficielle de l'eau est extrêmement grande. Remarquons ici que cette couche si mince doit entraîner dans sa rotation le liquide sous jacent jusqu'à une certaine profondeur, de sorte que la masse totale qui tourne excède, en réalité de beaucoup celle de la couche en question; c'est ce qui explique comment cette masse possède assez de vitesse acquise pour emporter l'aiguille au delà du méridien magnétique. Ajoutons que, par suite de son excessive minceur, la couche superficielle ne pourrait probablement opposer, à elle seule, qu'une faible résistance au mouvement de l'aiguille, et qu'une grande partie de la résistance observée doit être due à l'entraînement de la masse en question.

§ 263. J'ai essayé ensuite la glycérine de Price. Ici, à cause de la forte viscosité intérieure, le frottement soit d'une des faces, soit des deux faces de l'aiguille contre le liquide, devait produire des résistances considérables, et les durées devaient conséquemment être beaucoup plus grandes qu'à l'égard de l'eau. Je dois ajouter que les expériences ont été faites en Janvier, à la température de 15° , et qu'à cette température peu élevée, la glycérine est beaucoup plus visqueuse qu'en été. On n'a fait que deux observations sur la surface, et deux à l'intérieur.

Dans le premier cas¹⁵⁷, les valeurs de la durée ont été 36' et 35' 30"; dans le second, elles ont été l'une et l'autre de 19' 30".

Ainsi, pour la glycérine, comme pour l'eau, la vitesse du parcours de l'angle de 85° est beaucoup plus grande à l'intérieur que sur la surface, d'où il faut conclure de même à l'existence, dans la couche superficielle, d'une viscosité propre énergique.

Quant à l'angle au delà du méridien magnétique, il est nul, tant sur la surface qu'à l'intérieur, par suite des faibles vitesses de l'aiguille; celle-ci atteint simplement ce méridien, en approchant duquel sa marche devient d'une extrême lenteur.

Pour s'assurer si la couche superficielle tournait avec l'aiguille, on n'a pas employé le lycopode, dont il eût été difficile de débarrasser ensuite la glycérine; on a d'abord ramené l'aiguille à son point de départ, puis, pendant qu'elle y était maintenue, on a déposé sur la surface du liquide, dans le méridien magnétique et à 14mm environ de la paroi de la capsule, un petit fragment de feuille d'or; ensuite, après avoir recouvert l'appareil de la cloche, on a rendu la liberté à l'aiguille, et l'on a observé la paillette. A peine l'aiguille avait-elle parcouru 1° ou 2° , qu'on a vu la paillette se mettre en mouvement, comme si elle était repoussée; après le parcours des 85° de l'aiguille, cette même paillette avait décrit, vers l'Ouest, un arc d'environ 30° . La couche superficielle de la glycérine, tourne donc, comme celle de l'eau, en même temps que l'aiguille, et aussi avec une vitesse moindre.

§ 264. Avec la solution saturée de carbonate de soude, à la température de 17° , les durées, obtenues chacune par la moyenne de huit observations très concordantes, ont été: sur la surface 8",04, et à l'intérieur 4",59. Sur la surface, l'aiguille a dépassé d'environ 6° le méridien magnétique, et, à l'intérieur, elle l'a simplement atteint. Pour l'essai de la rotation de la couche superficielle, on a eu recours, comme ci-dessus, à la paillette d'or; celle-ci a commencé à se mouvoir en même temps que l'aiguille, et a

¹⁵⁷ Pour éviter autant que possible l'absorption de l'humidité de l'air, on avait enduit de glycérine l'intérieur de la cloche, sauf la portion à travers laquelle on devait observer.

décrit un arc d'environ 30° . La conclusion est donc encore la même.

Je ferai remarquer que la durée $4''{,}59$ du parcours des 85° à l'intérieur de cette solution, est précisément égale à celle que nous avons trouvée plus haut pour le même parcours sur la surface de l'eau distillée; or, ainsi que je l'ai dit, à l'intérieur de notre solution l'aiguille s'arrête au méridien magnétique; c'est donc une preuve nouvelle que, sur la surface de l'eau, l'aiguille ne va au delà de ce méridien que parce qu'elle est entraînée par le mouvement de la couche superficielle.

§ 265. Avec la solution saturée d'azotate de potasse, on a obtenu, par la moyenne de dix observations, à la température de 19° : sur la surface, durée $4''{,}41$, angle au delà du méridien magnétique $5^\circ 1/2$ à l'intérieur, durée $2''{,}38$, angle 3° ; donc toujours même conclusion; on a jugé inutile de faire l'essai de la paillette d'or.

§ 266. En soumettant aux mêmes essais la solution saturée de chlorure de calcium, on a vu la durée, sur la surface, aller progressivement en augmentant: elle s'est élevée, en six observations, de $15''$ à $21''$. Soupçonnant que ce résultat pouvait provenir d'une faible action chimique exercée sur l'aiguille, action donnant lieu à un composé de fer qui, balayé sur la surface par l'aiguille, accroîtrait la viscosité superficielle, on a enduit d'un vernis à la gomme laque l'aiguille, ainsi que le pivot jusque près de la pointe, puis on a recommencé. Alors, en effet, l'augmentation ne s'est plus montrée, et l'on a eu, en moyenne, à la température d'environ 19° sur la surface, durée $14''{,}85$, angle $2^\circ 1/2$ à l'intérieur, durée $8''{,}52$, angle 00 ; ainsi, même conclusion également.

J'ai cru pouvoir me borner, à l'égard de la première catégorie, aux cinq liquides précédents; d'ailleurs les acides sulfurique, azotique et tartrique, ainsi que l'ammoniaque, auraient fortement agi sur l'aiguille ou sur la couche de vernis dont on l'aurait recouverte. Je passe actuellement à la deuxième catégorie.

§ 267. Voyons, en premier lieu, ce qui concerne l'alcool. Les expériences¹⁵⁸ ont donné, avec ce liquide, pour la durée moyenne du parcours des 85° , sur la surface, $1''{,}48$, et, pour celle du même parcours à l'intérieur, $3''{,}30$. Ici donc, à l'inverse des liquides précédents, c'est sur la surface que la durée est de beaucoup la plus petite. L'angle décrit au delà du méridien magnétique a été, en moyenne, sur la surface, de $21^\circ 1/2$, et, à l'intérieur, de $3^\circ 1/2$. Les cloisons n'ont produit absolument aucun effet; enfin le petit corps flottant¹⁵⁹ est demeuré immobile jusqu'à ce que l'aiguille vînt le heurter.

Il suit évidemment de ces résultats que, dans l'alcool, la viscosité de la couche superficielle ne surpasse aucunement celle de l'intérieur du liquide, et nous aurons à décider si elle ne lui est pas inférieure. Il suit encore des mêmes résultats que si l'aiguille, sur la surface, se transporte au delà du méridien magnétique, c'est bien en vertu de sa propre vitesse acquise. Les expériences ci-dessus ont été effectuées à la température de 17° à 18° .

Le jour où ont été faites sur l'eau distillée les observations du § 262, on a effectué, immédiatement après, une nouvelle détermination de la durée et de l'angle à l'intérieur de l'alcool, afin de pouvoir, comparer ces éléments à ceux de l'eau dans des circonstances identiques; on a trouvé ainsi la durée égale à $2''{,}66$, et l'angle égal à $2^\circ 1/2$;

¹⁵⁸ Si l'on se borne à placer la cloche sur la capsule le niveau du liquide baisse sensiblement, malgré cette précaution, pendant les essais, à cause de la volatilité de l'alcool, et cela influe surtout sur les angles. Afin d'écartier cet inconvénient, on a couvert l'intérieur de la cloche de papier à filtre imbibé d'alcool, en laissant à nu la portion nécessaire pour permettre l'observation; le tout était posé sur une assiette dans laquelle on a versé un peu d'alcool.

¹⁵⁹ Ce n'était pas une paillette d'or: ces paillettes déposées sur l'alcool et sur quelques autres liquides tels que l'essence de térébenthine, l'éther, etc., descendent invariablement au fond; on y a substitué un fragment d'aigrette de graine.

la durée, on le voit, est un peu plus grande et l'angle un peu plus petit qu'à l'égard de l'eau dans les mêmes conditions; la résistance intérieure de l'alcool au mouvement de l'aiguille paraît donc être un peu supérieure à celle de l'eau; on sait d'ailleurs que l'alcool s'écoule moins vite que l'eau par un tube étroit; mais cela tient sans doute à ce que l'alcool adhère aux solides plus fortement que l'eau. Quant aux différences entre les valeurs ci-dessus relatives au premier de ces liquides et celles précédemment obtenues, j'y reviendrai plus loin.

§ 268. Voici les résultats avec l'essence de térébenthine, obtenus le même jour qu'avec l'alcool: durée moyenne sur la surface, $1''$,40; à l'intérieur, $3''$,43; angle moyen au delà du méridien magnétique, sur la surface, $22^{\circ} 1/2$ à l'intérieur, 1° . Comme avec l'alcool, l'aiguille attend, sans quitter sa place, que l'aiguille vienne la heurter; d'après ce dernier résultat, on a jugé inutile de faire usage des cloisons. La viscosité de la couche superficielle de l'essence de térébenthine ne l'emporte donc pas non plus sur celle de l'intérieur.

La comparaison des valeurs ci-dessus avec celles qui concernent l'alcool dans les mêmes conditions, nous conduit à une conséquence importante : la durée $3''$,43 et l'angle 1° à l'intérieur de l'essence, sont l'une un peu plus grande et l'autre beaucoup plus petit que la durée $3''$,30 et l'angle $3^{\circ} 1/2$ à l'intérieur de l'alcool; il paraît donc que la viscosité intérieure est plus énergique dans l'essence. Maintenant rappelons—nous que, sur la surface, l'aiguille doit vaincre, par sa face en contact avec le liquide, la viscosité intérieure de celui-ci; conséquemment si la viscosité de la couche superficielle était, dans chacun des deux liquides, simplement égale à la viscosité intérieure, l'aiguille devrait éprouver aussi une résistance plus grande à la surface de l'essence qu'à celle de l'alcool; or, on l'a vu, il n'en est pas ainsi sur la surface, la durée a été un peu moindre et l'angle un peu plus grand pour l'essence que pour l'alcool; il semble dès lors nécessaire d'admettre, dans la couche superficielle de l'essence, une mobilité particulière qui diminue la résistance, et nous arrivons ainsi à cette déduction probable que, parmi les liquides de la deuxième catégorie, l'essence de térébenthine au moins a, dans sa couche superficielle, une viscosité plus faible que dans son intérieur. Pour abrégér le langage, j'exprimerai le fait en disant que la couche superficielle de ce liquide possède un *excès négatif* de viscosité. C'est, du reste, un point sur lequel je reviendrai bientôt.

§ 269. Dans l'huile d'olive, on pourrait croire, au premier aperçu, qu'on retrouve un faible excès positif. En effet, les résultats avec ce liquide, à la température de 15° , ont été, en moyenne: durée sur la surface, $30''$,30, et, à l'intérieur, $79''$,54; dans les deux cas, l'aiguille atteint simplement le méridien magnétique; mais, en présence des cloisons, la durée sur la surface a été de $31''$,42, c'est-à-dire quelque peu supérieure à celle obtenue sans leur emploi; enfin la paillette d'or s'est mise en marche, mais seulement après un parcours de l'aiguille de plus de 30° , et elle ne s'était éloignée que de 4° du méridien magnétique à la fin du parcours des 85° .

Cependant le petit excès positif que semblent révéler ces expériences n'est pas réel: on a ajouté un peu d'huile dans la capsule de manière que l'aiguille fût plongée dans le liquide, mais seulement à 1mm au-dessus de la surface, et l'on a refait, dans ces conditions, l'essai de la paillette. On a vu alors celle-ci se déplacer dès que l'aiguille a commencé à se mouvoir; seulement elle marchait avec beaucoup plus de lenteur; elle s'est arrêtée en même temps que l'aiguille lorsque cette dernière a atteint le méridien magnétique, et elle n'avait parcouru que 20° . La hauteur de l'huile au-dessus de l'aiguille ayant été successivement augmentée, l'effet a diminué, mais, même pour une hauteur de deux centimètres, il était encore très notable: la paillette partait lorsque

l'aiguille avait décrit environ 30° , et elle se déplaçait de 9° .

Il résulte de ces faits que, dans le cas d'un liquide très visqueux comme l'huile, l'aiguille entraîne avec elle une masse considérable qui pousse le liquide devant elle, et que cette action se fait sentir immédiatement à une grande distance en avant de l'aiguille. Si l'effet est moins prononcé quand l'aiguille est simplement sur la surface, c'est qu'alors une seule de ses faces agit pour entraîner et pousser le liquide. On le voit donc, la viscosité propre de la couche superficielle de l'huile n'est pour rien dans le mouvement de la paillette et dans le petit retard apporté par les cloisons, et l'excès positif de ce liquide n'est qu'une apparence due aux effets de la viscosité intérieure¹⁶⁰. Bien plus, la rapidité de l'amincissement des calottes (§ 247) doit faire présumer que l'huile a, au contraire, un excès négatif.

Dans les liquides peu visqueux, tels que l'eau, l'alcool, etc., l'aiguille doit communiquer aussi un certain mouvement aux portions voisines, et il était important de savoir ce que donneraient, avec ces liquides, les mêmes expériences. On a essayé d'abord l'eau distillée; or, quand l'aiguille était plongée de 1mm, elle n'a imprimé de mouvement à la paillette qu'au moment où elle passait dessous; mais pendant qu'elle revenait lentement au méridien magnétique après avoir décrit environ 2° au delà, la paillette a continué à marcher, et a parcouru 30° . Tout effet cesse lorsqu'il y a au-dessus de l'aiguille une hauteur d'eau de 7mm. Dans l'alcool, les résultats ont été analogues; seulement, à 1mm au-dessous de la surface, comme l'aiguille dépassait de beaucoup le méridien magnétique, le petit corps flottant l'accompagnait jusqu'à l'extrémité de sa course, puis allait encore un peu plus loin; en outre, pour qu'il n'y eût plus d'action, il a fallu une hauteur d'alcool de 9mm. Ainsi, avec les liquides peu visqueux, soit qu'ils, aient, comme l'eau, un excès positif, soit que, comme l'alcool, ils n'en possèdent pas, la masse entraînée par l'aiguille n'exerce aucune impulsion sensible en avant, de sorte qu'elle n'influe nullement sur les déductions tirées des essais de la paillette et des cloisons.

Ces derniers faits m'ont suggéré l'idée d'une expérience propre à mettre complètement hors de doute l'absence d'excès positif dans la couche superficielle de l'huile : je me suis dit que si l'on recouvrait l'eau de la capsule d'une mince couche d'huile sur la surface supérieure de laquelle l'aiguille exécuterait son mouvement, les effets décrits plus haut de la viscosité intérieure de l'huile ne pourraient se produire, et que, par conséquent, si l'huile n'a pas d'excès positif, la paillette resterait immobile. Or l'expérience a pleinement confirmé cette prévision; seulement, à ma grande surprise, j'ai reconnu que si la couche d'huile est très—mince, l'excès positif de l'eau se fait sentir : la paillette alors part en même temps que l'aiguille, et décrit un grand angle. L'épaisseur d'huile pour laquelle la paillette ne bouge plus du tout, est d'environ 1mm.

§ 270. Pour l'éther sulfurique¹⁶¹, j'ai trouvé, à la température de 16° : sur la surface, durée $1''$,12, angle au delà du méridien magnétique 47° ; à l'intérieur, durée $1''$,49, angle 12° . L'expérience de l'aigrette présente des difficultés, parce que ce petit corps, avant qu'on ait rendu la liberté à l'aiguille, se promène constamment à la surface du liquide; cependant, en lâchant l'aiguille le plus tôt possible après avoir placé l'aigrette, on a

¹⁶⁰ Le même entraînement et une semblable poussée doivent avoir eu lieu à l'égard de la glycérine (§ 263); mais, avec ce dernier liquide, l'excès positif était nettement accusé par la circonstance que la durée sur la surface était beaucoup plus grande que dans l'intérieur, et par le mouvement considérable de la paillette.

¹⁶¹ Ici, plus encore qu'avec l'alcool, la volatilité du liquide tend à produire un abaissement du niveau. Le moyen employé à l'égard de l'alcool (voir la première note du § 267) aurait exposé l'observateur à respirer trop de vapeur d'éther; on a donc procédé de la manière suivante: on a versé un peu trop de liquide dans la capsule, et l'on a simplement recouvert celle-ci de la cloche, puis, durant la série des essais, on a enlevé de temps à autre la cloche pour observer l'affleurement de l'aiguille, et, parmi les résultats partiels obtenus, on n'a conservé que ceux qui correspondaient à un affleurement régulier.

pu constater par plusieurs essais que celle—ci était simplement heurtée. La couche superficielle de l'éther ne possède donc non plus aucun excès positif.

Quant aux mouvements en apparence spontanés de l'aigrette, ils proviennent, sans aucun doute, de l'évaporation du liquide, bien qu'on place, à chaque essai, la cloche sur l'appareil.

§ 271. Le sulfure de carbone¹⁶² a fourni, à la température de 16° : sur la surface, durée $1''{,}20$, angle au delà du méridien magnétique 36° ; à l'intérieur, durée $2''{,}0$, angle 8° . Avec l'aigrette, mêmes difficultés et même résultat que pour l'éther; même conclusion par conséquent, savoir absence d'excès positif.

Dans le Mémoire résumé au § 167, M. Van der Mensbrugge attribue les mouvements, en apparence spontanés, des parcelles flottantes, à ce que l'évaporation du liquide ne s'effectue pas d'une manière parfaitement égale dans tous les azimuts autour d'une même parcelle, d'où résultent de petites inégalités de température, et, par suite, de tension. A l'appui de cette explication, il cite, entre autres, le fait suivant: si l'on recouvre d'une plaque de verre la moitié d'une capsule contenant du sulfure de carbone sur lequel flottent des particules solides, on voit celles de la portion ainsi abritée marcher vers la portion découverte, où l'évaporation est libre.

§ 272. Avant de rapporter les résultats des mêmes épreuves sur les liquides de la troisième catégorie, revenons à la question de l'excès négatif. Les faits qui m'ont conduit à admettre cette propriété peuvent paraître insuffisants; mais l'idée m'est venue d'un moyen simple, propre à la mettre en évidence à l'égard de l'alcool, si elle existait dans ce liquide l'alcool, en effet, se mêle en toutes proportions à l'eau, laquelle possède, on l'a vu (§ 262), un grand excès positif; si donc on mêle avec soin à de l'eau une quantité convenable d'alcool, et si ce dernier liquide présente effectivement un excès négatif, celui-ci devra détruire l'excès positif de l'eau. Or c'est ce que l'expérience vérifie pleinement : on prépare un mélange à volumes égaux d'eau et d'alcool, et l'on effectue, sur ce mélange, l'essai de la paille; on constate alors que celle-ci est simplement heurtée par l'aiguille.

La proportion d'alcool qui suffit pour produire la simple neutralisation de l'excès positif de l'eau, est inférieure à celle que je viens d'indiquer; mais, avec cette dernière, l'expérience est des plus faciles, tandis qu'avec des proportions plus faibles, elle présente des difficultés résultant de la perte d'alcool par évaporation à la surface du mélange.

Pour effectuer l'expérience ci-dessus, on a laissé la capsule découverte; de cette manière, si le mélange contenait trop d'alcool, la couche supérieure perdant de celui-ci par évaporation, devait arriver graduellement au point neutre; puis, l'évaporation continuant, l'excès positif de l'eau devait commencer à reparaître. Or c'est ce qui est arrivé on a mesuré d'abord l'angle décrit par l'aiguille au delà du méridien magnétique; il était de 14° , et la paille, essayée immédiatement après, a été simplement heurtée. Quelques minutes plus tard, l'angle n'était plus que de 12° , plus tard encore de 10° , et la paille était toujours simplement heurtée. Pour l'angle de $9^{\circ}1/2$, la paille a été poussée en avant quand l'aiguille en était à environ un degré; enfin lorsque l'angle s'est trouvé réduit à 5° , la distance de l'aiguille la paille au moment où celle-ci commençait à se déplacer, a été de quatre degrés. Pendant la durée de ces essais, l'évaporation de l'alcool faisait baisser peu à peu le niveau du liquide; mais on le rétablissait de temps à autre en introduisant, au moyen d'une pipette, à une certaine profondeur au-dessous de la surface, une quantité convenable du même mélange. La température était de 18° .

On ne doit pas conclure de cette expérience que l'angle qui correspond au point

¹⁶² Même procédé que pour l'éther.

neutre est de 10° environ l'aiguille, en parcourant son trajet, mêle plus ou moins la couche supérieure avec les couches sous-jacentes, et il en résulte une cause perturbatrice dont on ne peut évaluer l'influence.

Il faut donc nécessairement reconnaître que l'alcool et, à plus forte raison, l'essence de térébenthine, ont un excès négatif, c'est-à-dire que, dans chacun de ces liquides, la viscosité de la couche superficielle est moindre que la viscosité intérieure. On voit, de plus, que les excès négatifs dont il s'agit sont considérables.

§ 273. Enfin un moyen tout différent m'a permis non seulement de constater encore l'existence des excès négatifs, mais même de déterminer approximativement les valeurs relatives de ces excès pour plusieurs liquides. On sait que les oscillations de l'aiguille aimantée sont régies par la même loi que celles du pendule; les formules concernant le mouvement de ce dernier dans un milieu résistant, s'appliquent donc aussi au mouvement de notre aiguille sur ou dans un liquide. Si l'on admet que la résistance du milieu est proportionnelle au carré de la vitesse du pendule, l'équation différentielle du mouvement de celui-ci peut, on le sait encore, s'intégrer une première fois, et cette intégrale est:

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2amCe^{2am\theta} + \frac{2g \cos \theta}{a(1+4a^2m^2)} + \frac{4gm \sin \theta}{1+4a^2m^2} \dots \quad (6)$$

dans laquelle θ est l'angle variable que fait le pendule avec la verticale, a la longueur du pendule simple corres pondant, m la résistance pour l'unité de vitesse, g la gravité, et C la constante arbitraire.

Pour l'appliquer à notre aiguille, prenons pour origine des angles non la position de repos, c'est-à-dire le méridien magnétique, mais le point de départ de l'aiguille, c'est-à-dire la position à 90° de ce méridien, et désignons par ω l'angle variable; on a ainsi $\theta = 90^\circ - \omega$; remplaçons de plus $2am$ par la seule lettre k ; celle-ci représentera alors une quantité proportionnelle à la résistance; déterminons la constante arbitraire C par cette condition que, pour $\omega = 0$, la vitesse est nulle; enfin considérons ω comme représentant l'angle total décrit par l'aiguille jusqu'au point qu'elle atteint au delà du méridien magnétique, point pour lequel la vitesse est également nulle. Avec ces conventions, l'intégrale ci-dessus devient simplement:

$$\sin \omega + k \cos \omega - ke^{-k\omega} = 0 \quad (7)$$

Quand l'expérience a fait connaître, à l'égard d'un liquide, l'angle décrit par l'aiguille au delà du méridien magnétique sur la surface ou dans l'intérieur, il suffit d'ajouter 90° à cet angle pour avoir ω , ou l'angle total parcouru depuis le point de départ; portant alors cette valeur de ω dans l'équation [2], on en déduira par tâtonnement la valeur correspondante de k . Afin d'éviter la confusion, nous conserverons k pour la résistance sur la surface, et nous nommerons k' la résistance à l'intérieur.

Avant d'aller plus loin, je dois faire remarquer que notre formule ne peut déterminer k lorsqu'il s'agit de liquides à excès positif; avec ceux-ci, en effet, l'angle décrit sur la surface au delà du méridien magnétique est dû, en tout ou en partie (§ 262), à ce que l'aiguille est emportée par la couche superficielle. L'application complète de la formule [2] est donc restreinte aux liquides qui n'ont pas d'excès positif, c'est-à-dire à ceux sur lesquels la paillette ou l'aigrette attend simplement l'aiguille.

La résistance due à la viscosité intérieure doit, comme je l'ai déjà fait observer, être à peu près deux fois aussi grande lorsque l'aiguille se meut dans le liquide que lorsqu'elle se meut sur la surface, puisque, dans le premier cas, elle frotte par ses deux faces, tandis que, dans le second, elle ne frotte que par une seule; si donc, pour un

certain liquide, l'excès superficiel était égal à zéro, ou, en d'autres termes, si la couche superficielle possédait la même viscosité que l'intérieur; on devrait avoir sensiblement, à l'égard de ce liquide, $k = \frac{1}{2}k'$; je dis sensiblement, parce que (§ 262) de petites causes, telles que l'action de la tranche de l'aiguille à l'intérieur du liquide, la perte de poids dans cette même condition, etc., altèrent sans doute quelque peu cette égalité. Pour un liquide à excès négatif, on aura conséquemment

$$k < \frac{1}{2}k', \quad \text{ou} \quad k - \frac{1}{2}k' < 0$$

or la formule [2] permet de calculer cette différence pour tous les liquides sans excès positif et sur lesquels l'aiguille dépasse le méridien magnétique; on peut donc, ainsi que je l'ai dit, constater l'existence des excès négatifs, et obtenir, en même temps, leurs valeurs relatives approchées.

§ 274. C'est ce que j'ai fait pour les quatre liquides alcool, essence de térébenthine, éther sulfurique et sulfure de carbone; en transportant dans la formule [2] les valeurs de ω déduites, pour ces liquides, des expériences des § 267 à 271, on a obtenu les résultats consignés dans le tableau suivant :

LIQUIDES.	VALEURS de k .	VALEURS de k' .	VALEURS de $k - \frac{1}{2}k'$.
Essence de térébenthine	2,34	57,28	-26,30
Alcool	2,48	16,34	-5,69
Sulfure de carbone	1,24	7,11	-2,31
Éther sulfurique	1,05	4,71	-1,20

Ainsi les résultats de la formule confirment pleinement nos déductions précédentes: ils signalent des excès négatifs dans l'essence de térébenthine et dans l'alcool, et montrent que celui de l'essence est plus grand que celui de l'alcool; mais ils nous apprennent, en outre, que le sulfure de carbone et l'éther possèdent également des excès négatifs. Si l'on rapproche de ces résultats le fait de l'amincissement rapide des calottes des huiles grasses, ainsi que l'analogie des phénomènes, d'une part entre les calottes des acides lactique et acétique et celles d'essence de térébenthine et d'alcool, et, d'autre part, entre les calottes de benzine, de liqueur des Hollandais et de chloroforme, et celles d'éther et de sulfure de carbone (§ 247), on devra regarder comme bien probable que la propriété de présenter un excès négatif appartient à tous les liquides de la deuxième catégorie.

Dans le tableau ci-dessus, j'ai rangé les liquides suivant l'ordre décroissant de leurs excès négatifs; or cet ordre est aussi l'ordre décroissant de leurs viscosités intérieures, comme cela résulte des valeurs respectives des angles décrits par l'aiguille au delà du méridien magnétique à l'intérieur de chacun d'eux; si donc il est permis de tirer quelque conclusion de résultats relatifs à un nombre de liquides aussi restreint, nous dirons que l'excès négatif paraît être d'autant plus grand qu'il appartient à un liquide plus visqueux. S'il en est ainsi, les huiles grasses et l'acide lactique doivent avoir des excès négatifs plus considérables encore que celui de l'essence de térébenthine.

La petitesse des excès négatifs, ou, ce qui revient au même, la moins grande mobilité des couches superficielles dans le sulfure de carbone et dans l'éther, est, sans doute, la cause principale de la longueur relative des phases blanches dans les calottes de ces deux liquides. Il est vrai que le froid, qui doit encore amoindrir cette mobilité, raccourcit cependant, nous l'avons vu, les phases en question; mais, il ne faut pas l'oublier,

deux causes opposées paraissent être alors en présence: d'une part la basse température des lames elles-mêmes, laquelle doit, en réalité, tendre à allonger les phases blanches, et, d'autre part, la diminution du petit reste d'évaporation, qui tend, au contraire, à les raccourcir (§ 253), et il se peut que cette dernière influence l'emporte sur la première.

Dans notre tableau, les valeurs des excès négatifs sont exprimées en fonction d'une unité qui n'est pas bien déterminée, il ne faut donc y voir que des valeurs relatives; et encore ne doit-on les regarder que comme des approximations même grossières. En effet, la formule d'où elles sont déduites est fondée sur une loi des résistances qui, on le sait, n'est pas rigoureuse¹⁶³; en second lieu, mon procédé de mesure des angles laisse à désirer, de sorte que je n'ai pas cru devoir pousser la précision, même dans les moyennes, au delà du demi-degré; d'ailleurs il y a une influence dont la formule ne pouvait tenir compte, et qui doit augmenter plus ou moins tous les angles: c'est qu'en vertu de sa vitesse acquise, la portion de liquide entraînée par l'aiguille (§ 269) emporte nécessairement cette dernière un peu au delà du point qui, sans cela, constituerait la limite de l'angle.

§ 275. Nous pouvons maintenant exposer les résultats des essais avec l'aiguille sur les liquides de la troisième catégorie. Ici encore nous aurons à constater des faits bien remarquables.

Voyons d'abord ce qui concerne la solution de savon de Marseille à $\frac{1}{40}$. Avec une solution qu'on venait de préparer, on a trouvé, à la température de 18° sur la surface, durée $4''{,}82$, angle au delà du méridien magnétique 10° ; à l'intérieur, durée $2''{,}58$, angle 5° .

Ces résultats s'accordent on le voit, avec ceux des calottes pour accuser nettement une forte viscosité superficielle. Il était nécessaire, pour une raison que l'on comprendra plus loin, de les comparer à ceux que fournit l'eau distillée dans des conditions identiques; on a donc opéré le même jour sur l'eau distillée, et l'on a obtenu: sur la surface, durée $4''{,}93$, angle 10° ; à l'intérieur, durée $2''{,}58$, angle 5° .

Comme les observations de ce genre comportent inévitablement de petites erreurs dont il doit, en général, rester quelque chose dans les moyennes, on a recommencé, à une autre époque, en opérant aussi le même jour sur les deux liquides; la température était d'environ 21° . Les résultats ont été: avec la solution de savon, sur la surface, durée $4''{,}14$, angle $6^\circ 1/2$ à l'intérieur, durée $2''{,}32$, angle $4^\circ 1/2$ avec l'eau distillée, sur la surface, durée $4''{,}07$, angle 8° ; à l'intérieur, durée $2''{,}08$, angle 4° .

Dans le premier de ces deux couples de séries, les résultats relatifs aux deux liquides n'ont guère différé entre eux; dans le second, ils se sont un peu éloignés, ce qui tient sans doute aux erreurs inévitables des observations, surtout à l'égard de la durée à l'intérieur; pour celle-ci, en effet, la vitesse de l'aiguille étant beaucoup plus grande, il était fort difficile de signaler avec précision l'instant du passage de la pointe en face du repère. Quoi qu'il en soit, on peut conclure de l'ensemble de ces mêmes séries que la présence de $1/40$ de savon ne change que faiblement la viscosité superficielle du liquide; nous verrons plus loin qu'elle paraît la diminuer un peu (§ 292).

L'alcool nous a déjà montré (§ 267) que, pour un même liquide, les valeurs des durées et des angles obtenues par des séries d'observations effectuées à des époques

¹⁶³ Coulomb a montré (*Mém. de l'Acad. des Sc. de Paris*, an IX de la République), par une suite nombreuse d'expériences, que, lorsqu'un plan solide se meut très lentement dans le sens de sa surface à l'intérieur d'un liquide, la résistance est proportionnelle à la simple vitesse. Mais les vitesses qu'il emploie sont environ cinq fois moindres que la plus lente de celles de mon aiguille dans les liquides qui ont fourni les résultats du tableau. Pour avoir des résultats exacts avec les vitesses de mes expériences, il faudrait probablement considérer la résistance comme composée de deux termes, l'un proportionnel à la simple vitesse, l'autre au carré de cette vitesse; mais alors la formule ne serait sans doute pas susceptible d'intégration.

différentes peuvent s'éloigner très notablement les unes des autres; l'eau distillée ainsi que la solution de savon en offrent de nouveaux exemples: pour l'eau, les séries du § 262 et celles que nous venons de rapporter ont donné, sur la surface, les valeurs respectives 4'',59, 4'',93 et 4'',07, et, à l'intérieur, 2'',37, 2'',58 et 2'',08; la solution de savon montre, on a pu le voir, des différences analogues. Disons ici, pour ne plus y revenir, que toutes ces différences tiennent aux variations du magnétisme de l'aiguille: pendant le long temps qu'a exigé l'ensemble de mes expériences, ce magnétisme a plus d'une fois diminué, et lorsque la diminution paraissait trop grande, on soumettait l'aiguille à une nouvelle aimantation. Aussi, quand il s'est agi de comparer un liquide à un autre, on a toujours eu soin d'opérer le même jour sur les deux.

Quant aux angles, il semble qu'ils devraient être, pour un même liquide, d'autant plus grands que les durées sont plus petites, puisque alors l'aiguille atteint le méridien magnétique avec plus de vitesse acquise soit en elle-même, soit dans les couches qu'elle a mises en mouvement; or c'est précisément le contraire qui a lieu en général, comme le montrent nos mesures. On peut, je crois, se rendre raison de cette singularité, en observant que lorsque l'aiguille est plus fortement aimantée, sa force directrice tend à annuler sa vitesse à une moindre distance au delà du méridien magnétique. Quelques exceptions me portent cependant à penser que parfois une autre influence, dont la nature m'échappe, agit plus ou moins sur les angles.

Bien qu'on obtienne si aisément d'énormes bulles avec une solution aqueuse de savon de Marseille, on ne parvient pas à en former, même de petites, avec une solution alcoolique de la même substance. C'est ce qu'il était facile de prévoir d'après nos résultats, sachant que l'alcool possède un excès négatif considérable.

§ 276. La solution de savon mou de ménage à 1/30 (voir la deuxième note du § 248), a donné, à la température de 19°: sur la surface, durée 4'',40, angle 6° 1/2 à l'intérieur, durée 2'',38, angle 5°; ainsi même conclusion quant à la viscosité superficielle.

§ 277. Avec la solution de savon de colophane (voir la troisième note du § 248), on a trouvé, à la température de 18°: sur la surface, durée 7'',30, angle au delà du méridien magnétique 5°; à l'intérieur, durée 4'',48, angle 0°; arc décrit par la paillette 26°. La solution de savon de colophane a donc aussi une viscosité superficielle à excès positif.

§ 278. Arrivons au liquide le plus extraordinaire de tous ceux que j'ai examinés; je veux parler de la solution de saponine. Celle que j'ai d'abord essayée contenait 1/80 de saponine, et ne paraissait pas plus visqueuse que l'eau pure; or, sur sa surface, l'aiguille, amenée, comme toujours, à 90° du méridien magnétique, puis abandonnée à elle-même, n'a pas quitté sa position, malgré des coups frappés sur la table, absolument comme si le liquide s'était recouvert d'une pellicule de nature solide. Cependant la surface présentait le poli parfait d'un liquide, et, de plus, en l'agitant légèrement avec l'extrémité d'une spatule ou d'un fil métallique, on n'a pu reconnaître la moindre trace de pellicule. Des solutions à 1/100 et même à 1/160 ont présenté les mêmes résultats.

On a effectué l'essai de l'aiguille à l'intérieur du liquide avec la solution d'un second échantillon de saponine, le premier ayant été épuisé par d'autres expériences. Ce second échantillon n'était pas tout à fait aussi excellent: pour obtenir les meilleurs résultats, il a fallu le dissoudre dans une moindre quantité d'eau; la solution que j'ai employée était à 1/60; elle donnait des bulles de 12 à 13 centimètres, et, sur sa surface, l'aiguille placée à 90° du méridien magnétique demeurait de même parfaitement immobile.

À l'intérieur, la durée du parcours des 85° a été 2'',72, et l'angle au delà du méridien magnétique 2°; la température était de 16°. On a répété aussi, le même jour, l'essai à l'intérieur de l'eau distillée, et l'on a obtenu: durée 2'',66, angle 2°. Ces résultats

s'éloignent déjà bien peu les uns des autres, et l'on doit en conclure qu'avec la solution à 1/100 du premier échantillon, ils auraient été plus rapprochés encore; on peut donc admettre que la viscosité intérieure d'une bonne solution de saponine est sensiblement égale à celle de l'eau pure.

Les observations rapportées plus haut ne permettent guère de considérer la résistance au mouvement de l'aiguille sur la surface comme résultant de la formation d'une pellicule; on est donc conduit à admettre, dans la solution de saponine, une viscosité extrêmement forte, et c'est ce que confirment les expériences suivantes:

Si la surface se recouvrait d'une pellicule, celle-ci devrait provenir soit de l'évaporation de l'eau, soit d'une action de l'oxygène de l'air sur la saponine, action que, du reste, la chimie ne signale point; or j'ai abandonné pendant trois jours une solution à 1/100 du premier échantillon dans une capsule sur laquelle un papier était simplement posé pour abriter le liquide de la poussière, et, après ce long temps, on n'a remarqué aucun changement dans la surface.

En second lieu, lorsqu'une bulle que l'on gonfle avec la pipe vient à se briser, elle ne disparaît pas comme le ferait une bulle de savon on voit tomber de l'orifice de la pipe une masse allongée dans le sens vertical, resserrée dans le sens horizontal, et constituée par une sorte de membrane chiffonnée d'un blanc mat. Si l'on reçoit cette masse sur le liquide, elle y forme aussitôt un ensemble de calottes irrégulières agglomérées, et, si l'on examine rapidement celles-ci, on reconnaît que leur aspect mat tient à une foule de petites masses d'air très allongées qui semblent emprisonnées dans les lames; mais bientôt ces petites masses disparaissent, les calottes se régularisent plus ou moins et se montrent tout à fait transparentes; enfin si l'on crève ces mêmes calottes, aucune trace de pellicule ne reste à la surface du liquide. Dans cette expérience, on le comprend, la bulle se détache de l'orifice, et alors, en vertu de la pression qu'elle exerce, chasse, par l'ouverture ainsi formée, l'air qu'elle renfermait; mais, par suite de la rigidité de ses couches superficielles, elle ne peut revenir sur elle-même qu'en se plissant et emprisonnant ainsi de petites masses d'air dans une grande quantité de canaux cylindriques; seulement on ne voit pas bien pourquoi ce plissement s'opère de façon à ne resserrer la bulle que dans le sens horizontal. Lorsque cette espèce de membrane plissée tombe sur le liquide, les petits canaux ci-dessus se brisent les uns après les autres, et enfin, quand on crève les petites calottes, tout reprend parfaitement son aspect liquide.

On le voit donc, ces apparences de membranes sont simplement dues à une énorme viscosité des couches superficielles, et non à la génération d'une véritable pellicule solide. Voici encore quelques faits singuliers dépendant des mêmes causes:

On gonfle, à l'orifice de la pipe, une bulle d'environ 6 centimètres de diamètre, puis on aspire par le tuyau; la bulle alors, au lieu de revenir sur elle-même dans tous les sens, ne diminue que dans le sens latéral, et, si l'on arrête à temps l'aspiration, se transforme en un cône ayant l'orifice pour base. La surface de ce cône est d'abord ridée, puis devient parfaitement unie, et la lame persiste ensuite dans le même état avec sa forme conique.

On dépose à la surface du liquide une bulle d'environ 4 centimètres de diamètre, et, maintenant l'orifice de la pipe en contact avec la calotte dans laquelle cette bulle s'est transformée, on souffle pour en augmenter les dimensions, jusqu'à ce qu'elle se brise. Aussitôt la lame s'affaisse sur le liquide en plusieurs grandes portions, dont chacune demeure séparée de la surface du liquide par une lame d'air, et se rapetisse peu à peu comme si elle rentrait dans la masse par la portion de son bord restée adhérente, en employant plusieurs secondes à effectuer ce retrait. Quand tout a disparu, la surface se

montre aussi parfaitement liquide qu'auparavant.

La solution de saponine est certainement le liquide qui fournit la mousse la plus abondante, et peut-être la plus persistante: il suffit de dissoudre dans l'eau 1/4000 bonne saponine pour que le liquide, agité dans un flacon, donne encore une mousse de 35mm de hauteur, qui exige plusieurs jours pour son annulation complète. D'autre part, l'alcool n'exerce aucune action chimique sur la saponine; il ne la dissout même, à froid, en quantité notable qu'à la faveur de l'eau. Or, si l'on ajoute à une solution de saponine un volume égal d'alcool, l'agitation ne développe plus sur le mélange qu'une mousse à peine sensible, qui disparaît presque instantanément. C'est que l'excès négatif de l'alcool neutralise complètement l'excès positif de la saponine.

§ 279. J'ai dit ci-dessus qu'une solution de bonne saponine à 1/4000 développe encore, par l'agitation, une mousse abondante et persistante; mais ce liquide refuse de se laisser gonfler en bulles à l'orifice d'une pipe; c'est donc un second exemple à ajouter à celui que présente (§ 249) la solution de gomme arabique à 1/10, d'un liquide fournissant une mousse assez volumineuse et très durable, et refusant de se façonner en bulles.

En parlant (§ 161) de la formule à laquelle arrive Dupré pour exprimer la vitesse de retrait d'une lame liquide qui se brise, j'ai avancé que cette formule faisait abstraction d'un élément important auquel Dupré ne pouvait avoir égard, et qui devait, pour certains liquides, rendre les résultats très inexacts; l'élément dont il s'agit est la viscosité superficielle; nous avons vu plus haut, en effet, que la viscosité superficielle d'une solution de saponine exerce une telle influence sur le phénomène, qu'une lame de cette solution peut exiger plusieurs secondes pour son retrait.

§ 280. La viscosité intérieure d'une solution de bonne saponine à est, on l'a vu, à fort peu près égale à celle de l'eau pure, bien que cette solution donne, à l'orifice d'une pipe, des bulles de 12 centimètres de diamètre; on peut conclure aussi des valeurs de la durée à l'intérieur dans les séries comparatives du § 275, malgré la petite divergence qui s'y rencontre, que la viscosité intérieure de la solution de savon de Marseille à 1/40 l'emporte fort peu sur celle de l'eau pure; et cependant, avec cette solution, on gonfle, à l'orifice d'une pipe, des bulles de plus de 25 centimètres de diamètre. Ajoutons qu'on forme encore des bulles de 10 centimètres avec une solution à 1/500 du même savon, liquide dont la viscosité intérieure ne peut évidemment différer d'une manière appréciable de celle de l'eau; si, en outre, nous nous rappelons que des liquides très visqueux, tels que l'huile d'olive, la glycérine et une solution de gomme, auxquels on peut ajouter la mélasse et le sirop de glucose pur ou dilué, sont complètement impropres à la génération des bulles, nous ne pourrions conserver aucun doute sur l'erreur de l'opinion accréditée qui attribue à la viscosité ordinaire la propriété des liquides qui se laissent aisément développer en bulles volumineuses.

Cependant l'influence de la viscosité intérieure n'est pas tout à fait nulle, surtout à l'égard des lames de la première et de la troisième catégorie. Dans celles de la deuxième, les deux couches superficielles ayant plus de mobilité moléculaire que la couche interposée, la descente du liquide s'effectue principalement par les premières, et le plus ou moins de viscosité de la couche interposée doit avoir peu d'effet; c'est ainsi que les lames d'huile s'atténuent avec une extrême rapidité (§ 247), malgré la forte viscosité intérieure du liquide. Mais dans les lames de la première et de la troisième catégorie, où la mobilité moléculaire est moindre, dans les couches superficielles que dans la couche interposée, celle-ci participe nécessairement davantage à la descente, et sa viscosité doit intervenir jusqu'à un certain point; nous en verrons plus loin (§ 294 et

298) des exemples.

§ 281. La solution d'albumine, préparée comme je l'ai indiqué (cinquième note du § 248), présente, bien qu'à un degré moins prononcé, des propriétés analogues à celles de la solution de saponine : sur la surface, l'aiguille, laissée libre à 90° du méridien magnétique, a employé environ trois quarts d'heure à décrire un angle de 35°, et n'a pas été plus loin; à l'intérieur, la durée du parcours des 85° n'a été que de 9'',77.

La viscosité superficielle de ce liquide, quoique moins énorme que celle de la solution de saponine, est donc encore extrêmement énergique; aussi quand les bulles atteignent 11 à 12 centimètres, elles donnent des membranes semblables à celles des bulles de saponine.

Si l'on ajoute à notre solution d'albumine 10 fois son volume d'eau distillée, le mélange fournit encore une mousse abondante et très persistante, mais on ne parvient plus à le façonner en bulles, ce qui constitue un troisième exemple analogue à ceux que j'ai déjà signalés; j'essaierai plus loin (§ 304) d'expliquer ce singulier phénomène.

Je n'ai pas opéré avec l'aiguille sur la solution d'acétate de fer; je n'en avais à ma disposition qu'une trop petite quantité.

§ 282. Ainsi les résultats obtenus avec l'aiguille aimantée à l'égard des quinze liquides que j'ai soumis à ce genre d'essai, confirment pleinement les déductions tirées (§ 252) des expériences sur les calottes laminaires; on peut donc, je pense, regarder comme bien établi le principe suivant:

La couche superficielle des liquides a une viscosité propre, indépendante de la viscosité de l'intérieur de la masse; dans certains liquides, cette viscosité superficielle est plus forte que la viscosité intérieure, et souvent de beaucoup, comme dans l'eau et surtout dans ne solution de saponine; dans d'autres liquides elle est, au contraire, plus faible que la viscosité intérieure, et souvent aussi de beaucoup, comme dans l'essence de térébenthine, l'alcool, etc.

§ 283. Descartes paraît être le premier qui ait avancé l'idée d'une viscosité superficielle propre; il s'exprime ainsi¹⁶⁴ :

«La superficie de l'eau est beaucoup plus malaysée à diuiser que n'est le dedans, ainsi qu'on void par expérience en ce que tous les corps assez petits, quoyque de matière fort pesante, comme sont de petites aiguilles d'acier, peuvent flotter et estre au-dessus, lorsqu'elle n'est point encore diuisée, au lieu que lorsqu'elle l'est, ils descendent iusques au fonds sans s'arrester. »

Descartes explique par là comment, lorsque l'eau de mer s'évapore, les cristaux de sel flottent à sa surface.

§ 284. Plus tard, d'après les recherches de Petit¹⁶⁵ (année 1731), on attribua le phénomène des aiguilles flottantes à la présence d'une couche d'air adhérente à leur surface; mais, en 1806, Rumford communiqua, à l'Académie des Sciences de Paris, un Mémoire¹⁶⁶ où il cherche à prouver que la couche d'air n'a aucune influence, et qu'à la surface de l'eau existe une pellicule résistante qui soutient l'aiguille. Quant à l'origine de cette pellicule, il dit simplement : « Si les molécules d'eau adhèrent fortement l'une à l'autre, une suite nécessaire de cette adhésion doit être, ce me semble, la formation d'une espèce de peau à la surface de ce liquide. »

Les expériences de Rumford consistent surtout à recouvrir l'eau d'une couche d'un autre liquide convenable; tel que l'essence de térébenthine, et à laisser tomber à travers

¹⁶⁴ *Les Météores*. Leyde, 1638; page 187 du vol. V des Œuvres de Descartes publiées par Victor Cousin.

¹⁶⁵ *De l'adhérence des parties de l'air entre elles, et de leur adhérence au corps, qu'elles touchent* (Mém. de l'Acad. des Sc. de Paris, 1731, p. 50).

¹⁶⁶ *Expériences et observations sur l'adhésion des molécules de l'eau entre elles* (Mém. de l'Acad. des Sc. de Paris, 2me semestre de 1807, p. 97).

cette couche les petits corps pesants; ceux-ci s'arrêtent à la surface de l'eau, et y demeurent flottants.

§ 285. En 1806 également, et plus tard en 1814, Link¹⁶⁷ explique le phénomène de la même manière; mais, tandis que Rumford n'avait parlé que de l'eau, il étend la même conception à tous les liquides. Il considère l'apparence de pellicule comme due à ce que les molécules de la surface n'étant attirées que d'un côté, cette inégalité d'action engendre un obstacle aux déplacements.

Link déduit de là une curieuse théorie: il se dit que si un liquide était modifié de manière à présenter un très grand nombre de surfaces au lieu d'une seule, sa mobilité serait considérablement diminuée; et remarquant que les solides sont composés de fibres ou de lamelles, ou, plus généralement, de très petites parties distinctes, il en conclut que c'est uniquement à cette circonstance qu'il faut attribuer l'état solide; selon lui, si l'on pouvait établir un contact intime entre toutes les petites parties qui constituent un solide, on transformerait celui-ci en liquide, car alors, par suite de l'arrangement uniforme des molécules, chacune d'elles se trouverait également attirée dans tous les sens, et conserverait ainsi une complète mobilité, du moins dans l'intérieur de la masse. On verra (§ 321) qu'une opinion analogue sur la constitution des solides avait déjà été émise par Leidenfrost.

§ 286. Dans un Mémoire¹⁶⁸ publié en 1808, Prechtl adopte les idées de Link sur la viscosité superficielle des liquides, et, pour prouver l'existence de la pellicule à la surface de l'eau, il décrit quelques nouvelles expériences, dont voici la plus concluante:

On dépose sur la surface de l'eau un morceau de ressort de montre, qui y flotte comme les aiguilles; puis, après avoir répandu sur le liquide une légère couche d'une poudre fine, on imprime, au moyen de l'action à distance d'un barreau aimanté, un mouvement de rotation au morceau de ressort, et l'on constate, par le déplacement des grains de poudre, que toute la surface de l'eau tourne en même temps. Rumford avait fait une expérience qui semblait indiquer aussi un mouvement de toute la surface liquide; mais on pouvait y voir l'influence de causes étrangères; celle de Prechtl est, au contraire, parfaitement nette.

Pichard a présenté¹⁶⁹, en 1824, sur le phénomène des aiguilles flottantes, des observations parmi lesquelles une seule a de l'intérêt pour notre travail; elle consiste en ce que l'auteur a fait flotter ainsi plus de quarante aiguilles, qui, en se juxtaposant, formaient un petit radeau.

La même année, Gillieron a traité aussi la question des aiguilles flottantes¹⁷⁰; il adopte les idées de Rumford, mais n'apporte aucun argument nouveau en faveur de l'existence de la pellicule. Dans sa Note de 1841, dont il a été question au § 123, de Maistre donne, de l'apparence de pellicule à la surface de l'eau, la même explication que Link.

§ 287. M. Artur, dans un ouvrage¹⁷¹ qui a paru en 1842, arrive, par des considérations théoriques qu'il est inutile de reproduire ici, à regarder la couche superficielle de tous les liquides comme ayant plus de densité et plus de cohésion que l'intérieur, et comme présentant, par suite, une certaine résistance. D'après les seules lois de

¹⁶⁷ *Ueber Naturphilosophie*. Leipzig, 1806; voir aussi: *Ueber Festigkeit und Flüssigkeit* (Ann. de Gilbert, 1807, vol. XXV, p. 133), et *Theorie der Flüssigkeit und Festigkeit*, etc. (Ibid., 1814, vol. XLVII, p. 1).

¹⁶⁸ *Theorie der Krystallisation* (Gehlen, Journal für die Chemie, Physik und Mineralogie, vol. VII, p. 455).

¹⁶⁹ *Considérations sur les phénomènes que présentent de petites aiguilles coudre, posées doucement et dans une situation horizontale, sur la surface d'une eau tranquille* (Biblioth. Univ., t. XXV, p. 273).

¹⁷⁰ *Sur les mouvements de certains corps flottants sur l'eau* (ibid., t. XXVI, p. 190, et t. XXVII, p. 207).

¹⁷¹ *Théorie élémentaire de la capillarité*. Paris.

l'hydrostatique, le volume du creux formé à la surface de l'eau par une aiguille qui flotte, devrait excéder six fois celui de l'aiguille, la densité de l'acier étant 7,8; or M. Artur a estimé et fait estimer par d'autres le volume de ce creux, et la plus forte évaluation ne l'a porté qu'au triple de celui de l'aiguille.

§ 288. Ainsi que je l'ai dit (§ 152), M. Hagen a généralisé aussi, en 1845, l'idée d'une moindre mobilité, et celle d'une plus grande densité, dans la couche superficielle des liquides; il s'appuie sur ce que, dans un cours d'eau, la vitesse est plus faible à la surface qu'un peu au-dessous, et sur la production des calottes laminaires par l'ascension de bulles gazeuses; mais le premier de ces faits ne se rapporte qu'à l'eau, et le second ne peut être invoqué, puisque les calottes laminaires se forment parfaitement sur l'alcool, sur l'essence de térébenthine, etc., liquides dans lesquels la couche superficielle est, au contraire, nous le savons maintenant, plus mobile que l'intérieur.

§ 288bis. Dans le Mémoire (année 1865) dont j'ai parlé au § 160bis, M. Marangoni, après avoir fait remarquer que, lorsqu'une goutte d'un liquide est susceptible de s'étaler sur le mercure, elle ne le fait qu'avec lenteur malgré la forte tension du mercure, décrit une expérience curieuse d'où l'on peut inférer que ce dernier liquide possède une viscosité superficielle énergique : il dépose sur la surface du mercure un petit morceau de papier mouillé, et constate qu'il est impossible de le faire mouvoir par le souffle de la bouche.

§ 289. En 1866, M. Nägeli¹⁷² conclut d'expériences qu'il a faites sur les colonnes capillaires d'eau, qu'une semblable colonne oppose une certaine résistance au mouvement, indépendante du frottement de la totalité de la colonne contre la paroi intérieure du tube, et qui ne peut provenir que de la couche superficielle du sommet; il admet conséquemment, dans cette couche, une viscosité plus grande qu'à l'intérieur. Il attribue à cette viscosité superficielle le fait remarquable étudié par M. Jamin¹⁷³, et consistant en ce qu'une colonne capillaire d'eau ou de mercure subdivisée en un grand nombre de petites colonnes partielles, exige une force considérable pour son déplacement. Si c'est là la vraie cause de la résistance des colonnes subdivisées, il faut que cette résistance ne se manifeste pas avec les liquides de ma deuxième catégorie; or M. Jamin dit expressément qu'elle est nulle pour l'alcool et pour l'huile; je reviendrai bientôt sur cette question.

M. Nägeli essaie d'expliquer la viscosité plus grande de la couche superficielle, en partant de la théorie de M. Clausius sur la nature des liquides; il regarde conséquemment aussi le fait comme général, c'est-à-dire comme propre à tous les liquides.

§ 290. Enfin, en 1866 encore, M. Stanislas Meunier¹⁷⁴ a été conduit par ses expériences à admettre comme MM. Artur et Hagen, une plus forte densité à la surface de tous les liquides. Les expériences dont il s'agit consistent à suspendre un cylindre solide vertical de manière qu'il soit plongé en partie dans un liquide dissolvant; après quelque temps, le cylindre se trouve coupé en deux au niveau de la surface du liquide, et la portion inférieure, qui n'est que partiellement dissoute, tombe au fond du vase. Cependant, quelle que soit la cause de ce singulier phénomène, la viscosité superficielle semble n'y avoir aucune part; j'ai constaté, en effet, qu'un cylindre de colophane est parfaitement coupé par l'essence de térébenthine, bien que, dans ce liquide, la viscosité superficielle soit (§§268 et 274) moindre que la viscosité intérieure.

¹⁷² *Ueber die Theorie der Capillarität* (Bullet. de l'Acad. des Sc. de Munich, année 1866, vol. I, p. 597).

¹⁷³ *Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des liquides dans les corps poreux* (Comptes rendus, 1860, tome L, page 172). Voir aussi, pour plus de détails, *Société chimique de Paris, leçons de chimie et de physique professées en 1861 par MM. Jamin, Debray, etc.*, Paris, 1862.

¹⁷⁴ Comptes rendus, tome LXIII, page 265; voir aussi le journal *Le Cosmos*, 1868, 3me série, tome III, pages 635 et 666.

Tel est, à ma connaissance, l'ensemble de ce qui a été fait avant 1870 à l'égard de la viscosité superficielle. On voit actuellement ce que le principe énoncé dans le § 282, principe déduit d'expériences directes, présente de particulier, et par quel point essentiel il diffère de ceux des physiciens dont je viens de résumer les recherches¹⁷⁵.

§ 291. Le principe en question étant, je crois, mis hors de doute, reprenons l'étude des relations entre la viscosité superficielle et la tension.

Pour pouvoir apprécier nettement ces relations dans différents liquides, il faudrait avoir un moyen précis de déterminer numériquement les valeurs de la viscosité superficielle, comme on détermine celles de la tension. Ce moyen précis, je l'ai cherché en vain. Après avoir pris connaissance de l'opinion émise par M Nægeli, j'ai cru qu'on pourrait employer les résistances que présentent les colonnes capillaires divisées; mais, à la suite de nombreux essais, j'ai renoncé à ce procédé; aussi ne décrirai-je point l'appareil dont je me suis servi; je dirai seulement que les résistances étaient mesurées à l'aide d'un manomètre à eau.

En effectuant les essais dont il s'agit, j'ai bientôt reconnu que les énormes résistances constatées à l'égard de l'eau par M. Jamin, sont dues, non à la viscosité superficielle, mais à la difficulté qu'éprouvent les index d'eau à se mouvoir dans un tube capillaire dont la paroi intérieure est imparfaitement mouillée: quand la mouillure est complète, les colonnes d'eau divisées ne manifestent que des résistances très faibles. Je suis parvenu à obtenir une bonne mouillure en remplissant le tube capillaire d'une solution très concentrée de potasse caustique, le laissant en cet état pendant vingt-quatre heures, puis le vidant, et lavant soigneusement l'intérieur à l'eau distillée; on y introduisait alors les petits index de ce liquide, et, immédiatement avant d'évaluer la résistance, on faisait marcher plusieurs fois en avant et en arrière la colonne d'index. Dans ces conditions, et avec un tube dont le diamètre intérieur était d'environ 1/3 de millimètre, la résistance correspondante à 100 index a été trouvée équivaloir simplement à la pression d'une hauteur d'eau de 6mm,4; la température de la chambre était de 17°. Dans mon appareil, on ne pouvait guère porter le nombre des index au delà de 70; mais comme la résistance doit évidemment être proportionnelle au nombre des index, on calculait par une proportion celle qui correspondait à 100 index.

Si, au lieu de prendre immédiatement la mesure, on attendait deux minutes, la résistance devenait beaucoup plus grande: on l'a trouvée, dans cette circonstance, toujours pour 100 index, de 44mm environ. C'est que, par suite de leur forte courbure concave, les surfaces terminales des index exercent, sur la couche d'eau qui mouille le tube entre elles, une succion énergique qui fait rapidement disparaître cette couche; aussi ne suis-je pas certain que la résistance 6mm,4 ne soit pas encore un peu trop grande, car, pendant les petits tâtonnements qu'exige la mesure, l'absorption de la couche en question a déjà dû commencer.

Dès 1861, M. Bède avait montré¹⁷⁶ par d'ingénieuses expériences, que lorsqu'un liquide est soulevé dans un tube capillaire préalablement mouillé, la mince couche qui humecte la paroi au-dessus de la colonne ne se maintient pas, et l'expérience ci-dessus confirme pleinement ce résultat.

Maintenant si la faible résistance manifestée par l'eau dans le cas d'une bonne mouillure était due, en tout ou en partie, à la viscosité superficielle, on devait trouver, dans les mêmes conditions, des résistances de beaucoup supérieures avec des solutions de saponine et d'albumine, et c'est ce qui a eu lieu en effet: pour une solution de

¹⁷⁵ Pour les recherches postérieures à 1869, voir les articles inscrits, au § 508 sous les n° 1, 5, 7, 25 et 35.

¹⁷⁶ *Recherches sur la capillarité* (Mém. de l'Acad. de Belgique, tome XXX des Mém. couronnés et des savants étrangers, p. 143 du Mémoire).

saponine à 1/60, la résistance correspondante à 100 index a été de 90mm; et ici encore, après avoir attendu deux minutes, elle s'était considérablement accrue, et atteignait, pour ce même nombre d'index, 440mm à peu près; la température était de 18°. Quant à la solution d'albumine (voir la cinquième note du § 248), sa résistance aurait dû être moindre que celle de la solution de saponine; or elle s'est montrée, au contraire, beaucoup plus considérable : en introduisant dans le tube deux index seulement, on n'est parvenu à les déplacer qu'au moyen d'une pression d'environ 37mm, ce qui donne, pour 100 index, 1850mm; température 18°.

La faiblesse de la résistance avec l'eau, les erreurs qui peuvent résulter de l'absorption rapide de la couche mouillante, enfin le désaccord entre les résultats ci-dessus et ceux des expériences avec l'aiguille aimantée en ce qui concerne les solutions de saponine et d'albumine, ne permettent guère, on le voit, d'attribuer une confiance suffisante au procédé des colonnes capillaires divisées ; j'en reviens donc à celui que j'ai exposé dans ma 8me série, bien qu'il ne donne qu'une approximation sans doute assez grossière, et qu'on ne puisse l'employer avec tous les liquides.

§ 292. Il est fondé sur la comparaison des durées respectives du parcours de l'aiguille aimantée sur la surface et à l'intérieur du liquide.

Dans les liquides qui possèdent une viscosité superficielle extrêmement énergique, comme les solutions de saponine et d'albumine, la durée sur la surface est infinie, de sorte que le rapport à la durée intérieure est également infini; dans les liquides de la deuxième catégorie, où la viscosité superficielle est, au contraire, très faible, le rapport de la durée extérieure à la durée intérieure n'est qu'une fraction; enfin dans les liquides tels que l'eau, où la viscosité superficielle est modérée, le rapport est plus grand que l'unité, mais fini. Ainsi, bien que les rapports dont il s'agit ne puissent évidemment servir de, mesuré exacte aux viscosités superficielles, on doit reconnaître qu'ils en dépendent, et l'on peut admettre que lorsqu'ils présentent une différence notable d'un liquide à un autre, il y a aussi, en général, une différence de même sens entre les viscosités superficielles de ces liquides.

Cela posé, cherchons les valeurs du rapport en question pour tous les liquides de la première et de la troisième catégorie à l'égard desquels nous en avons mesuré les éléments.

Pour l'eau distillée, les rapports déduits des expériences des §§262 et 275 sont 1,94, 1,91 et 1,96; de plus, lorsque j'ai comparé la solution de saponine à l'eau distillée (§ 278), les durées moyennes sur la surface et à l'intérieur de ce dernier liquide ont été respectivement 4",99 et 2",66, d'où le rapport 1,88; la moyenne des quatre rapports est donc 1,92.

Dans le calcul du rapport relatif à la glycérine de Price, on n'a employé, pour la surface, que la première des deux durées indiquées dans le § 263; des expériences antérieures m'avaient appris, en effet, qu'avec ce liquide, les durées sur la surface vont toujours quelque peu en décroissant, à cause sans doute d'une petite absorption de vapeur d'eau, à laquelle on n'obvie pas complètement par l'enduit de glycérine appliqué à l'intérieur de la cloche. On a ainsi, pour le rapport en question, la valeur 1,85.

On a de même, par les éléments donnés dans les § 264 à 266:

pour la solution de carbonate de soude	1,75,
— celle d'azotate de potasse	1,85,
— celle de chlorure de calcium	1,74.

A l'égard des liquides de la troisième catégorie, on obtient:

pour la solution de savon de Marseille, par les résultats des deux séries du § 275, les rapports 1,87 et 1,78, moyenne.	1,82,
pour la solution de savon de ménage (§ 276)	1,85,
— celle de savon de colophane (S 277)	1,63.

Quant aux solutions de saponine et d'albumine, nous savons que les rapports qui les concernent ont dès valeurs infinies.

§ 293. Examinons actuellement tous ces rapports de plus près, et voyons quelles conséquences on peut en déduire. Le rapport 1,85 de la glycérine de Price est assez peu inférieur au rapport 1,92 de l'eau distillée; cependant il ne faudrait pas en conclure que la viscosité superficielle de la glycérine est voisine de celle de l'eau, l'énorme différence des viscosités intérieures de ces deux liquides introduisant un élément considérable d'erreur au point de vue de la comparaison des rapports. En effet, à cause de la résistance énergique opposée par la viscosité intérieure de la glycérine, l'aiguille ne conserve, tant sur la surface qu'à l'intérieur de cette substance, qu'une très petite portion de sa force directrice; mais dès lors un excès superficiel peu intense devient très grand relativement à ce faible reste de force, et conséquemment doit diminuer beaucoup la vitesse de l'aiguille sur la surface; or la viscosité de la couche superficielle pouvant être regardée comme égale à la viscosité intérieure plus l'excès positif, on voit qu'avec une viscosité intérieure très forte et un excès positif très petit, ce dernier pourrait passer du simple au double ou au triple sans que la viscosité superficielle totale changeât beaucoup, tandis que le rapport des durées subirait, au contraire, de très grandes variations. Ainsi, comme je l'ai dit, dans le cas d'un liquide très visqueux, le rapport des durées ne fournit plus d'indication immédiate sur l'intensité de la viscosité superficielle.

Un moyen simple se présentait pour vérifier ces déductions et s'assurer si la grande valeur du rapport de la glycérine est illusoire. Ce moyen consistait : ajouter de l'eau à la glycérine pour amoindrir suffisamment la viscosité intérieure, et à soumettre le mélange à l'essai de l'aiguille. Or, avec un mélange à volumes égaux de glycérine et d'eau distillée, les durées ont été sur la surface, 10'',93, et, à l'intérieur, 7'',07; le rapport est donc 1,54; il est, on le voit, fort au-dessous de 1,92 appartenant à l'eau; et comme la viscosité intérieure est à peu près du même ordre que dans nos autres liquides, le rapport ci-dessus devient comparable à ceux de ces derniers et nous pouvons en conclure que la viscosité superficielle du mélange en question est très notablement inférieure à celle de l'eau.

Allons plus loin la couche superficielle de ce même mélange étant nécessairement composée, comme le reste de la masse, de volumes égaux de glycérine et d'eau, le rapport 1,54 trouvé plus haut peut être regardé comme ne s'écartant guère de la moyenne entre les deux valeurs qu'on obtiendrait, d'une part, si la couche superficielle seule du liquide était formée de glycérine pure, et, d'autre part, si cette même couche était formée d'eau pure; or, dans ce second cas, le rapport s'éloignerait évidemment peu de 1,92 correspondant à l'eau, la viscosité intérieure de notre mélange ne surpassant pas assez celle de l'eau pour introduire un changement bien notable. Si, d'après cela, nous conservons, pour le second cas, la valeur 1,92, et si nous désignons par x celle que donnerait le premier, nous pourrions poser $\frac{x+1,92}{2} = 1,54$, d'où $x = 1,16$. Tel est donc approximativement le rapport de la glycérine de Price quand on écarte l'influence de la forte viscosité de l'intérieur de la masse, et il nous apprend qu'il faut regarder la viscosité superficielle de cette substance comme étant, en réalité, beaucoup moindre que celle de l'eau.

§ 294. Le rapport 1,63 du savon de colophane est aussi assez inférieur à celui de

l'eau; or les expériences du § 248, en nous montrant que ce liquide, du moins tel que je l'ai préparé, donne des calottes qui n'ont jamais de phase incolore, nous ont fait connaître que sa viscosité superficielle, bien qu'à excès positif, est peu énergique; il y a donc ici concordance entre les indications fournies par les rapports et celles qu'on déduit de résultats plus nettement interprétables.

D'un autre côté, le rapport 1,16, que nous avons obtenu d'une manière indirecte et que nous avons été conduits à regarder comme donnant une idée de la vraie viscosité superficielle de la glycérine de Price, est bien plus encore au-dessous de celui de l'eau, et cependant les calottes de glycérine, même celles qui ont duré long temps (§ 246), n'ont manifesté aucune coloration générale; en outre, les rapports 1,75 et 1,74 des solutions de carbonate de soude et de chlorure de calcium sont inférieurs aussi à celui de l'eau, bien que de moindres quantités; or, tandis que dans les calottes d'eau qui se sont moirées de rouge et de vert la phase blanche n'a été au maximum que de 13'', le carbonate de soude a donné des calottes qui n'ont éclaté qu'après 26'' sans qu'on y observât de trace de couleurs, et les calottes de chlorure de calcium ne se sont moirées qu'après 100'' au moins (ibid.); à l'égard des trois liquides ci-dessus, il semble donc y avoir contradiction entre les indications des rapports et celles des calottes; mais je vais montrer que cette contradiction n'est qu'apparente.

J'ai appelé l'attention (§ 280) sur une petite influence de la viscosité intérieure dans les lames de la première et de la troisième catégorie; or il est rationnel d'attribuer à cette influence le désaccord ci-dessus; on comprend, en effet, que, dans les calottes de glycérine, la forte viscosité intérieure ralentit assez la descente du liquide, malgré le peu d'énergie de la viscosité superficielle comparée à celle de l'eau, pour que la rupture ait lieu avant l'apparition d'aucun moiré. La durée du parcours de l'aiguille à l'intérieur de la solution de carbonate de soude a (§ 264) pour partie entière 4'', tandis qu'à l'intérieur de l'eau (§ 262 et 275), la partie entière n'a jamais été que de 2''; la viscosité intérieure de la solution dont il s'agit excède donc celle de l'eau, ce qui explique pourquoi, après 26'', les calottes n'avaient pas encore de moiré; enfin la viscosité intérieure de la solution de chlorure de calcium est plus grande encore, puisque la partie entière de la durée est (§ 266) de 8'', ce qui rend raison des 100'' de phase incolore.

Prenons maintenant, parmi les liquides à l'égard desquels nous avons pu évaluer les rapports, ceux dont la viscosité intérieure est très voisine de celle de l'eau. Il y en a trois, savoir les solutions d'azotate de potasse, de savon de Marseille et de savon mou de ménage; pour chacun d'eux, en effet, la partie entière de la durée à l'intérieur est, comme pour l'eau, de 2''. Les rapports 1,85, 1,82 et 1,85 qui leur appartiennent respectivement diffèrent assez peu de celui de l'eau, d'où nous inférerons que les viscosités superficielles de ces mêmes liquides approchent aussi de celle de l'eau; or, dans les calottes d'eau, la phase blanche qui a précédé le moiré a été de 10'' à 13'', dans celles de savon de Marseille elle a été de 6'' à 20'', dans celles de savon mou de ménage, de 5'' à 14'' (§§246 et 248), et l'on peut évidemment, à travers leurs irrégularités, reconnaître qu'elles sont de même ordre. Quant aux calottes d'azotate de potasse, elles n'ont pas donné de moiré, mais leur persistance n'ayant pas dépassé 6'', nous ignorons si leur phase blanche n'aurait pas été analogue. L'accord entre les rapports et les calottes reparaît donc quand les viscosités intérieures sont sensiblement égales. Ainsi, comme je l'ai avancé, la contradiction que j'ai signalée à l'égard de trois liquides n'est pas réelle; elle provient simplement de l'influence de la viscosité intérieure.

Comme exemple encore de cette influence, je rappellerai que, dans les calottes de la solution d'albumine, la phase incolore a été beaucoup plus longue que dans celles de

la solution de saponine, bien que (§§278 et 281) la viscosité superficielle du premier de ces liquides soit moins énergique que celle du second; c'est que le contraire a lieu à l'égard des viscosités intérieures, les durées du parcours de l'aiguille à l'intérieur de ces in liquides ayant respectivement pour parties entières 9'' et 2''. J'ai rappelé aussi, dans le § 258, la grande longueur de la phase blanche dans les calottes de la solution d'albumine pour montrer, déjà alors, que la viscosité superficielle de cette solution remporte de beaucoup sur celle de la solution de chlorure de calcium; mais j'en avais le droit, car si, dans ces deux liquides, les phases blanches diffèrent considérablement, d'autre part les viscosités intérieures sont très rapprochées, les parties entières de la durée à l'intérieur étant respectivement 8'' et 9''.

§ 295. Avant de faire usage de nos rapports, présentons encore une remarque. Puisque ces rapports deviennent infinis pour des viscosités superficielles très intenses mais finies, comme celles des solutions de saponine et d'albumine, on doit en inférer qu'ils varient suivant une loi plus rapide que les viscosités superficielles; or, abstraction faite des rapports excessifs de la saponine et de l'albumine, tous sont moindres que celui de l'eau; si donc nous prenons toujours ce dernier liquide comme type, et si, adoptant le rapport 1,92 qui lui appartient pour représenter sa viscosité superficielle, nous voulons conclure des rapports des autres liquides aux viscosités superficielles de ceux-ci, il semble qu'il faut les considérer tous comme trop faibles, et que, pour en déduire les viscosités en question, on devrait les augmenter un peu, et d'autant plus qu'ils sont plus petits. Mais, d'un autre côté, dans tous nos liquides, la viscosité intérieure l'emporte sur celle de l'eau; pour les uns l'excès est extrêmement faible, et pour d'autres il est notable (j'écarte ici la glycérine, sur laquelle je reviendrai); le raisonnement que nous avons fait (§ 293) à l'égard du rapport immédiat de la glycérine, est donc applicable à tous, c'est-à-dire que, pour qu'ils pussent représenter les viscosités superficielles, il faudrait, d'après ce même raisonnement, les diminuer un peu, et d'autant plus que la viscosité intérieure est plus forte. Pour adapter nos rapports aux viscosités superficielles, il faudrait conséquemment leur faire subir deux petites corrections en sens contraires, lesquelles se compenseraient ainsi partiellement.

Afin de mieux apprécier les choses, plaçons en regard des rapports les parties entières de la durée à l'intérieur; nous aurons de cette manière le tableau qui suit:

LIQUIDES.	PARTIE ENTIERES DE LÀ DURÉE.	RAPPORTS.
Eau	2''	1,92
Solution de savon de Marseille	2	1,82
— de savon de ménage	2	1,85
— d'azotate de potasse	2	1,85
— de carbonate de soude	4	1,75
— de savon de colophane	4	1,63
— de chlorure de calcium	8	1,74

Il nous montre d'abord que les trois rapports les plus rapprochés de celui de l'eau appartiennent aux liquidés dont la viscosité intérieure est aussi très voisine de celle de l'eau; les deux corrections opposées que chacun, d'eux devrait subir seraient donc l'une et l'autre fort petites, et, après leur compensation partielle, les rapports dont il s'agit seraient, sans doute à peine modifiés. Pour les trois autres liquides, les rapports étant plus notablement inférieurs à celui de l'eau, et les viscosités intérieures étant un

peu plus fortes, les corrections seraient toutes deux plus grandes, et conséquemment, après leur compensation, les rapports ne seraient pas beaucoup altérés.

Quant à la glycérine, le rapport 1,54 que l'expérience nous a donné directement pour un mélange à volumes égaux de glycérine et d'eau, est plus encore au-dessous de celui de ce dernier liquide; mais, d'autre part, comme la partie entière de la durée à l'intérieur est de 7'', on peut aussi admettre une compensation plus ou moins approchée, et considérer le rapport dont il s'agit comme correspondant sans trop d'erreur à la viscosité superficielle du mélange; or cette viscosité doit être moyenne entre celle de la glycérine pure et celle de l'eau pure; pour avoir le rapport correspondant à la première, il faut donc refaire identiquement le calcul du § 293, et l'on retrouve ainsi le nombre 1,16, qui peut dès lors être adopté pour représenter approximativement la valeur relative de la viscosité superficielle de la glycérine de Price.

§ 296. Après toute cette discussion, l'on m'accordera, j'espère, qu'à défaut de moyen de mesure plus précis, nous pouvons, sans trop de témérité, considérer nos rapports comme exprimant, d'une manière approchée, les viscosités superficielles relatives des liquides, en écartant, bien entendu, les rapports infinis, et en prenant, pour la glycérine, le rapport corrigé 1,16. Il ne nous reste donc plus qu'à comparer aux tensions les viscosités superficielles ainsi évaluées.

Seulement, pour que ces nouveaux rapports ne soient point de simples fractions, nous représenterons par 100 la viscosité superficielle de l'eau; une simple proportion nous donnera alors, pour chaque liquide, la viscosité superficielle dans le même système d'unités. Pour la glycérine, par exemple, nous poserons: $1,92 : 1,16 = 100 : y$, d'où $y = 60,42$. Avec les nombres ainsi obtenus, nous formerons les deux tableaux suivants:

PREMIÈRE CATÉGORIE.

LIQUIDES.	VISCOSITÉS SUPERFICIELLES	TENSIONS DES LAMES	RAPPORTS DES VISCOSITÉS SUPER- FICIELLES AUX TENSIONS.
Eau ^a	100,00	14,60	6,85
Glycérine de Price	60,42	8,00	7,55
Solution saturée de carbo- nate de soude	91,14	8,56	10,65
Solution saturée d'azotate de potasse	96,35	11,22	8,59
Solution saturée de chlo- rure de calcium	90,62	11,06	8,19

^a On a vu (§ 169) qu'en employant un nouveau procédé, M. Quincke a trouvé, pour la tension de la surface de l'eau, la valeur 8,253, ce qui donnerait, pour la tension des lames de ce liquide, 16,506; M. Quincke regarde son procédé comme plus exact que ceux de ses devanciers; mais comme il n'a pas déterminé les tensions des autres liquides qui entrent dans mes tableaux, et comme d'ailleurs nous n'avons besoin ici que de valeurs relatives, j'ai cru devoir conserver pour l'eau celle déduite des anciennes méthodes. Du reste, - si l'on adoptait la valeur 16,506, elle ne ferait que rendre plus petit encore le rapport appartenant à l'eau.

TROISIÈME CATÉGORIE.

LIQUIDES.	VISCOSITÉS SUPERFICIELLES	TENSIONS DES LAMES	RAPPORTS DES VISCOSITÉS SUPER- FICIELLES AUX TENSIONS.
Solution de savon de Mar- seille à 1/40	94,79	5,64	16,81
Solution de savon mou de ménage à 1/30	96,35	6,44	14,96
Solution de savon de colo- phane à base de potasse.	84,89	7,68	11,05
Solution de saponine à 1/100	Nondéterminée, mais extrêmement forte.	8,74	Nondéterminé, mais très grand.
Solution d'albumine	Id.	11,42	Id.

§ 297. On le voit donc à l'inspection de ces deux tableaux: en premier lieu, les rapports de la viscosité superficielle à la tension sont tous plus grands à l'égard de ceux de nos liquides qui appartiennent à la troisième catégorie, c'est-à-dire qui donnent des bulles et une mousse volumineuses, qu'à l'égard de ceux qui appartiennent à la première et ne donnent conséquemment ni bulles à l'orifice d'une pipe, ni beaucoup de mousse; de plus, sauf pour un seul, l'excès est considérable.

En second lieu, parmi les liquides du premier tableau, celui pour lequel le rapport a la valeur la plus élevée est la solution de carbonate de soude; aussi, de ces cinq liquides, c'est celui qui fournit, par l'agitation dans un flacon, la mousse la plus apparente: elle atteint un centimètre de hauteur, et emploie plus d'une heure à disparaître totalement; on peut donc conjecturer que si la solution saturée de carbonate de soude est impropre à former des bulles à l'orifice d'une pipe, elle est moins éloignée d'en donner que les quatre autres liquides. D'ailleurs, si les liquides de ce premier tableau refusent de se laisser gonfler en bulles à un orifice évasé, ils en donnent de petites à l'extrémité d'un tube étroit; or, en employant un tube en verre de près de 6mm de diamètre extérieur et de 1mm de diamètre intérieur, et en opérant à la température de 19°, les bulles formées ont présenté les diamètres qui suivent; chacun d'eux est le plus grand qui se soit montré dans un nombre assez considérable d'essais successifs:

Eau	7mm,5,
Glycérine	8,
carbonate de soude	14,
azotate de potasse	8,
chlorure de calcium	9;

et l'on voit que les bulles de carbonate de soude sont de beaucoup les moins petites.

En troisième lieu, celui des liquides du second tableau qui présente le plus petit rapport, est la solution de savon de colophane, et c'est aussi celui qui m'a fourni les bulles les moins grosses: j'ai effectué plusieurs préparations successives de ce liquide avec les mêmes substances, dans les mêmes proportions, et en employant le même procédé, mais, je ne sais pourquoi, ces préparations se sont montrées de moins en moins bonnes; la solution avec laquelle ont été faits les essais à l'aiguille (§ 277), essais dont on a déduit le nombre qui, dans le tableau, représente la viscosité superficielle, ne m'a donné que des bulles de 9 centimètres au maximum, tandis qu'avec les solutions de savon de Marseille et de savon de ménage, on obtient 25 centimètres, et, avec celles

d'albumine et de saponine, 13 centimètres Les résultats de nos deux tableaux sont donc bien d'accord avec la théorie exposée dans les §§258 et 259. Il y a, du reste, une petite incertitude à l'égard du savon de colophane la tension 7,68 inscrite dans le tableau n'a pas été mesurée sur la même solution, mais sur une autre, qui résultait d'une préparation précédente, et qui donnait des bulles atteignant 12 centimètres, bien qu'à grand-peine, si mes souvenirs sont exacts.

On remarquera sans doute le peu de différence entre les rapports 10,65 et 11,05 appartenant respectivement à la solution de carbonate de soude, qui ne se laisse pas gonfler en bulles à l'orifice d'une pipe, et à celle de savon de colophane, qui en a donné d'un certain diamètre. Mais ceci encore est une conséquence de notre théorie; en effet, d'après nos tableaux, la viscosité superficielle est moindre dans le second de ces liquides que dans le premier; or il suit de la remarque énoncée à la fin du § 259, que si, avec cette viscosité superficielle assez peu énergique, le rapport 11,05 permet la formation de bulles de médiocre grosseur, ce même rapport, et, à plus forte raison, le rapport un peu moindre 10,65, peut ne plus la permettre avec une viscosité superficielle plus intense.

On comprend aussi, en vertu de la même remarque, pourquoi les bulles des solutions d'albumine et de saponine n'ont pas dépassé 13 centimètres, bien qu'à l'égard de ces liquides les rapports de la viscosité superficielle à la tension soient considérables; c'est que, par suite de l'énergie des viscosités superficielles, les rapports doivent être très grands pour amener la possibilité de bulles volumineuses, et qu'ils ne le sont sans doute pas assez.

Enfin la remarque rappelée nous explique également pourquoi, tandis que les diamètres maxima sont sensiblement les mêmes pour ces deux liquides, le rapport est plus grand à l'égard, du second; c'est que la viscosité superficielle de celui-ci est plus intense encore que celle du premier. Je crois, du reste, qu'avec la solution de saponine, je n'ai pas atteint le vrai diamètre maximum: à l'époque où j'ai cherché ce diamètre, en employant la solution du meilleur échantillon de saponine (§ 278), solution qui a servi à la mesure de la tension, j'ignorais que, pour développer les plus grosses bulles, le liquide devait être parfaitement limpide: si on l'avait rendu tel, on aurait probablement porté le diamètre un peu plus loin.

Quelques-uns des liquides de la première catégorie essayés au point de vue des calottes n'ont pu l'être, nous le savons, au moyen de l'aiguille; cependant, à l'égard du plus important d'entre eux, savoir de l'acide sulfurique, nous pouvons nous assurer, d'une autre manière, que la théorie est satisfaite. Pour qu'elle ne le fût pas, il faudrait que le rapport de la viscosité superficielle à la tension eût une valeur considérable; or la tension des lames d'acide sulfurique est très forte: elle est égale à 12,88, et approche, on le voit, de celle de l'eau; un grand rapport exigerait dès lors une viscosité superficielle beaucoup plus énergique que dans l'eau; mais, comme je l'ai dit à la fin du § 246, celles des calottes de l'acide en question qui n'ont que quelques millimètres de diamètre, durent souvent bien plus longtemps, et manifestent des couleurs: après une phase incolore d'une demi-minute à une minute environ, elles se moient de rose et de vert, et, dans les plus durables, apparaissent ensuite d'autres teintes; maintenant si, à sa forte viscosité intérieure, l'acide sulfurique joignait une viscosité superficielle très-énergique, ces colorations ne pourraient évidemment se produire qu'après des phases blanches bien plus longues; l'acide sulfurique a donc une viscosité superficielle assez faible, quoique à excès positif, et conséquemment le rapport est petit.

Enfin, bien que la solution d'acétate de peroxyde de fer n'ait pu être soumise non plus à l'essai de l'aiguille, il est aisé de faire voir qu'elle satisfait également à la théorie.

La tension de ses lames est 10,2, c'est-à-dire assez forte; or, si l'on ne tient pas compte du rouge et du vert qui apparaissent momentanément au bas de la plupart des calottes pour s'effacer ensuite (§ 248), et qui sont probablement dus à la petite quantité d'acide acétique libre que contient toujours ce composé, l'observation montre (ibid.) que la phase incolore est très longue, et qu'ainsi la viscosité superficielle doit être très intense; le rapport de celle-ci à la tension a donc lui-même une valeur élevée; seulement elle ne l'est vraisemblablement pas assez pour que les bulles puissent parvenir à un grand diamètre.

§ 298. Maintenant que nous connaissons, pour presque tous nos liquides, la valeur approximative du rapport de la viscosité superficielle à la tension, nous pouvons signaler quelques nouveaux exemples de la petite influence de la viscosité intérieure; ils concernent, non plus la durée de la phase blanche, mais la durée totale des calottes. C'est, en effet, évidemment à cette influence qu'il faut attribuer les 80'' de persistance maxima des calottes de glycérine, et les 229'' des calottes de la solution saturée de chlorure de calcium, malgré la petitesse des rapports; c'est elle aussi, sans doute, qui a déterminé les 142'' des calottes de la solution saturée d'acide tartrique, ce liquide étant fort visqueux; enfin c'est par elle qu'on s'explique pourquoi la persistance des calottes de la solution de saponine est loin d'atteindre celle des calottes de la solution d'albumine, bien que le rapport soit beaucoup plus grand à l'égard de la première.

§ 299. Les résultats auxquels nous sommes arrivés vont nous permettre de rendre complètement raison des propriétés remarquables des bulles de liquide glycérique, et l'accord de l'explication avec les phénomènes apportera de nouveaux arguments l'appui de notre théorie.

En premier lieu, cherchons quelle doit être la valeur approchée de la viscosité superficielle du liquide glycérique. Quand on prépare ce liquide au savon, les meilleures proportions sont celles que j'ai indiquées (§ 100), savoir 2,2 volumes de glycérine de Price pour 3 de solution de savon de Marseille à 1/40; or on peut admettre que, dans ce mélange, les viscosités superficielles se répartissent dans le rapport des volumes; si donc on prend, dans les tableaux du § 296 les valeurs des viscosités superficielles respectives des deux ingrédients, savoir 60,42 et 94,79, la viscosité superficielle du mélange sera égale $\frac{2,2 \times 60,42 + 3 \times 94,79}{2,2 + 3} = 80,25$; ; elle est, on le voit, de beaucoup inférieure à celle de l'eau.

Quant à la tension du liquide, elle ne diffère pas d'une manière appréciable de celle de la solution de savon qui en fait partie. En effet, la tension d'une lame liquide peut (§ 158) être représentée par l'expression $\frac{rp}{2}$ ou $\frac{pd}{4}$ dans laquelle p est la pression exercée par une bulle du même liquide sur l'air qu'elle emprisonne, et d le diamètre de cette bulle; or on a vu (§ 121) qu'à l'égard du liquide glycérique, on a, aux températures ordinaires, $pd = 22,56$; on en déduit $\frac{pd}{4} = 5,64$, valeur qui est aussi celle de la tension d'une lame de notre solution de savon¹⁷⁷. Cette identité ne doit pas surprendre: d'après les recherches de Dupré, la tension d'une solution de savon varie à peine par des changements même très considérables dans la proportion d'eau¹⁷⁸, et sans doute

¹⁷⁷ M. Van der Mensbrugge a trouvé, pour le liquide glycérique (voir la première note du § 162), une valeur un peu plus forte, savoir 6; mais le liquide dont il s'est servi était ancien, et avait conséquemment subi plus ou moins d'altération.

¹⁷⁸ Dupré avance une explication de ce fait remarquable; il expose, dans ses Mémoires et dans son ouvrage (page 376 de celui-ci), les conditions qui permettent à une substance de se dissoudre sans action chimique dans un liquide; il arrive à cette singulière déduction que, dans certaines circonstances, la substance dissoute tend à se porter à la surface de la solution et il indique comme exemple la solution de savon: il détermine, au moyen de son aréomètre (§ 161), la tension d'une solution extrêmement faible de savon, et la trouve très peu différente de celle d'une solution forte, tandis se servant du procédé des jets (ibid.), il la trouve égale à celle de l'eau pure; c'est que, suivant, lui, dans le premier cas le savon s'est porté à la surface, et que, dans

la même chose a lieu quand on étend la solution avec de la glycérine.

Dans le liquide glycérique, le rapport de la viscosité superficielle a la tension est donc égal à $\frac{80,25}{5,64} = 14,22$; or, avec une viscosité superficielle si peu intense et un rapport si élevé, le liquide dont il s'agit doit nécessairement se laisser développer en très grosses bulles, et c'est ce que confirme l'expérience.

§ 300. En second lieu, rappelons-nous (§ 108) que lorsqu'une bulle est réalisée avec un bon liquide glycérique, la lame, après s'être graduellement atténuée jusqu'à un certain point, reprend ensuite peu à peu une nouvelle épaisseur, et revient en général, avant d'éclater, au rouge et au vert des derniers ordres. J'ai montré que cette marche rétrograde est due à ce que le liquide glycérique absorbe l'humidité de l'air, et j'ai annoncé ¹⁷⁹SUR LE DEVELOPPEMENT DES LAMES. (§ 109) que j'étudierais de plus près la cause du phénomène; c'est ce que je vais faire actuellement.

Dès le moment où la bulle est formée, la lame qui la constitue se trouve évidemment soumise à deux actions différentes, savoir celle de la pesanteur, qui tend à l'amincir en faisant incessamment glisser les molécules depuis le sommet jusqu'au bas, et, celle de l'absorption, qui, tend, au contraire, à l'épaissir. Cela posé, la marche des teintes montre que la cause d'amincissement est d'abord prépondérante, mais que, plus tard, c'est la cause d'épaississement qui prédomine; il y a donc une époque de l'existence de la bulle où ces deux causes se contre balancent, c'est-à-dire où la lame gagne autant qu'elle perd. Or on ne peut s'expliquer, à moins d'une cause particulière, pourquoi l'équilibre entre le gain et la perte ne continue pas à subsister; en effet, les épaisseurs par lesquelles la lame repasse ensuite sont égales à celles qu'elle avait antérieurement; mais, à ces époques antérieures, elle allait en s'amincissant; comment donc concevra-t-on qu'avec les mêmes épaisseurs elle ne s'amincisse plus, surtout si l'on réfléchit qu'en devenant plus aqueux, le liquide devient plus fluide? A la vérité, il devient aussi moins dense; mais comme la densité du liquide glycérique non altéré ne surpasse que d'un dixième environ celle de l'eau pure (§ 122), elle ne peut éprouver qu'une diminution très faible, diminution compensée d'ailleurs par l'augmentation de fluidité.

§ 301. Voici, du reste, une expérience qui prouve que le changement de densité n'est aucunement la cause du phénomène: un anneau horizontal en fil de fer est attaché par sa fourche sous le bras d'un support muni de vis calantes; on soulève jusqu'à cet anneau une capsule contenant du liquide glycérique dans lequel on le fait plonger, puis on abaisse assez rapidement la capsule; l'anneau se trouve alors occupé par une lame à laquelle une goutte demeure suspendue; si cette lame est bien horizontale, il est clair que la goutte se tient exactement en son milieu; dans le cas contraire, on l'y amène au moyen des vis du support. Cela fait, on crève la lame, et l'on en réalise une autre par le même procédé; seulement on abaisse d'abord la capsule d'une quantité insuffisante pour que le caténoïde laminaire qui se développe entre l'anneau et la surface du liquide devienne instable (§ 227) et on la maintient dans cette position pendant un temps qu'on a déterminé par un essai préalable; la lame caténoïde s'atténue alors graduellement, et, par l'abaissement ultérieur de la capsule, elle va remplir l'anneau sous une forme parfaitement plane, sans goutte suspendue, et bien horizontale.

Cette lame est d'abord incolore, mais, après quelques minutes, on la voit se barioler de rouge et de vert, puis, plus tard, prendre une teinte jaune parsemée de petites taches d'une autre couleur; plus tard encore, le jaune est remplacé par le bleu, puis par l'indigo, puis par le pourpre, après quoi les teintes rétrogradent, de sorte qu'à la fin reparait le bariolage rouge et vert des derniers ordres.

le second, le mouvement continu du liquide s'oppose à ce triage.

¹⁷⁹101

L'anneau qui m'a donné la meilleure réussite n'avait que 2 centimètres de diamètre; avec des anneaux plus grands, de 7 centimètres, par exemple, il y avait bien un commencement de rétrogradation des teintes, mais la lame éclatait toujours avant le retour au rouge et au vert; je dois dire, du reste, que le liquide employé n'était pas excellent. Indiquons encore une précaution indispensable : les soudures des points où l'anneau s'attache aux deux branches de la fourche et celle du point où il se ferme, doivent ne présenter aucune saillie à l'intérieur de ce même anneau; quand il y a de telles saillies, la lame perd de sa forme plane dans leur voisinage, elle montre, en ces endroits, des systèmes de bandes colorées qui occupent une assez grande étendue, et elle éclate beaucoup plus tôt.

Dans cette expérience, on le voit, la lame commence également, par s'amincir jusqu'à un certain point, pour aller ensuite en s'épaississant; or, comme elle est plane et horizontale, les variations de densité ne jouent évidemment aucun rôle, d'où il faut nécessairement conclure qu'elles sont de même sans influence à l'égard de la bulle, ainsi que je l'ai avancé. Quant à l'amincissement de la lame plane horizontale, il résulte de l'appel incessant opéré par les surfaces fortement concaves de la petite masse qui rattache cette lame à l'anneau, et notre expérience offre un exemple curieux de ce genre d'action.

§ 302. Actuellement, dans le cas de la bulle, comme dans celui de la lame plane, puisqu'une résistance nouvelle se développe au fur et à mesure de l'absorption de l'humidité, on est contraint de reconnaître que cette résistance s'engendre dans les deux couches superficielles, ou, en d'autres termes, que tandis que le liquide interposé devient plus fluide, les couches superficielles le deviennent moins. Alors, en effet, tout s'explique le liquide descend avec une, difficulté et une lenteur croissantes, et la lame s'épaissit librement par l'absorption.

Or l'augmentation de viscosité superficielle par une addition progressive d'eau, suppose nécessairement que la viscosité superficielle du liquide originaire, est très inférieure à celle de l'eau, et c'est ce que nous avons effectivement trouvé (§ 299).

Mais tandis que la viscosité superficielle de la lame qui constitue notre bulle devient de plus en plus forte, la tension change très—peu (ibid.), de sorte que le rapport va en croissant.

Ainsi, d'une part, à cause de l'absorption continue de la vapeur d'eau, la lame ne peut, dans aucune phase de son existence, arriver à être très ténue, et, d'autre part, le rapport entre la viscosité superficielle et la tension demeure assez grand pour rendre les déchirements difficiles jusqu'à ce que la lame se soit assimilée une très grande proportion d'eau. Ces deux circonstances, on le voit, rendent pleinement raison de la longue persistance de la bulle.

Arrêtons-nous un moment sur la cause qui amène enfin la rupture. Le rapport de la viscosité superficielle à la tension va, il est vrai, en croissant; mais on peut admettre qu'il ne croît pas assez en comparaison de cette viscosité, de sorte qu'il finit par être insuffisant pour le maintien de la lame. Il y a, du reste, une autre cause à assigner à la rupture: on sait que les solutions de savon très étendues se décomposent spontanément, ce qu'on reconnaît à ce qu'elles se troublent. Cette décomposition a lieu après un temps variable, mais j'ai cru remarquer qu'elle se produit beaucoup plus tôt et pour des proportions d'eau beaucoup moindres quand la solution a été faite à chaud: ainsi, par exemple, on avait préparé, le même jour et avec le même savon, deux solutions, l'une à chaud à 1/50, l'autre à froid à 1/100; après refroidissement de la première, on les a étendues toutes deux jusqu'à 1/500; celle qui avait été faite à chaud s'est troublée immédiatement, et l'autre est demeurée limpide; on a pu amener ensuite cette dernière,

sans qu'elle s'altérât, jusqu'à 1/1000, puis à 1/2000 et, le lendemain, elle était encore limpide. Ajoutons cependant qu'une autre solution, faite également à froid et amenée à 1/2000, s'est troublée moins d'une heure après sa formation. Or, dans mes diverses préparations de liquide glycérique, les solutions de savon avaient toujours été faites à chaud; on peut donc croire que lorsque la lame qui constitue la bulle s'est emparée d'une grande quantité d'eau, le savon qu'elle contient se décompose, et dès lors la bulle doit évidemment éclater.

§ 303. J'ai dit (§ 106), à propos des bulles de liquide glycérique réalisées en vase clos, que, pour obtenir le plus de durée, les dimensions du vase devaient être considérables relativement à celles de la bulle; et, en effet, j'avais inutilement, essayé en employant un vase de petite capacité. J'ai fait voir, en outre (ibid.), qu'on allait beaucoup plus loin encore si l'on plaçait préalablement des morceaux de chlorure de calcium au fond du vase; mais j'ai ajouté qu'il ne fallait pas trop dessécher l'atmosphère de celui-ci. L'explication de ces particularités me paraît fort simple: une juste relation est nécessaire entre la cause d'amincissement et la cause d'épaississement; quand la lame trouve beaucoup de vapeur d'eau à absorber, les teintes rétrogradent trop tôt, et le liquide devient en moins de temps assez aqueux pour que la bulle éclate; quand, au contraire, la quantité de vapeur est insuffisante, soit parce que le vase est petit, soit parce qu'on en a trop desséché l'atmosphère, la lame s'atténue davantage, et se brise ainsi plus tôt par les causes accidentelles.

§ 304. Il me reste à rendre raison du fait singulier des liquides qui fournissent une mousse épaisse et tenace, et refusent cependant de se développer en bulles à l'orifice de la pipe (§§249, 279 et 281). Supposons un liquide ayant une très forte viscosité superficielle; pour qu'on puisse en former des bulles notables, il faudra, d'après la remarque du § 259, que le rapport de cette viscosité à la tension soit aussi très grand; or imaginons qu'il ne le soit pas assez, mais qu'il se trouve à très peu près à la limite au delà de laquelle il commencerait à la réalisation des bulles. Un semblable liquide, bien que ne donnant pas de bulles ou en donnant dont le diamètre n'excède celui de l'orifice que de quelques millimètres, se recouvrira, par l'agitation, d'une mousse copieuse et durable. En effet, puisque, dans les conditions que nous lui assignons, notre liquide est peu éloigné de se laisser gonfler en bulles à un orifice de 2 centimètres environ, il doit se façonner aisément en lamelles très petites comme celles dont se compose la mousse; de plus, par suite de l'énergie de la viscosité superficielle, ces lamelles ne peuvent s'amincir qu'avec une extrême lenteur; enfin, à cause de cette lenteur, et de la faiblesse relative de la tension, les déchirements doivent être fort rares dans les lamelles dont il s'agit, malgré l'appel opéré par les petites masses concaves dont elles sont bordées; la mousse se formera donc en abondance, et persistera longtemps.

Or les solutions de saponine et d'albumine qui ont présenté la propriété dont nous nous occupons, étaient sensiblement à la limite de la génération des bulles, et leurs viscosités superficielles devaient être suffisamment fortes, puisque ces solutions résultaient du mélange de liquides à viscosités superficielles énormes avec de l'eau, qui en possède déjà une assez intense; ces mêmes solutions se trouvaient conséquemment dans les conditions que nous venons de discuter, et l'on admettra sans peine qu'il en est de même de la solution de gomme arabique du § 249.

§ 305. Ainsi que je rai fait remarquer à la fin du § 288, de ce que les liquides de notre deuxième catégorie donnent, comme tous les autres, des calottes laminaires à leur surface, on doit conclure que ce n'est pas à la viscosité propre de la couche superficielle qu'il faut recourir pour expliquer la simple génération des lames: j'ai tâché de faire voir, par le contenu du Chap. VI, que lorsqu'il s'agit seulement de cette

génération en elle-même, sans avoir égard aux dimensions et à la persistance, on rend complètement raison du phénomène par la viscosité intérieure et la cohésion, mais l'ensemble du Chapitre actuel montre que, pour le développement de lames grandes et assez durables, telles que celles d'eau de savon, la viscosité intérieure n'a qu'une influence très secondaire. Quant à la cohésion, elle varie, on le sait, dans le même sens que le coefficient de la somme des courbures dans l'expression de la pression capillaire, coefficient qui, d'après les recherches de M. Hagen et de Dupré, n'est autre chose que la tension¹⁸⁰; or cette dernière étant beaucoup plus faible dans l'eau de savon que dans l'eau pure, il en est nécessairement de même de la cohésion; conséquemment ce n'est pas non plus l'intensité de celle-ci qui rend possible la réalisation de grosses bulles, et, pour cette réalisation, des propriétés de nature toute différente doivent intervenir: j'espère avoir, sinon rigoureusement démontré, du moins rendu extrêmement probable, que ces propriétés sont la viscosité superficielle et la tension; que, pour qu'un liquide se laisse facilement étendre en lames de grandes dimensions et d'une certaine persistance, il faut: 1° une viscosité superficielle qui surpasse notablement la viscosité intérieure; 2° une tension relativement faible; 3° un rapport d'autant plus grand entre ces deux éléments que le premier est lui-même plus énergique.

¹⁸⁰ Plusieurs physiciens admettent que la cohésion est proportionnelle au produit hp de la hauteur capillaire par la densité; dans ce cas, comme la tension est elle-même proportionnelle à ce produit, la cohésion et la tension varieraient non—seulement dans le même sens, mais encore dans le même rapport.

CHAPITRE VIII.

Causes accessoires qui influent sur la persistance des lames liquides. — Figures laminaires de très grande durée. — Historique concernant les lames liquides.

§ 306. Quand on a réalisé des lames avec un liquide réunissant les conditions rappelées ci-dessus, leur persistance est influencée par un certain nombre de causes accessoires que je vais passer en revue.

La première consiste dans les petits ébranlements que communiquent aux lames les agitations de l'air ambiant et les vibrations propagées par le sol. Ces petits ébranlements agissent sans doute en surmontant l'inertie et la résistance de frottement des molécules; ils hâtent ainsi la descente de ces dernières, et, par suite, accélèrent l'amincissement; en outre, ils déterminent, comme je l'ai avancé plusieurs fois, la rupture des portions très atténuées. C'est en partie pour cela que les lames dont il s'agit se maintiennent en général beaucoup plus longtemps en vase clos; alors, en effet, l'une des causes d'ébranlements, savoir les mouvements de l'air, se trouve supprimée.

§ 307. Une deuxième cause est l'évaporation, quand le liquide en est susceptible. L'évaporation, comme je l'ai montré (§§253 et 255), produit deux effets opposés, dont l'un tend à accélérer et l'autre à ralentir l'amincissement, parce que si elle soustrait incessamment de la matière aux lames, d'autre part les molécules qu'elle enlève sont celles qui, appartenant aux faces extrêmes, descendraient le plus vite et feraient partager plus ou moins leur excès de vitesse aux molécules sous-jacentes. Les faits sur lesquels je me suis appuyé sembleraient indiquer que le second effet, celui de ralentissement, prédomine en général, d'où résulterait la conséquence singulière que l'évaporation est plutôt favorable que nuisible à la persistance; cependant voyons:

Les faits dont il s'agit se rapportent les uns à des lames d'eau, et les autres à des lames de la deuxième catégorie présentant les teintes inverses; or les premières éclatent toujours avant de s'être beaucoup atténuées, et, dans les secondes, l'atténuation des portions les plus minces, c'est-à-dire des inférieures, s'arrête bientôt, on l'a vu, soit par un afflux continu de liquide venant des portions supérieures plus épaisses, soit, au contraire, selon M. Van der Mensbrugghe, par un afflux du liquide du vase montant incessamment vers ces portions supérieures, à cause d'un excès de tension de celles-ci (§ 256); mais considérons maintenant une lame de la troisième catégorie, lame où l'amincissement peut progresser sans obstacle, par exemple une bulle de savon déposée sur un anneau. L'effet de la pesanteur est d'autant moindre sur une semblable lame que celle-ci est plus atténuée (§ 109); conséquemment les quantités de liquide qui, dans des temps égaux successifs, abandonneraient, sous la seule action de la pesanteur, le haut de cette lame, iraient en diminuant au fur et à mesure de l'atténuation; mais les quantités successivement enlevées, dans les mêmes temps, par l'évaporation, sont sensiblement égales; or il suit de là que si, au commencement de l'existence de la lame, les secondes de ces quantités de liquide peuvent n'être qu'une fraction des premières, elles leur deviennent plus tard supérieures, et alors nécessairement l'évaporation active l'amincissement. On comprend même que, lorsque l'épaisseur du haut de la lame est devenue extrêmement minime, l'évaporation peut, à elle seule, l'annuler en un point, et occasionner ainsi la rupture.

On voit, d'après cette discussion, que, dans les lames de la troisième catégorie, l'instant de la rupture est hâté par l'évaporation; aussi nos calottes de solution de savon de Marseille (§ 248) qui, dans une atmosphère saturée de vapeur d'eau, persistaient plusieurs heures, ne duraient que quatre à cinq minutes lorsqu'elles étaient produites dans le bocal toujours fermé, mais sans saturation de son atmosphère; si on les avait

formées à l'air entièrement libre, nul doute qu'elles n'eussent éclaté plus tôt encore.

En supprimant l'évaporation par un procédé un peu différent du mien, le Dr. Reade¹⁸¹ a réalisé des lames planes d'eau de savon se conservant au delà de 24 heures. Voici comment il opérait: il introduisait une petite quantité d'eau de savon dans une fiole allongée qu'il faisait ensuite chauffer à 100° au bain quand il présumait que la vapeur produite à l'intérieur avait expulsé tout l'air de la fiole, il bouchait hermétiquement celle-ci, puis, après l'avoir laissée refroidir, il y formait une lame plane transversale. Par ce moyen, on le voit, la lame se trouve, comme nos calottes, dans un espace saturé de vapeur d'eau; si donc la fiole est posée verticalement, de sorte que la lame soit horizontale et qu'ainsi l'action de la pesanteur soit éliminée en même temps que l'évaporation, il ne reste plus, pour amincir cette lame et en amener la rupture, que l'action des surfaces concaves de la petite masse qui la borde, plus les petits ébranlements du sol; elle doit conséquemment, comme celle du § 229, persister fort longtemps.

Le liquide glycérique, nous le savons, non seulement n'émet pas de vapeurs, mais absorbe, au contraire, l'humidité de l'air ambiant, et c'est (§ 302) en partie à cause de cela que les lames ce liquide ont une si grande persistance, même à l'air libre.

§ 308. En troisième lieu, dans le cas particulier du liquide glycérique, la température a une influence notable; en effet, quand on emploie ce liquide en hiver, ses lames montrent des persistances beaucoup plus inégales qu'en été.

§ 309. En quatrième lieu, puisque la pesanteur fait incessamment descendre le liquide vers le bas des lames, il est clair qu'en supprimant, d'une manière ou d'une autre, l'action de cette force, on doit augmenter la persistance. La condition dont il s'agit se trouve évidemment remplie, ainsi que je l'ai fait remarquer plusieurs fois, à l'égard d'une lame plane et horizontale; mais, pour juger de son efficacité, il faut comparer, au point de vue de la durée, une semblable lame avec une lame inclinée ou verticale, formée du même liquide et ayant les mêmes dimensions. J'ai effectué cette comparaison sur des lames réalisées à l'air libre, dans des anneaux en fil de fer de 7 centimètres de diamètre, avec la solution de savon de Marseille à 1/40. Pour la lame horizontale, j'ai employé le procédé du § 301; quant, à l'anneau vertical, il était porté par une simple tige fluée en un point de son contour dans le prolongement d'un diamètre, et on l'attachait sous la potence par l'autre extrémité de cette tige; pour former la lame, on amenait sous lui un vase plein du liquide, dans lequel on le faisait plonger entièrement, et qu'on abaissait ensuite. Avec chaque anneau, l'expérience a été répétée vingt fois.

Dans l'anneau horizontal, les lames ont persisté de 16'' à 30'', et la moyenne a été de 25''; dans l'anneau vertical, les valeurs extrêmes ont été 9'' et 18'' et la moyenne 13''. Ainsi, parmi les causes accessoires dont nous nous occupons, il faut ranger la position, ou mieux le plus ou moins d'inclinaison des lames.

Avec certains liquides, on annule encore l'action de la pesanteur en développant les lames au sein d'un autre liquide de même densité, et alors l'inclinaison est indifférente c'est ainsi que les lames d'huile, qui s'atténuent si rapidement et durent si peu dans l'air (§ 247), acquièrent, au contraire, une grande persistance quand elles sont engendrées dans le liquide alcoolique (§§218 à 224).

§ 310. En cinquième lieu, les assemblages de lames se maintiennent toujours beaucoup moins longtemps que les figures formées d'une lame unique, telles, que les bulles sphériques et les surfaces à courbure moyenne nulle réalisées dans de simples contours fermés. L'explication de ce fait repose sur des considérations que j'ai déjà exposées

¹⁸¹ *On a permanent soap bubble, illustrating the colours of thin plates* (PHILOS. MAGAZ., 1837, nouvelle série, vol. XI, p. 275).

(§§219 et 220), mais que je vais reproduire ici d'une manière plus complète.

Une lame liquide adhérente à un fil solide est, nous le savons, jointe à ce fil, ou plutôt à la couche liquide qui le mouille, par une petite masse à courbures transversales fortement concaves, laquelle exerce un appel incessant sur le liquide de la lame; de là une cause de plus pour l'amincissement progressif de celle-ci, et, par suite, pour la destruction de la figure. Cette cause existe dans toute figure laminaire adhérente à un fil ou à des fils solides; mais, dans les systèmes formés à l'intérieur des charpentes polyédriques, s'y ajoute une cause de même nature et plus énergique encore. Tous ces systèmes, en effet, contiennent des arêtes liquides, qui viennent quatre à quatre s'unir en des points liquides, et dont plusieurs s'attachent par leur autre extrémité aux fils solides; or, sur ces arêtes ainsi qu'en leurs points extrêmes, il y a aussi, nous le savons, de petites surfacés fortement concaves. Celles qui appartiennent aux arêtes ne sont, comme celles qui règnent le long des fils solides, concaves que dans un sens, et, par conséquent, leur action pour amincir les lames est du même ordre; mais, aux points de jonction des arêtes liquides et aux points où ces arêtes aboutissent aux fils solides, les petites surfaces sont concaves dans tous les sens, de sorte que leur succion capillaire est environ deux fois plus forte encore, et qu'ainsi l'afflux du liquide vers ces mêmes points doit être beaucoup plus grand.. Dans les systèmes dont il s'agit, l'amincissement des lames doit donc être plus rapide, et dès lors ces systèmes doivent durer moins longtemps, comme le montre l'expérience. Cependant quand ils sont réalisés dans l'air, on ne remarque aucune augmentation graduelle d'épaisseur ni dans les arêtes liquides ni dans leurs points de jonction; mais c'est que, à mesure que le liquide y afflue, il est entraîné par la pesanteur vers le bas du système.

La persistance de chacun de ces systèmes est, du reste, très variable, ce que l'on comprend aisément, car, par suite de leur complication, de petites causes accidentelles peuvent agir tantôt plus, tantôt moins, pour amener leur destruction; ainsi celui de tous qui se maintient en général le plus longtemps, est le plus simple, savoir celui du tétraèdre.

La combinaison des lames en système est donc également au nombre des causes accessoires qui modifient la persistance.

§ 311. En sixième lieu, j'ai rappelé (§ 244) que les lames persistent en général d'autant plus qu'elles sont moins grandes. Bien que le fait ait déjà été indiqué pour le cas- des bulles de savon (§ 321), je ne crois pas inutile de rapporter quelques résultats obtenus par moi:

1° On a réalisé, avec le liquide glycérique, des systèmes laminaires dans deux charpentes prismatiques triangulaires semblables, mais dont l'une avait toutes ses arêtes longues de 7 centimètres, et l'autre des dimensions moitié moindres. Chacune de ces charpentes était fixée, par la queue de sa fourche, sous une potence, de manière que ses arêtes latérales fussent verticales, et, pour former le système, on se servait du même procédé qu'à l'égard de l'anneau vertical dans les expériences du § 309. Avec l'une et avec l'autre charpente, on a répété sept fois l'observation; les persistances se sont montrées très mais, avec la grande charpente, les plus longues ont été 32' et 37', et, avec la petite, 60' et 75'.

On a essayé aussi, de la même manière, les systèmes de deux charpentes tétraédriques, l'une de 8 centimètres d'arête, l'autre de 5; on a répété également les observations plusieurs fois; mais, pour la grande charpente, l'instant de la rupture a échappé à l'attention, sauf à l'égard de la plus longue persistance, qui a été de 2 heures; pour la petite, la plus longue persistance a été de 2 heures 36 minutes.

2° On a produit, avec le liquide glycérique encore, des lames planes horizontales

dans deux anneaux en fil de fer, l'un de 7, l'autre de 2 centimètres de diamètre; dans le premier, la durée maxima a été d'une heure environ, et, dans le second, elle a dépassé 12 heures.

3° Une bulle de 10 centimètres de diamètre, gonflée avec la solution de savon de Marseille, a été déposée sur un anneau dans l'intérieur d'un vase dont l'atmosphère était saturée de vapeur d'eau; elle a persisté à peu près une heure. On y a substitué une bulle du même liquide, mais d'un diamètre moitié moindre, et celle n'a disparu qu'après 2 heures. On a vu d'ailleurs (§ 107) que des bulles de 30 centimètres de diamètre, formées par M. Böttger avec son liquide au savon d'huile de palme, ne persistaient que 5 à 10 minutes, tandis que des bulles d'environ 8 centimètres pouvaient durer 20 heures.

La durée plus grande des lames de moindres dimensions est, comme je l'ai dit, ce qui a lieu ordinairement; mais quelquefois cette influence de l'étendue ne se manifeste pas : j'ai fait, par exemple, plusieurs séries d'observations sur des lames de solution de savon réalisées dans des anneaux de 10, 7, 2 et 1 centimètres de diamètre, et les durées moyennes n'ont pas présenté de différences notables.

Si la persistance diminue en général quand les lames augmentent en dimensions, cela tient simplement, je pense, à ce que plus une lame est grande, plus il y a de chances pour que l'un ou l'autre de ses points, cède à quelque cause de rupture; mais il faut tenir compte d'une autre influence, qui agit en sens opposé: l'amincissement dû à l'appel des petites surfaces concaves qui règnent tout le long du contour d'une lame est nécessairement d'autant plus lent, à égalité de contour, que la lame a plus de surface, et, à égalité de surface, qu'elle a moins de contour; on déduit aisément de là que, dans un anneau circulaire, la lenteur de l'amincissement croît avec le diamètre. Si donc cette dernière influence agit seule, la persistance irait en augmentant avec la grandeur; or, on le comprend, il peut se faire, dans certaines circonstances, que les deux influences contraires dont je viens de parler se compensent plus ou moins.

§ 312. En septième lieu enfin, il faut encore faire entrer en ligne de compte la nature du solide auquel adhère une lame, et l'état de la surface de ce solide: nous savons, par exemple, que si l'on n'a pas oxydé les anneaux ou les charpentes en fil de fer, les lames de liquide glycérique qu'on y réalise se brisent immédiatement, ou n'ont qu'une très courte durée. J'ai signalé, dans les §§124 et 125, un autre fait de même nature: une bulle de liquide glycérique de 2 centimètres de diamètre, gonflée à l'orifice d'un tube de verre et enfermée dans un petit bocal, s'est maintenue pendant 24 heures, tandis que d'autres bulles du même diamètre, formées du même liquide et enfermées dans le même bocal, mais gonflées à l'orifice d'un tube en fer oxydé ayant même diamètre extérieur que le tube de verre, n'ont persisté au maximum que 14 heures.

M. l'abbé Florimond¹⁸² a annoncé qu'on peut gonfler des bulles de savon beaucoup plus grosses avec une pipe de verre qu'avec une pipe de terre; il attribue cette différence à ce que l'argile happe ou retient le liquide, de sorte que la lame sphérique naissante ne se développe qu'aux dépens de son épaisseur, tandis qu'avec la pipe en verre, le liquide glisse aisément jusqu'à l'extrême bord de l'orifice, et que la bulle acquiert ainsi un certain volume avant que la lame qui la constitue s'amincisse.

§ 313. Il suit de cet examen de toutes les influences accessoires, qu'avec une lame de dimensions données, on obtiendra la plus grande persistance si cette lame est plane, horizontale, attachée par tout son contour à une paroi de verre, soustraite à toute évaporation, à l'abri des agitations de l'air ambiant, et, autant que possible, des trépidations propagées par le sol. Or toutes ces conditions étaient satisfaites à l'égard de la lame

¹⁸² Journal *Le Cosmos*, 1862, vol. XX, p. 72.

de liquide glycérique de 7 centimètres de diamètre dont j'ai parlé dans le § 229; aussi elle a persisté 18 jours, et n'a probablement éclaté que par suite d'un ébranlement imprimé au plancher. Les mêmes conditions étaient satisfaites à l'égard des lames d'eau de savon dans l'expérience du D' Reade (§ 307), et, nous l'avons vu, la persistance de ces dernières était de plus de 24 heures.

§ 314. La beauté des figures laminaires de liquide glycérique inspire naturellement le désir d'avoir les mêmes figures tout à fait permanentes. Pour l'une d'elles, la sphère, on atteint ce but avec du verre fondu; chacun sait, en effet, qu'on souffle des bulles sphériques en verre, bulles qui, une fois refroidies, se maintiennent indéfiniment; on peut même atténuer tellement la lame qui les constitue, qu'elle montre des couleurs; mais la réalisation, avec la même substance, des autres figures, surtout de celles qui consistent en un assemblage de lames, offrirait des difficultés, et, dans tous les cas, serait peu commode.

La première idée qui se présente, est d'employer un liquide dont les lames se solidifient par simple évaporation à froid, tel que le collodion, une solution d'albumine, etc.; mais, avec un semblable liquide, je ne suis parvenu à quelques résultats, qu'en me bornant à des figures de très petites dimensions. Le liquide qui m'a donné la meilleure réussite est une solution de gutta-percha dans le sulfure de carbone: avec cette solution, j'ai obtenu un très joli petit système dans une charpente cubique dont les arêtes avaient deux centimètres de longueur; ce petit système s'est conservé plusieurs mois, après quoi il s'est réduit spontanément en poudre. J'ai essayé inutilement avec une charpente de trois centimètres de côté. La figure de gélatine solidifiée dont j'ai parlé au § 141, adhérait à une charpente dont les côtés avaient, comme M. Schwarz a bien voulu me l'apprendre, environ trois centimètres et demi de longueur; mais cette figure consistait en une lame unique, et M. Schwarz ne l'a produite qu'à l'aide d'une manoeuvre particulière. Pour tâcher d'arriver, dans le cas des assemblages de lames, à des résultats de quelque grandeur, je me suis dit qu'il fallait recourir à des substances qui, ainsi que le verre, ne sont liquides qu'à chaud, et en chercher une qui remplît la double condition de ne pas exiger, pour se fondre, une très haute température, et de se laisser développer, à l'état fondu, en lames d'une étendue suffisante.

On verra, plus loin, que Morey a obtenu, avec de la résine, des bulles allongées atteignant la grosseur d'un oeuf, formées d'une lame assez mince pour montrer des couleurs, et qui paraissaient devoir être indéfiniment permanentes.

M. Böttger¹⁸³ a trouvé qu'avec un mélange de 8 parties de colophane et d'une partie d'huile de lin purifiée, fondu au bain-marie et maintenu à la température d'environ 97°, on gonfle aisément de grosses bulles qui persistent longtemps; seulement il n'indique pas leur durée. Avec ce même mélange, M. Rottier a essayé, à ma prière, la réalisation du système laminaire d'une charpente prismatique triangulaire dont les bases avaient 4 centimètres de côté, et dont la hauteur était de 7 centimètres; le système se formait toujours très bien, et gardait certainement son intégrité un grand nombre d'heures; mais, toujours aussi, on trouvait, le lendemain, l'une des lames trouée.

M. Mach¹⁸⁴ a obtenu, avec de la colophane purifiée fondue, sans mélange d'huile, le système laminaire du tétraèdre régulier dans une charpente de 5 centimètre de côté; mais il n'en a pas observé la durée, les expériences qu'il avait en vue exigeant qu'il détachât le système.

J'ai réussi d'une manière à peu près complète au moyen d'un mélange d'une partie

¹⁸³ *Beiträge zur Physik und Chemie*. Frankfurt a. M., 1838, p. 13.

¹⁸⁴ *Ueber die Molecularwirkung der Flüssigkeiten*. (Bullet. de l'Acad. de Vienne, 1862, vol. XLVI, 2me section, p. 125).

de gutta-percha pure et de 5 parties de colophane, maintenu à la température d'environ 150°. On avait purifié préalablement la colophane en la fondant à une température suffisante, et attendant que la faible quantité d'essence qu'elle contenait encore se fût dégagée sous forme de petites bulles, et que toutes les impuretés solides eussent gagné le fond. M. Donny a bien voulu faire l'expérience à son laboratoire: la charpente était celle d'un cube de 5 centimètres de côté; le système laminaire ne s'est pas réalisé sans une certaine difficulté, et, lorsqu'on l'a obtenu complet, il était plus ou moins irrégulier; mais, en le maintenant ensuite pendant quelques instants dans une étuve chauffée à 70° environ, et l'y retournant en différents sens, on a vu les irrégularités s'effacer. Dans le système tel qu'il s'est montré après cette dernière opération, les lames étaient fort transparentes, mais les arêtes n'avaient pas une grande finesse, et différaient, sous ce rapport, les unes des autres. Ce même système était très solide, et s'est conservé pendant plus de deux ans, je pense; après ce temps, un choc léger l'a réduit en fragments, d'où il faut conclure que la constitution de ses lames s'était lentement altérée. Je crois qu'on réussirait mieux encore et que l'altération progressive serait moindre, si l'on employait une proportion un peu plus forte de colophane. Rappelons ici la curieuse réalisation décrite par M. Mach (§ 210bis) du système du tétraèdre régulier en lames de caoutchouc.

§ 315. Terminons la partie de notre travail spécialement consacrée aux lames liquides, par un exposé succinct de tout ce qui, à notre connaissance, a été fait sur ces mêmes lames en dehors de nos propres recherches, jusqu'à la fin de 1869.

On lit dans les *Petites chroniques de la science* de M. Henry Berthoud¹⁸⁵ « Le musée du Louvre possède un vase étrusque de la plus haute antiquité, provenant de la collection Campana, et sur les flancs duquel se trouvent représentés des enfants qui soufflent dans des chalumeaux et qui s'amuse à faire des bulles de savon. »

Il paraît donc que les anciens connaissaient les sphères laminaires complètes obtenues par insufflation à l'extrémité d'un tube; néanmoins leurs ouvrages ne contiennent, que je sache, rien ayant trait à ces bulles; ils parlent seulement des calottes laminaires développées à la surface de l'eau :

Intumuit sic, ut pluvio perlucida cœlo
Surgere bulla solet . . .

(OVIDE, *Métamorph.*, liv. X, v. 732.)

. . . offensa bulla tumescit aquæ.

(MARTIAL, liv. VIII, épigr. 33, v. 18.)

§ 316. Suivant une hypothèse avancée d'abord par Halley, la vapeur d'eau visible, celle qui constitue les nuages et les brouillards, serait formée de très petites bulles creuses, auxquelles on a donné le nom de vésicules. Cette hypothèse, fondée principalement sur la légèreté apparente des nuages et sur le fait qu'on n'observe jamais d'arc-en-ciel dans un nuage qui ne se résout pas en pluie, est bien connue des physiciens, et conséquemment je me bornerai ici à la mentionner; mise en vogue par Saussure, elle a été fortement combattue depuis, et aujourd'hui elle n'a plus guère de partisans (§ 235)¹⁸⁶.

§ 317. Boyle paraît être le premier qui ait dirigé l'attention des savants sur les couleurs des lames minces, et spécialement des lames liquides. Dans un écrit¹⁸⁷ de

¹⁸⁵ Année 1866, p. 265.

¹⁸⁶ Pour juger de l'état actuel de la question, voir la dissertation inaugurale de M. Kober, publiée à Iena en 1872, et intitulée: *Ueber die angebliche Bläschenform des Wassers bei seiner Condensation.*

¹⁸⁷ *Experiments and observations upon colours.*

l'année 1663, il s'exprime ainsi:

« Pour montrer aux chimistes qu'on peut faire apparaître ou disparaître des couleurs là où il n'y a ni augmentation ni changement du principe sulfureux, salin ou mercuriel des corps, je ne recourrai pas à l'iris produit par le prisme de verre, ni aux couleurs qu'on voit, par une matinée sereine, dans celles des gouttes de rosée qui réfléchissent ou réfractent convenablement vers l'oeil les rayons de la lumière; mais je leur rappellerai ce qu'ils peuvent observer dans leurs laboratoires: car si l'on secoue une huile essentielle chimique ou de l'esprit-de-vin concentré, jusqu'à ce que des bulles se développent à sa surface, celles-ci offrent des couleurs brillantes et variées qui s'évanouissent toutes à l'instant où le liquide qui constitue les lames retombe dans le reste de l'huile ou de l'esprit-de-vin; on peut donc faire en sorte qu'un liquide incolore montre des couleurs diverses et les perde en un moment, sans augmentation ni diminution de l'un quelconque de ses principes hypostatiques. Et, pour le dire en passant, il est digne de remarque que certains corps, soit incolores, soit colorés, étant amenés à une grande minceur, acquièrent des couleurs qu'ils n'avaient pas auparavant; en effet, sans insister sur la variété de couleurs que l'eau rendue visqueuse par le savon acquiert lorsqu'elle est gonflée en bulles sphériques, la térébenthine, quand on y insuffle de l'air d'une certaine manière, fournit des bulles diversement colorées, et, bien que ces teintes s'évanouissent dès que les bulles éclatent, celles-ci continueraient probablement à manifester des nuances variées sur leur surface, si leur texture était suffisamment durable. »

Boyle cite comme exemple de ces couleurs permanentes, celles qu'il a vues sur des lames extrêmement minces de verre soufflé.

§ 318. En 1672, Hooke communiqua à la Société Royale une, curieuse Note¹⁸⁸, dont voici la traduction presque entière :

« Plusieurs petites bulles furent gonflées, au moyen d'un petit tube de verre, avec une solution de savon. On observa aisément qu'au commencement de l'insufflation de chacune d'elles, la lame liquide orbiculaire, qui emprisonnait un globe d'air, se montrait blanche et limpide, sans aucune apparence de couleur; mais, après quelque temps, la lame s'amincissant par degrés (une partie de sa substance descendant vers le bas et une autre partie se dissipant dans l'air par l'évaporation), on vit naître sur sa surface toutes les variétés de couleurs qu'on peut observer dans l'arc-en-ciel... Après que ces couleurs eurent subi leurs derniers changements, la lame commença à se montrer de nouveau blanche, et alors, dans cette seconde lame blanche, apparurent, vers le haut et vers le bas, des trous, qui augmentèrent graduellement en diamètre, et plusieurs d'entre eux se confondirent, jusqu'à ce qu'à la fin ils devinssent très grands. Il était singulier de voir comment ces trous étaient poussés çà et là, par les mouvements de l'air ambiant, sur le globe d'air emprisonné, sans que la bulle perdît sa forme orbiculaire ou tombât. Il est singulier aussi qu'après cela, quand la bulle éclate, sa rupture ait lieu avec une espèce d'explosion, en dispersant ses parties en une sorte de poussière ou de brouillard. Il est plus singulier que ces portions de la bulle qui se montrent comme des trous, en se mouvant de côté et d'autre sur la surface du globe aérien, changent de forme, et de circulaires deviennent elliptiques ou affectent des figures ondulées. Il est plus singulier encore que, quoiqu'il soit très certain que l'air enveloppant et l'air enveloppé ont des surfaces, cependant, par aucun des moyens dont j'ai fait usage, elles ne m'ont présenté ni la réflexion ni la réfraction que manifestent les autres parties de l'air emprisonné. Il est assez difficile d'imaginer quel curieux réseau ou corps invisible pourrait ainsi maintenir la forme de la bulle, ou quelle espèce de magnétisme pourrait empêcher la lame

¹⁸⁸ Birch, *History of the Royal Society*, vol. III, p. 29.

liquide de tomber ou les parties de l'air enveloppant et de l'air enveloppé de s'unir. »

§ 319. En 1672 également, Newton, entre autres expériences sur la recomposition de la lumière, décrit la suivante¹⁸⁹ : on projette un spectre solaire sur la muraille d'une chambre obscure, et l'on expose à la lumière qu'il réfléchit une mousse blanche formée sur un liquide; si l'on observe cette mousse de très près, ou mieux à travers une loupe, on distingue, sur chacune des petites lamelles, l'image des couleurs du spectre; mais si l'on s'éloigne, la mousse paraît entièrement blanche. Ou bien encore si, après avoir produit de la mousse sur de l'eau de savon, on attend que les lamelles commencent à crever, celles qui restent se montrent, quand on les regarde de près, spontanément teintées de couleurs variées, mais de loin on ne voit que du blanc.

Tous les physiciens savent que Newton a fait servir les bulles de savon à ses admirables recherches sur les couleurs des lames minces. Les expériences qu'il effectua par ce moyen, et qui sont décrites dans son *Optique*¹⁹⁰ (année 1704), sont trop connues pour que je les rappelle ici; j'insisterai seulement sur les points suivants : Newton employait, non des bulles complètes, mais des calottes laminaires reposant sur le liquide; il a observé la tache noire du sommet, les petites taches colorées qui montent et descendent sur la calotte, ainsi que les petites taches noires qui grimpent jusqu'à celle du sommet, à laquelle elles s'unissent; il n'a constaté l'apparition du bleu du 1er ordre qu'avec une solution très chargée de savon, et, dans ce cas, il a vu quelque fois, le bleu dont il s'agit envahir toute la calotte; enfin on peut inférer de sa description que l'uniformité de teinte, et conséquemment l'uniformité d'épaisseur de la lame, s'est montrée quelquefois aussi pour des couleurs autres que le bleu du 1er ordre.

§ 320. En 1730, Gray¹⁹¹ voulant s'assurer si l'on pouvait communiquer de l'électricité aux liquides, suspend à des fils isolants une pipe dont l'orifice est tourné en bas, puis, après avoir gonflé une bulle de savon à cet orifice, il approche de l'extrémité libre du tuyau de la pipe un tube de verre électrisé par frottement, et il constate qu'un corps léger préalablement placé sous la bulle est attiré par elle.

§ 321. Leidenfrost qui, on le sait, a découvert le phénomène de l'état sphéroïdal des liquides, consacre une grande portion du *Mémoire*¹⁹² où il expose ce sujet, à une étude détaillée des bulles de savon. Ce travail, publié en 1756, et dont j'ai déjà dit quelque mots au § 147, est un singulier mélange d'ingénieuses expériences et de déductions judicieuses avec quelques observations qui doivent être inexactes, et des opinions bizarres dont l'erreur est aujourd'hui évidente.

Si Leidenfrost s'occupe des bulles de savon, c'est, on aurait peine à le croire, en partie pour fournir une preuve ultérieure en faveur de cette proposition qu'il a précédemment soutenue, que l'eau peut passer à l'état solide sans l'action du froid. Pour lui, en effet, une bulle de savon, lorsqu'on a enlevé avec le doigt la goutte qui y demeure quelquefois suspendue, c'est-à-dire le liquide excédant la quantité précise nécessaire à sa formation, possède les propriétés des solides: 1° elle a par elle-même, comme eux, une figure déterminée; 2° de même qu'on renferme un liquide dans un flacon de verre, de même aussi on peut renfermer dans la bulle, non un liquide, à cause de la fragilité de la lame, mais de la fumée de tabac, par exemple, fumée qui y demeure parfaitement emprisonnée comme dans une enveloppe de verre; 3° la bulle, débarrassée de tout liquide excédant, est sèche, car elle ne mouille pas le doigt qui la touche; 4° enfin si l'on dépose doucement sur une semblable bulle une petite goutte d'eau, celle-ci,

¹⁸⁹ *Answer to some considerations upon his doctrine of light and colours* (Philos. Transact., vol. VII, p. 5084).

¹⁹⁰ Livre II, 1re partie, obs. 17 à 24.

¹⁹¹ *Philos. Transact.*, vol. VI, 2me partie, p. 19.

¹⁹² *De aquae communis nonnullis qualitatibus tractatus*. Duisburg.

loin de se mêler à la substance de la lame, glisse jusqu'au bas, comme elle glisserait sur du verre, et tombe ensuite ou peut être enlevée avec le doigt. D'après cela, comme un solide ne saurait couler, Newton doit s'être trompé en attribuant les couleurs de la bulle à ce que la lame s'amincit par l'écoulement graduel du liquide qui la constitue.

Cette nature solide de la lame s'explique de la manière suivante : dans les liquides, les molécules sont attirées également de tous les côtés, de sorte qu'elles sont également mobiles dans tous les sens, tandis que, dans les solides, il y a des centres particuliers d'attraction qui font que les molécules se groupent d'une manière déterminée, comme on le voit dans les cristaux; de là résulte qu'il suffit d'un certain mouvement, d'une certaine direction imprimée aux molécules d'un liquide pour déterminer chez elles l'arrangement qui fait passer le corps à l'état solide. C'est ainsi que l'araignée et les chenilles, en expulsant par leurs filières, dans une direction commune, les molécules d'une substance liquide, changent celle-ci en une matière solide, et c'est encore ce qui se produit quand on gonfle une bulle.

A propos de la bulle pleine de fumée, Leidenfrost dit: « ... sur une bulle ainsi rendue opaque au moyen d'une fumée intérieure, les couleurs décrites par Newton sont réfléchies avec beaucoup plus d'éclat, de sorte que la bulle ressemble à un astre brillant; mais toute cette gloire s'évanouit à l'instant de la rupture : la fumée fétide qui s'échappe alors apprend de quelle ordure la bulle était remplie, et cette dernière nous offre ainsi un emblème frappant des misères dorées de l'humanité. »

Il signale la grande élasticité des bulles, celles-ci reprenant toujours spontanément leur forme sphérique dès que la cause extérieure qui la leur avait fait perdre vient à cesser.

On lui doit aussi l'observation du fait important que les bulles persistent bien plus longtemps en vase clos qu'à l'air libre : les siennes avaient environ 5 centimètres de diamètre, il les gonflait à l'intérieur d'un ballon de verre, et elles se maintenaient au delà d'une heure. Il attribue cette grande persistance à ce que les bulles sont alors soustraites aux agitations de l'air ambiant et à toutes les causes accidentelles de rupture. Il énonce, du reste, cet autre fait, que les bulles durent d'autant plus qu'elles sont plus petites: il en a réalisé qui n'avaient guère que 1/3 de millimètre en diamètre, et elles se sont conservées plus de deux jours à l'air libre et pendant l'été.

Le premier encore il a remarqué que lorsque, après avoir gonflé une bulle à l'extrémité d'un tube, on laisse ouvert l'autre bout de celui-ci, la bulle diminue graduellement de grosseur, avec une vitesse accélérée, jusqu'à s'annuler, en chassant par le tube l'air qu'elle renfermait; il dit, en outre, que si l'on a rempli la bulle de fumée, on voit cette dernière sortir du tube comme d'une cheminée. Il conclut de là que la bulle fait constamment effort pour se contracter. Il ajoute les observations suivantes:

La bulle, au commencement de sa formation, tant qu'elle ne montre pas de vives couleurs, est à la fois si molle et si tenace, qu'on peut y faire pénétrer et en retirer impunément une pointe solide, même obtuse; l'ouverture se referme toujours spontanément. Mais plus les couleurs prennent d'éclat, plus la lame devient rigide, de sorte que si on la perce, elle se brise. C'est sur tout dans les taches noires que cette rigidité est extrême: là le moindre contact d'une pointe d'aiguille suffit pour déterminer la rupture alors la bulle éclate avec un bruit perceptible, et se dissipe en une infinité de très petites parties projetées de tous les côtés jusqu'à trois ou quatre pieds de distance. Ce phénomène se constate le mieux dans un rayon de soleil; il est tout à fait analogue à celui que présentent les larmes bataviques. Ainsi la bulle, outre sa force contractile, possède en même temps une force opposée, une force explosive. Cette dernière force agit toujours de dedans en dehors, car si à l'intérieur d'une bulle on en gonfle une autre,

la rupture de celle-ci fait éclater l'extérieure, tandis que si l'extérieure se brise la première, elle laisse l'autre parfaitement intacte. Il y a donc dans une bulle, deux forces contraires, l'une centripète, qui réside surtout dans les portions incolores, l'autre centrifuge, qui a son siège dans les portions colorées, et qui est à son maximum dans les taches noires.

La force explosive est d'autant plus intense que la solution contient une plus forte proportion d'eau, car la bulle éclate d'autant plus tôt et lance d'autant plus loin les particules dans lesquelles elle se résout; en même temps la force contractile est d'autant plus faible. Au contraire, plus il y a de savon, moins la force explosive a d'intensité, et plus est énergique la force contractile¹⁹³. De là la conséquence que la force explosive provient de l'eau, et la force contractile du savon, ou plutôt de l'huile de ce dernier, les bulles variant en persistance suivant la nature de l'huile qui entre dans la composition du savon.

Dès que la lame qui constitue une bulle passe à l'état solide, il s'y produit une séparation de ses éléments, et alors elle se trouve formée de trois membranes superposées; l'extérieure consiste dans la partie huileuse du savon; c'est elle qui possède la force contractile; elle protège les deux autres contre la rupture, car c'est pendant qu'elle s'étend encore sur la totalité de la bulle, que celle-ci est difficile à briser. Mais bientôt cette membrane extérieure perd son égalité, s'ouvre du haut, descend en devenant graduellement plus épaisse vers le bas, et laisse ainsi à découvert la partie supérieure de l'ensemble des deux autres; on doit conclure de cette descente progressive et de cette accumulation au bas, que la membrane en question n'est pas véritablement solide; enfin c'est à elle que sont dues les couleurs. La membrane intermédiaire, qui est saline et en partie terreuse, se montre toujours blanche, mais sans beaucoup d'éclat; elle s'ouvre ensuite à son tour, et met à nu des portions de la plus intérieure. Celle-ci est d'une transparence extrême, ne réfléchit aucune couleur, et, pour ainsi dire invisible, paraît comme une tache noire; elle est tout entière aqueuse.

Pour établir que la membrane extérieure est de nature huileuse, Leidenfrost se fonde surtout sur les apparences successives que présentent les portions colorées dans une bulle gonflée avec une solution contenant peu de savon; il affirme que, lorsque toute la substance de cette membrane s'est rassemblée au bas de la bulle, son seul aspect montre qu'elle est formée d'une matière grasse. Il indique, en outre, l'expérience suivante si l'on trempe dans la solution l'orifice d'un large tube, puis qu'on l'en retire, on le trouve occupé par une lame plane, et si l'on place cette lame verticalement, on ne tarde pas à y voir naître des couleurs qui manifestent d'une manière indubitable la séparation des trois membranes. Leidenfrost a donc réalisé des lames planes, et en a observé les bandes colorées. C'est encore, dit-il, par la même raison que les couleurs apparaissent plus tôt et plus vivement aux températures basses de l'hiver, l'huile se séparant plus aisément par le froid. D'après lui, si l'on emploie un liquide dans lequel les parties huileuse, saline et aqueuse sont unies avec plus de force que dans l'eau de savon, de sorte que la séparation de l'élément gras ne puisse s'effectuer, on ne distingue plus de couleurs. Comme exemples de semblables liquides, il cite surtout la salive d'un homme jeune, sain et à jeun, et une solution de savon à laquelle on a ajouté un peu d'esprit-de-vin. Il infère de tout cela que, très probablement, l'eau parfaitement pure ne peut jamais donner de lames colorées.

Il indique comme preuve ultérieure de l'erreur commise, selon lui, par Newton, en

¹⁹³ Ces dernières observations sont évidemment en partie inexactes: la force contractile, c'est-à-dire la tension, ne peut augmenter, et doit plutôt diminuer quand on augmente la proportion de savon (§ 299); Leidenfrost, qui ne donne aucune mesure à cet égard, juge sans doute du plus ou moins d'intensité de la force dont il s'agit, uniquement par le plus ou moins de persistance de la bulle.

ce qui concerne la génération des couleurs, que les taches noires, au lieu de se fondre insensiblement dans le blanc qui les entoure, sont nettement terminées à leurs bords, et qu'elles naissent non seulement au haut de la bulle, mais aussi sur les côtés.

Il mesure, par un moyen simple indépendant des couleurs, l'épaisseur de la lame au moment où la bulle vient d'être formée il se sert, pour gonfler celle-ci, d'un tube de thermomètre, et trouve qu'en employant seulement la quantité de liquide qui s'élève dans ce tube par la capillarité, la bulle, dont le diamètre maximum est de deux pouces, ne porte aucune goutte suspendue; il considère l'épaisseur de la lame comme étant alors uniforme, et il l'évalue d'après le diamètre de la bulle et le poids du liquide que contenait le tube; il obtient de cette manière $1/15624$ de pouce (environ $1/600$ de millimètre).

Partant toujours de son principe des trois membranes et de l'idée que la plus intérieure n'est formée que d'eau pure, il calcule, par le même procédé, l'épaisseur de cette dernière, connaissant la proportion d'eau de la solution, et trouve cette épaisseur égale à $1/17577$ de pouce (environ de $1/670$ millimètre); or, comme ses bulles ont leur diamètre maximum, de telle sorte qu'elles éclatent et se réduisent en une espèce de poussière si l'on continue à souffler, il en conclut que, jusqu'à cette limite de minceur seulement, les molécules d'eau peuvent demeurer unies, et qu'ainsi le diamètre d'une de ces molécules n'excède pas la valeur ci-dessus. Il déduit de la même méthode encore que le diamètre des molécules de l'huile n'est pas supérieur à $1/303851$ de pouce (environ $1/12000$ millimètre). Leidenfrost a donc eu la pensée de chercher des limites supérieures aux diamètres moléculaires.

Il avance que la lame qui constitue une bulle a des pores d'une grandeur notable, et il essaie de le prouver par les deux observations suivantes, qui sont évidemment erronées: quand on commence à gonfler une bulle, une grande partie de l'air qu'on y fait entrer s'échappe par ces pores, car, si l'on souffle avec force, un courant d'air perceptible se fait sentir à l'extérieur de la bulle; de la fumée introduite ne passe pas ainsi au dehors, mais si une bulle qui ne contient que de l'air est maintenue au-dessus de la flamme d'une lampe, la fumée noire de celle-ci pénètre à travers la lame, et rend opaque l'air intérieur.

Leidenfrost voit des lames et des bulles partout: pour lui, l'air atmosphérique est composé de petites huiles, ou plutôt de petites lamelles aqueuses; c'est une sorte de mousse qui s'est élevée de la surface des eaux; enfin les animaux et les plantes sont formés de petites bulles de savon et de petits tubes de la même matière. On me permettra de passer sous silence les motifs sur lesquels il appuie de semblables opinions.

§ 322. Dans un Mémoire probablement écrit en suédois à une époque un peu antérieure, mais qui a paru en français¹⁹⁴ en 1773, Wilke décrit ce qu'on observe sur des bulles de savon gonflées à une température très basse. Il s'exprime ainsi : « Si l'on forme ces bulles à un air assez froid pour les congeler, on y voit les petites particules de neige qui se condensent et flottent librement sur la bulle, sous la forme de petites étoiles.... Le temps le plus propre à souffler les bulles est le moment où l'eau de savon commence à geler. Les étoiles paraissent d'abord sous la forme de petits points, d'où l'on voit ensuite sortir les rayons peu à peu. Ces étoiles sont ordinairement hexagones. On voit ici la même étoile passer par une suite de figures différentes, dont la plupart ont déjà été observées dans la neige naturelle.... Plus le mélange est clair et le savon dissous, plus les étoiles sont délicates et nombreuses; elles croissent alors promptement, et les bulles éclatent. Celles qui sont faites avec un mélange plus épais, sont moins étoilées; mais elles durent plus longtemps, et on les observe mieux, quoique les

¹⁹⁴ *Sur la forme de la neige* (JOURN. DE PHYS. DE L'ABBÉ ROZIER I, p. 106).

figures soient moins distinctes.... Ceux qui répéteront ces expériences y découvriront une infinité de petits détails curieux et amusants. »

§ 322bis. En 1782, Cavallo¹⁹⁵ a communiqué à la Société Royale de Londres une expérience consistant à gonfler des bulles de savon avec de l'hydrogène, bulles qui s'élevaient d'elles-mêmes dans l'air. Ce furent là, comme il le dit, les premiers aérostats.

§ 322ter. Passons au siècle actuel. En 1819, Belli a mentionné¹⁹⁶ le fait suivant: lorsqu'un petit jet d'eau est lancé obliquement de bas en haut par un orifice situé sous la surface de l'eau, tout l'espace compris entre cette surface et la courbe du jet est occupé par une lame liquide, et le jet s'élève moins haut que si l'orifice s'ouvrait dans l'air.

§ 323. En 1820, Morey annonça¹⁹⁷ qu'on peut gonfler avec de la résine fondue, des bulles dont les dimensions atteignent celles d'un oeuf, et qui présentent des couleurs. D'après lui, on obtient ainsi, en général, une file de bulles dont chacune est attachée à la suivante par un mince filet; il ajoute qu'il en conserve depuis huit mois sans qu'elles aient subi d'altération. Il raconte ensuite qu'une petite fille accourut un soir vers lui et lui montra une semblable file parfaitement régulière de 22 à 23 petites bulles, ayant chacune environ un tiers de pouce (8mm) de longueur et un quart de pouce (6mm) de largeur; les minces filets intermédiaires avaient, en longueur, moins d'un huitième de pouce (3mm). Morey déclare qu'il n'a aucune idée de la cause qui produit cette succession alternative de bulles et de filets. Nous nous en occuperons plus loin (§ 501).

§ 324. Les années 1819 à 1844 nous fournissent une suite de Mémoires fort remarquables de Fusinieri¹⁹⁸. Ces Mémoires contiennent, comme celui de Leidenfrost, avec d'excellentes observations, une théorie difficilement acceptable. Voici, en ce qui concerne les lames liquides, un résumé des recherches dont il s'agit; je le rédige, non d'après les Mémoires mêmes, ne les ayant pas eus à ma disposition, mais d'après un exposé détaillé qu'en donne M. Dal Pozzo di Mombello, dans un ouvrage imprimé à Foligno en 1866, et intitulé: *La Dinamica molecolare secondo Fusinieri e Reichenbach*.

Fusinieri, dont je ne connaissais pas les travaux quand j'ai effectué mes expériences sur les petites calottes laminaires, avait nettement reconnu l'inversion des teintes dans les calottes de certains liquides développées à l'air libre, l'extrême rapidité avec laquelle se produit ce genre de coloration, les mouvements de trépidation des zones, la persistance plus grande, pour ces mêmes liquides, lorsque l'évaporation est libre, etc.

Il a le premier réalisé de grandes lames planes: afin d'étudier la succession et la disposition des teintes, il plonge dans une solution de savon le bord d'une cloche de verre, qui peut avoir jusqu'à 15 centimètres de diamètre, puis le retire, et le trouve occupé par une lame plane; il couche la cloche et la place près d'une fenêtre, de manière que la lame soit verticale et bien éclairée, et il exclut, au moyen d'écrans noirs, toute lumière étrangère. Dans ces conditions, les phénomènes sont d'une très grande régularité, et Fusinieri décrit avec soin la formation et la succession des bandes colorées

¹⁹⁵*The elements of natural or experimental philosophy*. Londres, 1803, vol. IV, p. 319.

¹⁹⁶*Di alcuni fenomeni prodotti nel moto de' liquidi dall' attrazione molecolare*. (Journ. de Brugnatelli, 2e décade, t. II, p. 232).

¹⁹⁷*Bubbles blown in melted rosin*. (Journ. de Silliman, 1re série, vol. II, p. 179).

¹⁹⁸*Ricerche sui colon delle lamine sottili e sui loro rapporti coi colon prismatici* (Journ. de Brugnatelli, 1819, t. II, p. 319).

Memoria sopra i fenomeni chimici delle lamine sottili (Ibid., t. IV, 1821, pp. 133, 209, 287, 380 et 442).

Della forza di repulsione che si sviluppa fra le parti dei corpi ridotti a minime dimensioni, ossia del calorico di spontanea espansione in lamine sottili (Ibid., t. VI, 1823, p. 34).

Come la forza repulsiva della materia attenuata agisca all'atto della rottura di bolle o lamine piane di soluzione di sapone (Ann. delle scienze del Regno Lombardo-Veneto, t. XIII, 1844, p. 213 et app.).

horizontales, ainsi que l'apparition et l'extension du segment noir supérieur. Pour ces expériences, il réalise aussi des lames planes d'eau de savon dans un anneau métallique de 5 à 7 centimètres de diamètre, qu'il installe verticalement sous une cloche de verre, afin de l'abriter des agitations de l'air; quand cet anneau n'a pas plus de 5 centimètres, le noir finit par envahir la totalité de la lame.

Il examine les lames d'un grand nombre de liquides, tant lorsqu'elles sont produites par étalement sur un autre liquide, que lorsqu'elles ont leurs deux faces dans l'air. Pour cette dernière condition, il les réalise, d'une part, à l'état de petites calottes, et, d'autre part, sous la forme plane dans de petits cadres métalliques; il étudie avec un soin minutieux toutes les particularités que présentent ces diverses lames, et de l'ensemble de ses observations il déduit la théorie dont nous allons rendre un compte succinct.

Disons d'abord qu'il appelle lames cunéiformes celles dont les deux faces vont en se rapprochant, de manière à former un angle très aigu; telle est, par exemple, dans une lame verticale où s'est formé le segment noir, la portion composée de l'ensemble des zones colorées; il nomme coins capillaires les petites masses à courbures transversales concaves qui rattachent soit une lame plane au cadre solide, soit une calotte laminaire à la surface du liquide. Ces termes admis, voici les points principaux de la théorie en question, avec une partie des faits sur lesquels elle s'appuie :

Une gouttelette d'une huile fixe ou d'un liquide combustible qui ne se mêle pas à l'eau (huiles essentielles, sulfure de carboné, etc.), s'étend en lame mince tant sur la surface du mercure que sur celle de l'eau; seulement, toutes choses égales d'ailleurs, le phénomène s'effectue avec moins de vitesse sur le mercure; mais, dans les deux cas, il est trop rapide pour qu'on puisse l'attribuer à la pesanteur; on ne peut le regarder non plus comme dû à une attraction de l'un des liquides pour l'autre, car cette attraction n'agirait que dans des directions normales à la surface du liquide sous-jacent, et non dans celle de cette surface même; en outre, elle devrait s'exercer avec plus d'énergie, et donner lieu ainsi à une extension plus rapide et plus grande, sur le mercure, à cause de la forte densité de celui-ci, tandis que c'est le contraire qu'on observe. Il faut donc reconnaître que l'extension résulte d'une cause intérieure au liquide de la gouttelette, d'une tendance spontanée à la dilatation, tendance qui ne peut provenir que d'un développement de calorique; si l'on veut, cette tendance naît de la force répulsive ordinaire du calorique, laquelle agit plus librement dans une masse ainsi atténuée.

Quand une lame ou une portion de lame est cunéiforme, la force en question chasse les molécules liquides vers l'arête du coin, dans des directions normales à celle-ci, et, toutes choses égales d'ailleurs, avec d'autant plus d'énergie que le coin est moins aigu.

Si aucun obstacle ne s'oppose à cette action, elle produit simplement l'extension de la lame; c'est le cas d'une gouttelette liquide déposée sur un autre liquide. Si quelque cause entrave l'extension, des phénomènes différents se produisent: dans certaines circonstances, des courants visibles de liquide se détachent continuellement de l'arête du coin suivant les directions indiquées plus haut; tel est le cas d'une calotte laminaire présentant les teintes inverses; dans une semblable calotte, il y a deux coins opposés l'un à l'autre, savoir le coin capillaire qui relie la calotte au liquide sur lequel elle repose, et la portion colorée de la lame, dont l'épaisseur va en croissant jusqu'au sommet; chacun de ces coins tend à chasser un courant de liquide vers l'autre, mais le coin capillaire étant beaucoup moins aigu, son action l'emporte, et il n'y a qu'un seul courant, dirigé de bas en haut; c'est celui-ci qui engendre le coin supérieur, et le soutient contre l'action de la pesanteur; c'est lui également qui répare sans cesse la perte de liquide que ce supérieur éprouve par l'évaporation.

Si l'on couvre avec une plaque de verre la capsule où l'on a développé la calotte, et

si les choses sont disposées de manière que le sommet de cette calotte ne soit qu'à une petite distance de la plaque, l'inversion des teintes disparaît, et la calotte éclate plus tôt: c'est qu'alors la vapeur émanée de la lame ne peut plus s'échapper, et exerce, par son propre calorique, une action neutralisante sur la force expansive de celui de la lame, de sorte que la pesanteur reprend ses droits. Cette influence de la présence d'une plaque solide au-dessus de la calotte vient, remarquons-le, l'appui de la théorie de M. Van der Mensbrughe (§ 256) sur l'inversion des teintes.

Dans d'autres circonstances, non seulement l'extension ultérieure d'une lame déjà cunéiforme est entravée, mais il y a, en outre, obstacle à l'émission des courants ci-dessus; c'est ce qui a lieu, par exemple, à l'égard d'une lame verticale ou inclinée d'eau de savon, quand la zone noire se développe, cette zone opposant une résistance à la production des courants dont il s'agit. Alors, dans la portion cunéiforme, la force expansive du calorique ne pouvant déterminer ni l'extension ultérieure générale ni une expulsion de courants, occasionne des extensions partielles alternant avec des gonflements: tels sont les têtards; la tête de ceux-ci est formée d'une petite portion circulaire amincie entourée d'un petit bourrelet saillant, lequel est lui-même entouré d'un anneau étroit aminci, et leur queue présente les mêmes alternatives de dépressions et de saillies. Tant dans les portions déprimées que dans les portions gonflées, la force expansive du calorique a écarté les molécules, et conséquemment le têtard entier est spécifiquement plus léger que le liquide environnant; aussi tous ont un mouvement ascensionnel dans la lame.

Fusinieri applique encore son principe au fait de la disparition instantanée des lames liquides qui se rompent. Selon lui, lorsqu'une lame se brise, et qu'ainsi le lien de la viscosité, qui maintenait le liquide à l'état laminaire, est enlevé, la force expansive, dirigée auparavant dans le sens de la surface de la lame, se dirige dans tous les sens, transforme le liquide en vapeur, et imprime aux molécules des mouvements violents de projection, accompagnés de décomposition avec dégagement de gaz; on s'assure de ce dégagement en ce que, après la rupture, on observe, sur le bord solide auquel était attachée la lame, une certaine quantité de minimes bulles creuses.

Fusinieri fait remarquer qu'on ne peut attribuer cette sorte d'explosion à la compression de l'air emprisonné dans une bulle, car le même phénomène se produit à l'égard des lames planes, et d'ailleurs on ne voit pas comment une enveloppe aussi peu résistante serait capable de contenir un gaz assez comprimé pour donner lieu à un semblable effet.

Certes, la théorie de Fusinieri ne saurait être admise; mais elle est ingénieuse, présentée avec habileté, et étayée d'une foule de petits faits dont nous n'avons pu indiquer que les plus saillants. La véritable théorie de tous les phénomènes de mouvement qui se manifestent dans les lames liquides, n'existe pas encore; mais le physicien qui voudra la chercher, devra nécessairement étudier les travaux de Fusinieri, s'il ne veut s'exposer à décrire comme nouvelles des particularités déjà connues.

Citons, en terminant cette analyse, une observation importante et curieuse: Fusinieri produit une lame verticale d'une solution assez concentrée de savon, dans un cadre métallique rectangulaire de 8 centimètres de base et de 2 de hauteur, et il la couvre d'une cloche de verre.

Dans ces conditions, outre une série de mouvements et de changements de teintes qu'offrent de petites portions colorées, il constate le phénomène suivant: quand la zone noire se développe, elle est contiguë à une zone blanche; mais du bord supérieur de celle-ci descendent de petites gouttelettes jaunes suivies de longues queues, le blanc se détruit ainsi graduellement, et le noir se trouve alors limité par le jaune du pre-

mier ordre; celui-ci se détruit à son tour de la même manière, mais les gouttelettes descendantes sont pourpres; les zones suivantes éprouvent, les unes après les autres, une semblable destruction, jusqu'à ce que le noir soit contigu à une zone du troisième ordre. Ce point atteint, la portion colorée de la lame s'amincit par l'action de la pesanteur, les couleurs des premiers ordres y reparaissent, puis sont successivement détruites comme précédemment.

§ 325. En 1829 ou 1830, Pfaff¹⁹⁹ a étudié, comme Wilke, les effets de la congélation sur les lames d'eau de savon. Pendant un hiver très froid, il développe, en opérant dans une chambre chauffée, une lame transversale à l'intérieur d'un flacon de 4 à 7 pouces (10 à 17 centimètres environ) de diamètre, hermétiquement bouché; il transporte ensuite ce flacon à l'extérieur d'une fenêtre, où la température est d'environ 10° au-dessous de zéro, et il observe la formation des petits cristaux de glace dans la lame. Il voit d'abord les couleurs de celle-ci se troubler, puis il assiste à la génération des cristaux, lesquels se montrent reposant sur un fond noir. Pfaff se livre à des conjectures, inutiles à rapporter ici, sur la nature de ce fond noir qui est constitué, comme il le remarque, par une partie de la solution incristallisable à la température où se fait l'expérience; mais ce qui est à noter, c'est qu'il constate que de semblables lames peuvent persister plusieurs jours. Il n'a pu observer la congélation dans la plus grande lame, celle de 7 pouces de diamètre, cette lame éclatant toujours avant l'apparition des cristaux.

§ 326. J'ai dit (§ 149), que, dans un Mémoire de 1830, le Dr. Hough paraît être amené à l'idée de la tension des surfacés liquides, uniquement en partant de la forme sphérique des gouttes liquides et des bulles de savon; que cette idée le conduit à celle d'une pression exercée sur l'air intérieur par la lame qui constitue une bulle ou une calotte, mais qu'en cherchant la loi qui lie cette pression au diamètre, il se trompe complètement.

J'ajoute ici qu'il a observé la petite masse à courbures transversales concaves qui garnit le bord des calottes laminaires; il a constaté, en outre, que ces calottes manifestent les attractions et répulsions apparentes des corps légers flottants.

Les §§230 à 232 contiennent le résumé des belles expériences de Savart, publiées en 1833, sur le développement de grandes lames de différentes formes par le choc de la partie continue d'une veine liquide contre un petit disque solide, et par le choc mutuel des parties continues de deux veines directement opposées.

§ 327. Dans son ouvrage sur la cohésion²⁰⁰, publié en 1835, Frankenheim avance que si une série de plaques solides horizontales, dont la supérieure seule est fixe, sont disposées les unes sous les autres avec des couches d'eau interposées, la colonne semi-liquide ainsi formée pourra avoir une assez grande longueur sans cesser de demeurer suspendue à la plaque fixe: si, par exemple; les couches d'eau n'ont que 0,1 d'épaisseur, l'équilibre se maintiendra tant que la somme des poids de toutes les plaques, sauf la supérieure, et de toutes les couches d'eau, ne dépassera pas celui d'une colonne d'eau de même diamètre et de 150mm de hauteur. Frankenheim compare alors à cette disposition en couches alternativement solides et liquides, la constitution intérieure des lames formées d'un liquide auquel on a ajouté quelques parties solides, telles que les lames d'eau de savon, bien que, comme il le remarque, l'analogie ne soit pas complète; selon lui, ce sont les particules solides tenues en suspension dans le liquide, et non les particules dissoutes, qui donnent à ce liquide la propriété de se laisser

¹⁹⁹ *Ueber die krystallinischen Verhältnisse des Dunst—Blättchens* (Mém. de l'Acad. de Munich, 1829-30, p. 77).

²⁰⁰ *Die Lehre von der Cohesion*. Breslau; §§69 à 76.

développer en lames; elles servent de points d'appui au liquide, comme les plaques solides ci-dessus; aussi ne doivent-elles se trouver ni en trop grande ni en trop petite proportion; c'est ainsi que, pour donner les plus grosses bulles, l'eau ne doit contenir ni trop ni trop peu de savon. Frankenheim compare aussi ces lames aux membranes et au vaisseaux d'origine organique, lesquels, dit-il, sont primitivement semi liquides et se solidifient plus tard par la perte du liquide et le rapprochement des parties solides.

J'ai rappelé au § 239 les résultats obtenus, en 1836, par Le François à l'égard de la lame à bord rectiligne oblique que j'avais décrite, et qui se forme quand un liquide s'échappe d'une fente rectiligne étroite percée dans la paroi latérale du réservoir depuis le fond de celui-ci jusqu'au-dessus du niveau.

§ 328. En 1836 et 1837, M. Draper a fait connaître de curieuses expériences sur le passage des gaz à travers les lames liquides. Les premières, qui ont été exposées dans le Journal américain des sciences médicales et dans le Journal de l'Institut Franklin, consistent à gonfler, avec un, certain gaz, une bulle de savon dans une atmosphère d'un autre gaz; la bulle alors augmente ou diminue graduellement en diamètre, et le phénomène s'arrête lorsque la composition des gaz des deux côtés de la membrane liquide est devenue la même. Les gaz employés sont, par exemple, le protoxyde d'azote à l'intérieur et l'azote à l'extérieur; dans ce cas, la bulle va en diminuant. L'auteur varie l'expérience de la manière suivante²⁰¹: on fait en sorte qu'une lame plane d'eau de savon occupe l'orifice d'un petit bocal de la contenance d'environ 60 centimètres cubes, puis on place ce bocal dans une atmosphère de protoxyde d'azote; après quelques secondes, on voit la lame se bomber vers l'extérieur, et, en une ou deux minutes, constituer la plus grande partie d'une sphère de 6 centimètres de diamètre.

J'ai rapporté, au § 307, le procédé du Dr. Reade (année 1837) pour rendre très durables les lames d'eau de savon, procédé se réduisant à développer ces lames dans une atmosphère uniquement formée de vapeur d'eau à saturation.

En 1840, le Dr. Reade est revenu²⁰² sur ces mêmes lames: il cherche à prouver, par une suite d'expériences, que les diverses couleurs des lames liquides ne proviennent pas de différences d'épaisseur. Par exemple, après avoir réalisé une lame par le procédé en question, il incline le flacon qui la contient, et attend qu'elle soit devenue entièrement noire; alors il donne au flacon un certain mouvement de va et vient dans le sens horizontal, et bientôt la lame se trouve parsemée d'une multitude de points blancs, qui se réunissent en bandes colorées, lesquelles se forment presque simultanément, ne peuvent, dit-il, être engendrées par un fluide descendant.

L'auteur part de là pour avancer, sur la cause des couleurs en général, une théorie que nous n'avons pas à reproduire.

§ 328bis. Brewster a étudié²⁰³, en 1841, les apparences curieuses, qui se manifestent lorsqu'on éclaire par de la lumière polarisée une lame liquide présentant des couleurs en anneaux ou en autres figures, et qu'on fait varier l'azimut du plan de polarisation, l'angle d'incidence sur la lame, la nature du liquide dont cette lame est formée, etc. Quand la lame repose sur une surface solide ou liquide, comme dans le cas de l'étalement d'une gouttelette d'huile essentielle sur l'eau, Brewster constate des disparitions et réapparitions successives des anneaux, avec des passages de systèmes ou portions de systèmes d'anneaux à centre noir à des systèmes ou portions de systèmes à centre blanc, et vice versa, etc. Quand, au contraire, la lame a ses deux faces dans l'air, les phénomènes ci-dessus ne se montrent pas: les figures conservent la disposition de

²⁰¹ *Gaseous diffusion* (Philos. Magaz., nouvelle série, vol. XI, p. 559).

²⁰² *Remarks on the permanent soap film and on thin plates* (ibid, vol. XVII, p.32).

²⁰³ *On the phenomena of thin plates of solid and fluid substances exposed to polarized light* (Philos. Transact., 1841, p. 43).

leur teintes; si ce sont des anneaux, ils sont toujours à centre noir, et il n'y a d'autre disparition que celle qui se produit lorsque la lumière frappe la lame sous l'angle de polarisation du liquide. L'auteur donne la raison théorique de tous ces phénomènes.

Enfin si l'on reçoit dans l'oeil non le faisceau réfléchi, mais le faisceau transmis par la lame, et si cette lame montrait par réflexion une teinte uniforme, on observe, en employant un analyseur, soit des zones colorées, soit un système d'anneaux à centre noir ou à centre blanc; si la lame est assez épaisse pour paraître incolore, elle dépolarise le faisceau transmis.

J'ai mentionné, au § 314, les bulles grosses et très persistantes que M. Böttger a gonflées (année 1838) avec un mélange fondu de colophane et d'huile de lin.

§ 329. En 1843, Marianini a décrit²⁰⁴ une expérience intéressante, où se produit, en outre, un fait analogue à ceux signalés par M. Draper : on laisse tomber une bulle de savon, gonflée avec la bouche, dans une large éprouvette en verre remplie aux deux tiers environ de gaz acide carbonique; après quelques oscillations, cette bulle demeure suspendue; mais bientôt on la voit augmenter en diamètre, et descendre au fur et à mesure, jusqu'à ce qu'elle éclate. En disparaissant, elle lance dans toutes les directions une quantité de petites gouttelettes qui vont arroser les parois du vase. Marianini tire de ce dernier fait la conséquence que le gaz contenu dans la bulle est dans un état de compression.

Il s'exprime ainsi au commencement de l'article « Pour rendre sensible la grande différence de densité qui existe entre l'air atmosphérique et le gaz carbonique, on fait depuis longtemps, dans les cours de physique, l'expérience suivante. » L'idée ingénieuse de faire flotter une bulle de savon sur le gaz carbonique paraît donc ne pas être due à Marianini; j'ignore quel en est l'auteur, et à quelle époque elle a été mise en avant.

§ 330. On a vu, aux § 116, 118 et 151, que M Henry, dans une communication verbale de 1844, regarde la tension des surfaces liquides comme déterminant la forme sphérique des bulles laminaires, par la condition du minimum de surface; qu'il fait dépendre de la même cause la pression exercée sur l'air intérieur, pression dont il énonce le rapport inverse au rayon de la bulle; qu'il indique comme manifestation curieuse de la tension et de la pression qui en est la conséquence, le retrait rapide de la lame et le courant d'air intense qu'on reçoit au visage quand, après avoir gonflé une grosse bulle à l'extrémité d'un large tube, on ôte celui-ci de la bouche; qu'il a mesuré cette même pression à l'aide d'un manomètre à eau; enfin qu'il s'est légèrement trompé en attribuant toute l'action à la surface extérieure de la bulle.

M. Henry avait fait, peu de temps auparavant, une première communication concernant des mesures approximatives de la cohésion des liquides: il a cherché à évaluer cette cohésion dans l'eau de savon « en pesant la quantité d'eau qui adhérerait à une bulle de cette substance immédiatement avant la rupture, et en déterminant l'épaisseur de la lame par l'observation de la couleur qu'elle présentait, d'après l'échelle des lames minces de Newton. » Je traduis ici littéralement le passage du compte rendu, parce qu'il n'est pas clair. M. Henry conclut de ses expériences que la cohésion de l'eau, loin d'être aussi faible qu'on le croyait, s'élève à plusieurs centaines de livres par pouce carré, et est probablement égale à celle de la glace.

J'ajoute à ce que j'ai dit relativement à la seconde communication, que, dans ses mesures de la pression au moyen du manomètre à eau, M. Henry estime de la même manière l'épaisseur de la lame immédiatement avant la rupture, et arrive également,

²⁰⁴ Sur un phénomène offert par les bulles de savon flottant sur le gaz carbonique (Ann. de Chim. et de Phys. de Paris, 3e série, t. IX, p. 382).

par ce mode d'expérimentation, à des valeurs approchées de la cohésion, valeurs qui sont de l'ordre de celles qu'il avait déduites des pesées. Il a employé, dit le compte rendu, pour mesurer la ténacité de la lame, plusieurs autres méthodes, dont les résultats généraux ont encore été les mêmes.

§ 331. En 1845, M. Melsens²⁰⁵ est parvenu à réaliser de petites bulles creuses de mercure; il fait tomber, d'une hauteur suffisante, sur un bain de mercure recouvert d'une couche d'eau de 4 à 5 centimètres d'épaisseur, un filet de ce dernier liquide, de telle manière que des bulles d'air soient entraînées avec assez de force pour pénétrer sous la surface du métal; ces bulles alors, en remontant, se revêtent d'une mince pellicule de celui-ci, et viennent, en cet état, flotter à la surface de l'eau, où elles persistent assez longtemps pour être aisément observées; le diamètre des plus grosses peut atteindre 15mm.

On comprend sans peine pourquoi, dans cette expérience, les bulles d'air qui remontent à la surface du mercure ne se bornent pas à y développer des calottes sphériques laminaires, mais poursuivent leur marche ascensionnelle en emportant des sphères laminaires complètes: chaque bulle d'air, après avoir formé une calotte mercurielle, demeure soumise, de la part de l'eau, à une poussée de bas en haut, poussée qui lui est transmise par l'intermédiaire du mercure, et lui fait surmonter la pression capillaire exercée sur elle de haut en bas par la calotte soulevée; la pellicule mercurielle, que la cohésion empêche de se briser, est obligée alors de continuer à se développer et d'entourer enfin complètement la bulle d'air.

Un fait remarquable observé encore par le même physicien²⁰⁶, c'est que ces bulles creuses de mercure sont transparentes dans leur partie la plus mince; la lumière qui les traverse prend une teinte d'un bleu ardoisé. A l'époque où M. Melsens a fait connaître ce dernier résultat, Faraday n'avait pas encore publié les expériences au moyen desquelles il a formé des lames si minces d'un grand nombre de métaux, que toutes laissent passer la lumière, et l'or était le seul qu'on eût pu atténuer assez pour le rendre transparent.

J'ai analysé au § 153 un travail de M. Hagen publié en 1849, où ce savant attribue la limitation des disques liquides de Savart à la tension des deux faces de la lame, cette tension donnant lieu à une force dirigée en sens contraire du mouvement du liquide.

§ 332. En 1852, M. Eisenlohr²⁰⁷ a développé de grands et beaux anneaux colorés, en faisant tourner rapidement, dans leurs plans et autour de leurs centres, des lames circulaires d'eau de savon. Il engendre ces lames, par une agitation convenable, dans un ballon de verre dont le diamètre peut atteindre 12 centimètres, après avoir, suivant le procédé du Dr. Reade, chassé par l'ébullition la totalité ou la presque totalité de l'air intérieur, et avoir bouché hermétiquement le ballon; il imprime ensuite à celui-ci un mouvement rapide de rotation autour d'un axe vertical passant par le centre.

Dans cette expérience, on voit bientôt se former, au centre commun des anneaux, une tache circulaire noire, qui grandit, et qui est nettement limitée à son bord par l'une des couleurs du premier ordre. L'auteur essaie d'expliquer ce saut brusque, déjà signalé par Leidenfrost (§ 321), en émettant l'hypothèse que la portion noire n'a que l'épaisseur d'une simple molécule, de sorte que, dans le passage à l'anneau contigu, l'accroissement d'épaisseur est beaucoup plus considérable relativement à l'épaisseur de cette portion noire, que dans les passages entre les divers anneaux.

²⁰⁵ *Comptes rendus*, t. XX, p. 1658.

²⁰⁶ *Journ. l'Institut*, 1845, n° 605, p. 279.

²⁰⁷ *Bericht über die XXIXste Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte*, p. 87. — Voir aussi le *Traité de physique* du même auteur; l'édition que j'ai consultée est celle de 1860.

A la fin du § 230, j'ai dit un mot des modifications que M Tyndall a fait subir, en 1854, aux lames de Savart résultant du choc d'une veine liquide contre un obstacle solide.

§ 333. Magnus, dans la première partie de ses *Recherches hydrauliques* (§ 234), publiée en 1855, s'occupe aussi des disques liquides de Savart. Il envisage la chose à peu près dans le même sens que M. Hagen, mais, n'employant pas le calcul, il considère la lame comme allant toujours en diminuant d'épaisseur de la partie centrale jusqu'au bord; il introduit, comme M. Hagen, un obstacle dans le disque liquide pour y produire une échancrure, et il signale, à cet égard, des faits qu'il est important de noter: les gouttes formées aux deux bords de l'échancrure s'élancent beaucoup plus loin que celles qui émanent de la partie restante du contour du disque; en outre, les premières partent dans les directions tangentielles aux courbes des bords d'où elles sont chassées.

J'ai parlé, au § 234, des recherches du même savant sur les phénomènes résultant du choc des parties continues de deux veines qui se rencontrent en formant un angle entre elles, phénomènes où se produisent également des lames.

J'ai reproduit, au § 118, la détermination donnée par M. De Tessan (année 1856) de la valeur de la pression qu'éprouverait l'air emprisonné dans une vésicule de vapeur d'eau, si ces vésicules existaient. C'est, je pense, la première évaluation théorique de la pression à l'intérieur d'une sphère laminaire d'un diamètre donné et formée d'un liquide donné, bien que cette évaluation soit de moitié trop faible, ainsi que je l'ai fait remarquer; on ne doit pas tenir compte de celles du Dr Hough, qui sont absolument fausses.

§ 334. J'ai traduit, dans le § 242, une partie de la Note de M. Gladstone sur la mousse (année 1857), Note où l'auteur avance que tous les liquides sont susceptibles de donner, par l'agitation, des calottes laminaires à leur surface, mais que la faculté de mousser paraît être sui generis et ne dépendre d'aucune propriété connue.

M. Gladstone fait remarquer, en outre, que la mousse produite sur un liquide coloré est toujours d'une teinte plus claire que le liquide lui-même, et il ajoute que, dans certains cas, cette teinte est toute différente de celle du liquide; par exemple, la mousse d'une solution de rouge de cochenille est d'un pourpre bleuâtre pâle; il explique ces effets par l'absorption inégale des différents rayons qui composent la lumière blanche, dans une lame mince et dans une couche épaisse du liquide.

§ 335. M. Tyndall²⁰⁸ (même année 1857), en plongeant la main dans l'écume de la mer par un temps âpre et humide, a trouvé que cette écume avait la température du sang, tandis que l'eau de la mer d'où elle provenait était très froide. Il attribue la chaleur dont il s'agit à ce que les masses d'air, avant de former l'écume, avaient été fortement comprimées entre des vagues tombant les unes sur les autres.

§ 336. En 1857 aussi, M. Van der Willigen²⁰⁹ a proposé, pour rendre raison du saut brusque entre le noir et le blanc contigu dans une lame d'eau de savon, une explication qui coïncide, à peu de chose près, avec une hypothèse de Leidenfrost; il regarde comme probable que, dans la lame, s'opère une séparation de la partie huileuse du savon; que celle-ci glisse sur la couche de nature aqueuse et produit les bandes colorées, tandis que la portion mise à nu de cette couche aqueuse constitue le segment noir.

§ 337. J'ai rapporté, au § 156, la formule donnée, sans démonstration, en 1858, par Sir W. Thomson pour représenter, en fonction de la tension du liquide, la pression exercée par une bulle laminaire sur l'air intérieur. Sir W. Thomson déduit ensuite du calcul cette conséquence que, lorsqu'une lame liquide se développe, elle se refroidit, bien que

²⁰⁸ *Remarks on foam and hail* (PHILOS. MAGAZ., 4me série, vol. XIII, p. 352).

²⁰⁹ *Ueber die Constitution der Seifenblasen* (ANN. de M. Poggendorff, vol. CII, p. 629).

d'une quantité extrêmement petite. Prenant comme exemple l'eau, il indique, pour la tension, sans dire où il a pris cette valeur et sans mentionner la température, 2,96 grains par pouce de longueur, ce qui, traduit en milligrammes par millimètre de longueur, fait 7,57. Supposant ensuite qu'une quantité d'eau du poids d'un grain soit étendue en une lame de 16 pouces carrés, il trouve que cette lame s'est refroidie d'environ 1/320 de degré centigrade.

§ 338. En 1861, M. Graham, dans son célèbre Mémoire sur la dialyse²¹⁰ donne une explication des faits d'endosmose apparente que présentent les lames liquides (§§328 et 329); il s'exprime ainsi « la séparation décrite est plus ou moins analogue à celle qu'on observe dans une bulle de savon gonflée avec un mélange gazeux composé d'acide carbonique et d'hydrogène. Aucun gaz, comme tel, ne peut traverser la lame aqueuse; mais l'acide carbonique étant soluble dans l'eau, est condensé et dissous par la lame aqueuse, et ainsi devient capable de passer au dehors et de se répandre dans l'atmosphère, tandis que l'hydrogène étant insoluble, ou à fort peu près, dans l'eau, est maintenu de l'autre côté de la lame, à l'intérieur de la bulle. »

§ 339. En 1861 aussi, M. Faye, après m'avoir fait l'honneur de répéter, devant l'Académie des sciences de Paris, mes expériences sur les systèmes laminaires, des charpentes en fil de fer²¹¹ a décrit une expérience consistant à agiter, à l'aide d'un anneau en fil de fer, de l'huile et de l'eau de savon dans un vase de verre; chaque fois que l'anneau passe de l'eau de savon dans l'huile, il emporte une lame du premier de ces liquides, laquelle, par les mouvements imprimés à l'anneau, donne lieu à une bulle laminaire complète pleine d'huile et nageant dans ce dernier liquide. En continuant à battre les liquides, ces sphères laminaires se multiplient et se subdivisent en sphérules de même nature de plus en plus petites et de plus en plus nombreuses, jusqu'à ce que le mélange devienne une émulsion. M. Faye pense qu'on peut faire l'application de ce phénomène à certaines questions de physiologie.

C'est en 1861 également que j'ai reçu la lettre où M. Van Rees a bien voulu me communiquer les procédés au moyen desquels il change à volonté la position de la lamelle centrale dans le système laminaire de la charpente cubique, et détermine la formation des polyèdres laminaires intérieurs (§ 203).

Le principe nouveau concernant les systèmes laminaires des charpentes prismatiques (§ 202) m'a été exposé par le même savant dans une seconde lettre écrite en 1862.

§ 340. J'ai rapporté, dans le § 312, la remarque de M. l'abbé Florimond (année 1862) sur le diamètre maximum plus grand que prennent les bulles de savon quand on emploie, pour les gonfler, une pipe de verre au lieu d'une pipe de terre.

M. Florimond fait observer, en outre, que plus est large l'orifice de l'évasement du tube, plus grand aussi est le diamètre des bulles, pourvu que le tube lui-même ne soit pas trop étroit. Je suis convaincu qu'en attachant un entonnoir en verre de 10 à 15 centimètres d'ouverture à un tube de 2 centimètres de diamètre intérieur communiquant avec une soufflerie, et s'en servant pour gonfler des bulles avec un bon liquide glycérique, on donnerait à ces bulles des dimensions énormes. Je trouve, du reste, dans la suite du passage des *Petites chroniques de la science* cité au § 315, que M. Vivier, le célèbre musicien, obtient des bulles de savon gigantesques en soufflant dans un cornet en carton, cornet qui, sans doute, est fort évasé. On verra plus loin que M. Böttger a obtenu aussi de très grosses bulles en employant un large orifice.

²¹⁰*Liquid Diffusion applied to Analysis* (Philos. transact. 1861, vol. CLI, 1re partie, p. 183).

²¹¹COMPTES RENDUS, t. LIII, p. 463. — Cet article est précédé d'une Note rédigée par moi sur les systèmes laminaires, Note au commencement de laquelle, le nom de M. l'abbé Moigno se trouve, par une cause inutile à mentionner ici, substitué à celui de M. Faye.

MM. Minary et Sire ont décrit, en 1862 aussi, leur expérience de petites bulles laminaires complètes, engendrées par la vive agitation de l'acide sulfurique avec l'huile d'olive, expérience que j'ai rappelée avec plus de détails dans le § 237.

§ 341. Dans la Note à laquelle j'ai fait allusion au § 314, Note publiée en 1862 encore, M. Mach, partant du fait que mes systèmes laminaires ne satisfont pas à la condition générale de l'équilibre, puisqu'ils ont, sur les arêtes liquides, des surfaces à forte courbure dans le sens transversal seulement, tandis que les surfaces des lames sont à courbure moyenne nulle, émet l'opinion que l'étude de ces systèmes pourrait conduire à des conséquences importantes sur les lois de l'attraction moléculaire dans les liquides. Selon lui, j'aurais cherché à expliquer le fait en question en admettant que l'épaisseur des lames est inférieure au double du rayon de la sphère d'attraction, ce qui fait supposer que je regarde ces mêmes systèmes comme étant à l'état d'équilibre complet; or ce que j'avais dit dans ma 2^{me} Série, c'est que, dans un système où des lames à courbure moyenne nulle sont ainsi rattachées à des masses à courbure concave, l'équilibre n'est qu'apparent, ou plutôt n'existe que dans la forme générale de l'ensemble; que, par suite des différences de pression capillaire, les lames envoient continuellement leur liquide à ces masses, et vont conséquemment en s'amincissant; enfin que le système *tend* vers un état d'équilibre dans lequel les lames auraient une épaisseur moindre que le double du rayon de l'attraction moléculaire, mais que cet équilibre paraît ne pouvoir être atteint, les lames éclatant toujours auparavant. Aujourd'hui, du reste, j'abandonne, en conséquence de la remarque de M. Quincke citée au § 165, l'idée de la possibilité théorique d'un équilibre final complet.

M. Mach croit qu'il pourra tirer un parti intéressant de la comparaison des épaisseurs des lames de différents liquides (probablement à l'instant de leur formation); c'est dans ce but qu'il a réalisé, ainsi que je l'ai dit au paragraphe cité plus haut, le système laminaire du tétraèdre régulier, en employant de la colophane fondue; il a formé aussi de petites lames avec une solution d'un silicate alcalin, lames qui se sont solidifiées par l'évaporation de l'eau. Ces différentes lames ayant été détachées des fils, solides, M. Mach les a pesées, et a mesuré la surface de chacune d'elles, puis, connaissant en outre leurs densités, il a calculé leurs épaisseurs moyennes. Il a trouvé de cette manière que l'épaisseur moyenne des lames de la solution de silicate, à l'état liquide, était de 0mm,142, et que celle des lames de colophane était de 0mm,027.

§ 342. En 1862 également, M. Kaul a fait paraître un article²¹² relatif aussi à mes systèmes laminaires. Il démontre la nécessité de l'égalité des angles entre les lames qui aboutissent à une même arête liquide et entre les arêtes liquides qui aboutissent à un même point liquide, en employant une méthode qui revient à celle que j'avais exposée dans ma 6^{me} Série, et que je n'ai pas reproduite dans l'ouvrage actuel parce qu'on arrive beaucoup plus simplement au résultat par les tensions. Il fait remarquer ensuite que si la charpente qu'on retire du liquide consiste simplement en deux polygones plans ayant un côté commun, et si les plans de ces deux polygones forment entre eux un angle moindre que 120°, le système obtenu se compose de deux lames courbes s'appuyant respectivement sur les contours libres des deux polygones, et d'une troisième lame, en forme de faucille, partant du côté commun pour s'unir aux deux premières par une arête liquide courbe; il en conclut que de semblables lames en faucille tendent toujours à se produire dans les différentes charpentes, mais que leur forme est altérée par les autres lames du système, et il croit qu'en partant de ce principe et des lois concernant les angles, on peut prévoir quel sera le système qui se montrera dans une charpente

²¹² *Ueber die Plateau'schen Figuren* (SITZUNGSBERICHTE DER KOENIGSBERGER GESELLSCHAFT, t. III, p. 7).

donnée. Mon fils Félix (même année 1862) a déterminé la formation de grosses bulles laminaires en lançant obliquement en l'air de l'eau de savon, expérience que j'ai citée plus au long dans le § 235.

§ 343. Dans un mémoire²¹³ de l'année 1863, M. Sire indique quelques expériences curieuses concernant la pression exercée par une bulle creuse sur l'air emprisonné: il fait en sorte que deux bulles de liquide glycérique soient respectivement gonflées aux deux extrémités d'un même tube; celui-ci est muni, à cet effet, d'un embranchement pour l'insufflation; l'appareil est construit de façon qu'on puisse établir, ou interrompre à volonté la communication entre les deux moitiés du tube. Quand cette communication est fermée ainsi que l'orifice d'insufflation, les bulles n'éprouvent aucun changement de dimensions; mais quand elle est ouverte, l'orifice d'insufflation demeurant bouché, les bulles ne persistent dans le même état que si leurs diamètres sont égaux; dans le cas contraire, on voit la plus petite diminuer avec une accélération, jusqu'à s'annuler, l'excès de sa pression chassant son contenu gazeux dans la plus grosse, qui augmente ainsi en volume. L'auteur varie l'expérience en modifiant l'appareil de manière à pouvoir gonfler l'une des bulles à l'intérieur de l'autre.

Ainsi que je l'ai dit dans le § 235, M. Van der Mensbrugge a étendu (année 1864) l'expérience de mon fils, en montrant que, par le même procédé convenablement employé, on peut forcer un grand nombre de liquides, peut-être tous, à s'arrondir en bulles creuses complètes.

§ 344. En 1864 encore, M. Laroque²¹⁴ s'est proposé d'étudier la constitution d'une veine d'eau lancée verticalement de haut en bas par un orifice circulaire, quand le liquide du vase est animé d'un mouvement gyrotoire autour de l'axe de l'orifice. Le vase était cylindrique et de grande dimension; l'orifice, percé au centre du fond, avait un centimètre de diamètre; le mouvement de rotation était imprimé au liquide, par un moyen que l'auteur indique. Parmi les observations de M. Laroque, je dois citer ici la suivante: Sous une charge suffisamment réduite, une excavation formée au milieu de la surface du liquide du vase, après avoir atteint l'orifice, pénétrait dans la veine, et celle-ci, jusqu'à une certaine distance, devenait laminaire; elle se composait alors de renflements et d'étranglements creux occupant des positions fixes. Avec une charge de 15 centimètres, il y avait trois de ces renflements, dont les deux supérieurs, de forme régulière, avaient chacun 8 centimètres de longueur et 16 millimètres de largeur; le troisième était un peu plus petit et moins régulier; au-dessous, la veine s'éparpillait en gouttes. Seulement, d'après les figures dont le Mémoire est accompagné, la lame qui constituait toute cette portion de la veine était beaucoup moins mince aux étranglements qu'aux renflements.

J'ai indiqué, aux § 204 et 210, les principaux résultats auxquels M. Lamarle est arrivé dans son Mémoire (années 1864 et 1865) sur mes systèmes laminaires.

Ainsi qu'on l'a vu, il démontre mathématiquement les lois que j'avais trouvées, et il étudie d'une manière toute spéciale les polyèdres laminaires fermés à faces courbes qu'on produit au milieu des systèmes laminaires des charpentes.

J'ai cité, au § 160bis, l'expérience de M. Marangoni (année 1865), consistant à faire traverser une lame d'eau de savon par des veines liquides.

§ 345. On a vu, à la fin du § 118, que M. Tait a calculé, en 1866, les pressions auxquelles l'air serait soumis à l'intérieur de vésicules de vapeur d'eau de diamètres déterminés.

²¹³ *Etude sur la forme globulaire des liquides*, thèse présentée à la Faculté des sciences de Besançon.

²¹⁴ *Ann. de chim. et de phys.* de Paris, 4me série, t. I, p. 276.

La même année, M. Tait a communiqué à la Société Royale d'Edimbourg²¹⁵, certains résultats concernant les lames. La relation qu'en donnent les *Proceedings* est trop succincte, mais une lettre que l'auteur m'a fait l'honneur de m'adresser me permet de les résumer d'une manière un peu plus complète.

En premier lieu, M. Tait cherche par quelles modifications passe l'étranglement quand une bulle se détache d'un orifice (§ 228). Pour cela, il gonfle, au moyen d'un tube évasé tenu l'orifice en haut, une bulle de liquide glycérique, avec un mélange de gaz d'éclairage et d'air; il s'arrange de façon que la bulle ait une légère tendance à monter, et qu'elle se sépare de l'orifice avec le moins de vitesse possible; il constate alors, pour autant que la rapidité du phénomène le permet, un résultat prévu par lui, savoir qu'à l'instant de la fermeture, la ligne méridienne de l'étranglement présente deux points de rebroussement en regard qui s'unissent. Ni le compte-rendu ni la lettre ne mentionnent d'après quelles vues théoriques M. Tait attendait ce résultat. Je reviendrai plus loin sur le phénomène.

En second lieu, M. Tait a montré comment on peut réunir deux bulles en une seule, ou fractionner une bulle en deux ou plusieurs autres; j'ignore quels sont les procédés qu'il a indiqués, mais je me suis assuré que si, après avoir déposé sur un anneau une bulle de savon de 5 à 6 centimètres de diamètre, on descend sur elle une seconde bulle de même diamètre gonflée à l'orifice d'une pipe, les deux s'unissent fréquemment sans cloison et qu'en même temps la bulle unique résultante se sépare spontanément de la pipe, pour demeurer sur l'anneau.

Avec le liquide glycérique, deux bulles du diamètre ci-dessus ont toujours donné une cloison; il a fallu porter le diamètre à un décimètre environ. Quant à la séparation d'une bulle en deux autres, elle se réalise dans l'expérience du § 113.

En troisième lieu, M. Tait dirige, dans une chambre obscure, un faisceau de rayons solaires sur une grosse bulle de liquide glycérique. Ce faisceau, après s'être partiellement réfléchi à la partie postérieure de la bulle comme sur un miroir concave, converge conséquemment en un foyer d'où il diverge de nouveau pour traverser ensuite la partie antérieure de la bulle; une portion de la lumière ainsi réfléchie est reçue sur un écran blanc convenablement placé et va y peindre les couleurs des lames liquides minces avec leurs modifications successives; M. Tait assure que ce spectacle est fort beau.

Enfin l'auteur avance que si l'on regarde à travers un prisme la petite image du soleil réfléchie, dans une chambre obscure, par une bulle de liquide glycérique, on distingue parfaitement, dans le spectre produit, les bandes obscures d'interférence connues sous le nom de bandes de Wrede.

§ 346. M. Broughton²¹⁶ (même année 1866) rappelle le fait, suivant lui bien connu, que, dans une bulle de savon, les portions qui, vues d'une certaine distance, paraissent d'une teinte uniforme, montrent, quand on les examine, de plus près, une foule de petites bandes de couleurs variées et brillantes; il est rare qu'on y trouve un espace d'un millimètre carré qui ne contienne pas plusieurs de ces petites bandes, et l'uniformité apparente est due simplement à la prédominance des petites bandes d'une teinte déterminée. M. Broughton dépose sur un anneau une petite bulle de liquide glycérique à l'oléate de soude, et, lorsqu'une tache noire s'est formée au sommet²¹⁷, il observe celle-ci et ses environs à l'aide d'un microscope composé, la bulle étant éclairée par

²¹⁵ *Proceedings of the Roy. Soc. Of Edinb.*, vol. V, 1865-66, p. 593.

²¹⁶ *On some properties of soap bubbles* (PHILOS. MAGAZ., 4me série, vol. XXXI, p. 228).

²¹⁷ L'apparition de cette tache noire sur une bulle de liquide glycérique me paraît singulière: on a fait chez moi une quantité innombrable de bulles de ce liquide préparé soit au savon, soit à l'oléate de soude, et jamais on ne m'a signalé de semblables taches, quelque grande qu'ait été la persistance. Les bulles de M. Broughton devaient être fort petites, et c'est peut-être à cette circonstance qu'était due la production de la tache noire.

une lumière vive et convenablement dirigée; il constate alors la production d'un grand nombre de petites figures colorées très variées et très mobiles, offrant, dit-il, un spectacle de la plus grande magnificence.

M. Broughton essaie ensuite de déterminer, par une méthode particulière, l'épaisseur moyenne de la lame qui constitue une bulle: il gonfle la bulle avec un mélange d'hydrogène et d'air, en variant les proportions de ce mélange et le diamètre de la bulle jusqu'à ce que celle-ci, débarrassée de la goutte qui y adhère ordinairement, flotte dans l'atmosphère sans grande tendance à monter ou à descendre; connaissant alors le diamètre de cette bulle, la densité du liquide, et la proportion du mélange gazeux intérieur, il en déduit, au moyen d'une formule, le poids de la bulle et l'épaisseur moyenne cherchée. Par exemple, une bulle de 90mm de diamètre, gonflée avec un mélange de 1 vol. d'hydrogène et de 16 vol. d'air, s'est trouvée dans les conditions requises, et M. Broughton est arrivé, pour l'épaisseur moyenne de la lame, à la valeur 0mm,000965.

§ 347. Dans le 5^{me}, le 6^{me} et le 7^{me} de ses *Mémoires Sur la théorie mécanique de la chaleur* (de 1865 à 1868), Dupré, nous le savons, a traité, par des méthodes nouvelles, certaines questions relatives aux lames liquides. Ainsi qu'on l'a vu au § 161, outre des expériences simples au moyen desquelles il constate l'existence de la tension dans les lames, il arrive à plusieurs résultats généraux concernant cette force: il fait remarquer que la tension est indépendante de l'épaisseur de la lame, du moins tant que cette épaisseur n'est pas au-dessous d'une certaine limite extrêmement petite; il établit que la tension diminue, mais assez faiblement, quand la température augmente, et il signale un fait qui montre cette variation dans les lames; il cherche les lois que suit la vitesse de retrait d'une lame qui éclate, et celle qui régit la diminution progressive du diamètre d'une bulle quand on laisse ouvert le tube d'insufflation; enfin l'un des nombreux procédés qu'il décrit pour évaluer la tension des surfaces liquides en général, est fondé sur la mesure de la pression à laquelle est soumis l'air emprisonné dans une bulle.

J'ajoute ici une expérience curieuse exposée dans le même travail: si on laisse tomber d'une hauteur modérée une petite boule de liège sur une lame plane horizontale de liquide glycérique, la lame est traversée, mais n'éclate pas et conserve son intégrité. Pour savoir ce qui se passe dans cette circonstance, Dupré fixe la boule de liège à l'extrémité d'une aiguille, et, tenant cette dernière en main, il fait passer la boule avec lenteur à travers la lame; il voit alors cette dernière s'enfoncer, former une poche de plus en plus profonde, puis cette poche s'étrangle au-dessus de la boule, l'étranglement se ferme, se sépare en deux, et la lame plane est restituée. Le phénomène est donc tout à fait analogue à celui qui a lieu quand on sépare une bulle du tube qui a servi à la gonfler (§§224 et 228).

M. Van der Mensbrugge a fait (§ 139), en 1866, l'application du principe général du § 128 à la réalisation, en lame, d'une surface à courbure moyenne nulle dont M. Scherk avait trouvé l'équation en coordonnées finies.

J'ai donné, dans le § 162, la substance d'une autre Note de M. Van der Mensbrugge, (année 1866), concernant: 1° de nouveaux procédés pour l'évaluation de la tension des lames; 2° les lois qui régissent la forme que prend un fil flexible inséré dans une lame liquide courbe, quand on a crevé la portion de lame qu'il intercepte. J'ai fait allusion, dans le même paragraphe, au rapport de M. Lamarle sur cette Note, rapport où est signalée une loi qui avait échappé à M. Van der Mensbrugge, ainsi que la nécessité d'une déformation, dans le plus grand nombre des cas, de la surface laminaire sous l'action du fil qui s'est tendu. Enfin, au même endroit encore, j'ai cité une dernière Note, publiée en 1867, dans laquelle M. Van der Mensbrugge vérifie les conclusions

du rapport ci-dessus, et indique une expérience intéressante sur la tension d'une lame plane verticale.

§ 348. En 1866 ou 1867, M. Böttger²¹⁸ a développé, avec une décoction concentrée d'écorce de Quillaya (bois de Panama), des bulles extrêmement grosses, persistant longtemps et étalant de vives couleurs (il n'indique ni le diamètre ni la durée), en se servant d'un entonnoir de 7 à 8 centimètres d'ouverture. On sait que l'écorce de Quillaya contient de la saponine.

§ 349. Les lames liquides ont fait, en 1867, l'objet de trois Mémoires de Brewster. Le premier²¹⁹ est consacré aux couleurs des lames : l'auteur étudie avec un soin minutieux toutes les dispositions, tous les changements des couleurs dont il s'agit, et tous les phénomènes singuliers qu'elles présentent, tels que la production et les mouvements des petites taches en forme de têtards, etc. A part ces détails, qui ne sauraient être résumés, voici les résultats les plus saillants :

1° On produit une lame plane dans l'orifice d'un verre à boire; on tient le verre de manière que cette lame soit verticale, puis, lorsque les bandes colorées s'y sont bien développées, on donne au verre un mouvement de rotation aussi rapide que possible autour de son axe; toutes les bandes demeurent horizontales.

2° La lame étant placée horizontalement et offrant différentes teintes, on souffle sur sa surface à travers un tube étroit, dans la direction d'un diamètre; on voit aussitôt se former, de chaque côté de ce diamètre, un système d'anneaux colorés; ces deux systèmes tournent rapidement, et en sens contraires, autour de leurs centres respectifs. Si le souffle est dirigé non suivant un diamètre, mais suivant une petite corde, il n'y a plus qu'un système d'anneaux colorés tournant. Dans tous, les teintes des premiers ordres sont vers le centre. Enfin si l'on continue à souffler, les anneaux disparaissent graduellement.

3° Brewster énonce une idée analogue à celles de Leidenfrost et de M. Van der Willigen (§§321 et 336): selon lui, les couleurs d'une lame d'eau de savon ne résulteraient pas des différentes épaisseurs de la lame elle-même, mais d'une matière particulière qui flotte sur cette lame. Ce qui lui paraît le plus vraisemblable, c'est que la matière qui produit ainsi les couleurs est formée de l'un des ingrédients de la solution, séparé de celle-ci par une sorte de sécrétion, laquelle n'a lieu que lorsque le liquide est à l'état laminaire. Il s'appuie principalement sur les faits suivants: Si l'on examine la surface d'une solution de savon ou celle du liquide glycérique, même quand le vase est peu profond, on n'y observe aucune coloration, et elle réfléchit les images des objets comme le ferait l'eau ou le verre; mais dès que le liquide est étendu en lame mince, sa surface devient momentanément inégale et ne réfléchit plus les images qu'imparfaitement; de plus, quand les couleurs se sont développées, toutes leurs variations et tous les mouvements qui s'y produisent s'accordent avec l'hypothèse en question; enfin, si l'on souffle sur la lame ou qu'on y passe une plume mouillée du même liquide, on balaie la matière colorante, et l'on éparpille les couleurs. Les observations renfermées dans le second Mémoire²²⁰, observations qui ont trait surtout aux systèmes laminaires des charpentes, ont été entreprises par Brewster dans un but de simple amusement, et offrent assez peu de résultats nouveaux au point de vue scientifique; quelques uns cependant ne manquent pas d'intérêt: tel est celui que j'ai rapporté au § 187, et qui consiste à employer, comme charpente solide, l'ensemble de deux rectangles égaux qui se coupent par les milieux de deux côtés opposés et qui sont mobiles

²¹⁸ *Jahres-Bericht des physikalischen Vereins in Frankfurt am Main*, 1866-1867, p. 67.

²¹⁹ *On the colours of the soap-bubble* (TRANSACT. OF THE ROYAL SOCIETY OF EDINBURGH, vol. XXIV).

²²⁰ *On the figures of equilibrium in liquid films* (TRANSACT. OF THE ROYAL SOCIETY OF EDINBURGH, vol. XXIV).

autour de leurs points d'intersection; on a vu comment, au moyen de cette charpente, on complète la vérification de l'instabilité d'un système laminaire d'équilibre dans lequel plus de trois lames aboutissent à une même arête liquide. C'est dans le même Mémoire que se trouve décrit le procédé dont j'ai parlé au § 206 pour la réalisation de plusieurs systèmes laminaires avec une quantité minime de liquide.

Enfin voici un troisième résultat du même Mémoire encore: Brewster a imaginé de réaliser une lame à l'un des orifices d'un tube en forme de cône tronqué: quand, après avoir plongé l'orifice le plus large dans le liquide glycérique, on l'en retire, il se trouve nécessairement occupé par une lame; mais celle se met aussitôt en mouvement dans l'intérieur du tube vers le plus petit orifice, et ne s'arrête que lorsqu'elle a atteint ce dernier. Je ferai observer qu'on peut considérer ce phénomène comme un effet de la tension: la lame faisant constamment effort pour diminuer d'étendue, elle satisfait à cette tendance en marchant vers le petit orifice.

Enfin le troisième Mémoire²²¹ concerne les apparences que manifestent de petites lames d'alcool, d'huiles volatiles ou fixes, etc. Brewster produit ces lames en déposant une goutte du liquide à observer soit sur une ouverture de 5mm de diamètre au plus, pratiquée dans une plaque solide, soit sur un petit anneau; la goutte se façonne d'abord en lentille bi-concave, et, quand on place la plaque ou l'anneau verticalement, la majeure partie du liquide descend, et laisse une lame. Avec un liquide suffisamment volatil, comme l'alcool, on attend quelque temps avant de redresser la plaque ou l'anneau; l'évaporation seule transforme alors la lentille bi-concave en une lame plane occupant presque toute l'ouverture. Brewster observe les lames dont il s'agit soit par transmission, soit par réflexion; dans le premier cas, il y voit peu de couleurs, mais il y distingue des courants affectant des formes et des mouvements bizarres; dans le second, il y constate, outre les mêmes courants, des systèmes variés et mobiles d'anneaux colorés.

§ 350. Nous trouvons encore en 1867 une expérience remarquable au moyen de laquelle M. Chautard²²² parvient à rendre manifeste à tout un auditoire le magnétisme de l'oxygène: à l'orifice d'une pipe de terre maintenue immobile par un support, il gonfle, avec de l'oxygène, une bulle de liquide glycérique; cette bulle se trouve placée au-dessus et près des pôles d'un électro-aimant; par des aimantations et des désaimantations successives de ce dernier, elle prend un mouvement oscillatoire, très visible surtout quand elle est fortement éclairée.

§ 351. Dans une curieuse Note²²³ de 1868, M. Tait arrive, en partant des propriétés des bulles, à un théorème de mathématiques pures, théorème qui peut s'énoncer ainsi :

Le cube de la somme des carrés de plusieurs nombres est toujours plus grand que le carré de la somme des cubes de ces mêmes nombres.

Eu effet, si l'on conçoit plusieurs bulles ayant respectivement pour rayons r , r' , r'' , etc., et si l'on imagine que toutes ces bulles s'unissent en une seule, dont nous désignerons le rayon par R , la surface de cette dernière sera nécessairement, en vertu de la tension, moindre que la somme des surfaces des premières, ce qui donnera l'inégalité:

$$r^2 + r'^2 + r''^2 + \dots > R^2 ;$$

mais comme chacune des bulles originaires avait une courbure plus forte que la bulle

²²¹) *On the motion and colours upon films of alcohol, volatile oils, and other fluids* (TRANSACTION OF THE ROYAL SOCIETY OF EDINBURGH, vol. XXIV).

²²²) *Expériences relatives au magnétisme et au diamagnétisme des gaz* (COMPTES RENDUS, t. LXIV, p. 1141).

²²³) *Note on an Inequality* (PROCEEDINGS OF THE ROY. SOC. OF EDINBURGH, vol. VI, 1867-68, p. 292).

unique résultante, et exerçait conséquemment sur l'air intérieur une pression plus intense, le volume de la bulle unique doit l'emporter sur la somme des volumes des autres, d'où cette seconde inégalité:

$$r^3 + r'^3 + r''^3 + \dots < R^3$$

or, de ces deux inégalités, on déduit aisément la suivante:

$$(r^2 + r'^2 + r''^2 + \dots)^3 > (r^3 + r'^3 + r''^3 + \dots)^2.$$

§ 352. En 1868 encore, M. Cauderay²²⁴ a signalé les bulles de savon comme étant extrêmement sensibles aux attractions et répulsions électriques, et a indiqué une suite d'expériences curieuses très propres à être effectuées dans les cours publics.

Par exemple: «... si l'on charge la machine au moment où on souffle des bulles de savon dans le voisinage, elles seront attirées à une distance de 30, 40 ou 50 centimètres, et même bien au delà si la machine est assez puissante. On voit alors les bulles se précipiter vivement sur le conducteur électrique et s'y briser; quelquefois les bulles résistent au choc, elles s'attachent au conducteur, et s'y chargent; elles sont alors aussitôt repoussées au loin et attirées soit par l'expérimentateur, soit par le sol, sur lequel elles ne tombent, le plus souvent, qu'après avoir fait une série de bonds, pendant lesquels l'électricité de la bulle se combine avec celle de la terre....»

Si l'on dépose sur le conducteur une série de bulles, « au moment où l'on mettra en mouvement le plateau de verre de la machine, elles s'allongeront d'abord en forme d'ellipse, puis se détacheront du conducteur pour voler dans toutes les directions, avec une tendance toutefois à se diriger sur les personnes placées autour de la machine. »

Citons encore le passage suivant, où il s'agit de montrer que l'électricité statique ne se manifeste qu'à la surface extérieure des corps: «... si, sur un disque isolé (en métal) on souffle des bulles concentriques, lorsqu'on charge la machine, la bulle extérieure seule est influencée, elle se déforme plus ou moins suivant l'intensité de la charge, tandis que les bulles intérieures conservent toutes leur forme demi-sphérique. »

M. Cauderay recommande d'armer la machine d'un conducteur supplémentaire, afin que les expériences puissent se faire à une assez grande distance des supports isolants; sans cela, ces supports sont bientôt humectés par les gouttelettes que les bulles projettent en éclatant.

§ 353. M. L. Dufour (année 1869) a eu l'heureuse idée de substituer une lame d'eau aux toiles métalliques pour l'observation de la constitution des flammes²²⁵: l'eau est lancée par une fente, sous une pression convenable, de manière à former une lame horizontale; à l'aide de cette lame, M. Dufour coupe nettement une flamme en un point quelconque de sa hauteur. «Les gaz chauds et les particules charbonneuses sont entraînés par l'eau. En plaçant l'oeil au-dessus, on voit fort bien le cône creux de la flamme, la paroi lumineuse, etc.... rien n'empêche de prolonger l'observation aussi longtemps que l'on veut, de voir de très près, et même d'employer une loupe. »

§ 354. En 1869 également, M. Boussinesq²²⁶ a soumis au calcul les formes de la ligne méridienne des lames de Savart produites par le choc d'une veine liquide contre un petit disque solide (§ 230).

J'ai mentionné, au § 165, l'opinion énoncée par M. Quincke, dans la même année, sur l'impossibilité de l'existence d'une lame liquide dont l'épaisseur est moindre que le

²²⁴ *Effets de l'électricité statique sur les bulles de savon* (BULLET. DEL LA SOC. VAUDOISE DES SC. NATURELLES., vol. IX, p. 655).

²²⁵ *Bullet. de la Soc. Vaudoise des Sc. Naturelles*, vol. X, p. 181.

²²⁶ *Comptes rendus*, t. LXIX, pp. 45 et 128.

double du rayon de l'attraction moléculaire; au § 166, les expériences intéressantes de M. Lüdgtge (même année), consistant dans, la substitution spontanée d'une lame d'un liquide à une lame d'un autre liquide; enfin, aux §§167 et 168, les phénomènes qui se produisent, d'après l'observation de M. Van der Mensbrugge (toujours même année), quand on dépose à la surface de l'eau pure une bulle de savon ou une bulle de saponine, ainsi que des effets curieux de substitutions de lames.

§ 354bis. En 1869 encore, M. Kessler a indiqué²²⁷ une manière simple d'effectuer l'expérience de la bulle de savon flottant sur le gaz acide carbonique (§ 329) : le gaz est produit dans un petit flacon à dégagement, et il est amené dans le bec d'un large entonnoir; il s'accumule ainsi dans la partie évasée, et c'est là qu'on dépose la bulle²²⁸

§ 355. Je n'ai parlé qu'incidemment, dans cet historique, des lames minces résultant de l'extension d'une gouttelette liquide sur un autre liquide; une semblable lame, en effet, est d'un tout autre genre que celles dont je me suis occupé: elle est en contact par sa face supérieure avec l'air, et, par sa face inférieure, avec le second liquide; elle n'est pas libre de prendre diverses formes, et constitue simplement une couche ténue reposant sur la surface plane et horizontale du liquide sousjacent. On pourra consulter, à l'égard de ces lames, le Mémoire de M. Van der Mensbrugge résumé au § 167; on y trouvera l'indication des différents physiciens qui ont porté leur attention sur le sujet dont il s'agit, et une courte analyse de leurs recherches²²⁹.

§ 356. Ainsi qu'on l'a vu, Leidenfrost admet (§ 321) que, dans une bulle de savon, l'huile du savon se sépare et se rend à la surface extérieure de la lame, où elle donne lieu aux couleurs, et il est conduit à cette opinion par les apparences successives que présente la bulle; M. Van der Willigen admet également (§ 336) une séparation de la partie grasseuse du savon, pour expliquer le saut brusque qu'on observe, dans une lame suffisamment mince, entre la zone noire et la zone blanche contiguë; enfin Brewster, s'appuyant comme Leidenfrost, sur l'aspect des phénomènes de coloration, avance, de même, que les couleurs sont le résultat d'une matière sécrétée par les lames et qui vient s'étendre à leur surface (§ 349). L'idée qu'une substance, soit le savon, soit l'un de ses ingrédients, se sépare de la solution et vient s'étendre sur les faces de la lame, a donc été émise à trois reprises différentes par de bons observateurs; or, ainsi que je l'ai rappelé dans la deuxième note du § 299, Dupré a cherché à montrer théoriquement la possibilité d'un fait de ce genre, et cite, à l'appui de son assertion, une expérience qui semble concluante.

A tout cela j'ajouterai ici les remarques suivantes: en premier lieu, dans mes expériences relatives aux petites calottes laminaires (§§246 à 249), il ne s'est jamais formé de tache noire nettement limitée que sur les lames des solutions des différents savons; quand, avec d'autres liquides, avec l'huile d'olive, par exemple, le sommet de la calotte prenait une teinte finale voisine du noir, cette teinte se fondait insensiblement dans celle de la zone environnante; en second lieu, les lames noires, dans les cas où l'évaporation est nulle, persistant fort longtemps (§ 229), et, d'après quelques essais que j'ai faits, les lames des solutions alcalines étant très peu durables, il est difficile d'admettre, avec M. Van der Willigen, que la zone noire soit formée de la partie alcaline du savon; je regarde comme plus probable que c'est le savon lui-même qui, tendant, conformément au fait avancé par Dupré, à être expulsé de la solution, est repoussé de la partie colorée de la lame, et vient ainsi, en solution beaucoup plus concentrée, former la zone noire.

²²⁷ *Vorlesungsversuche* (BULLET. DE LA SOCIÉTÉ CHIMIQUE DE BERLIN, 2me année p. 369).

²²⁸ Pour les recherches postérieures à 1869, voir les articles inscrits au § 508 sous les n° 14, 15, 19, 26, 30, 32, 37, 38 et 42.

²²⁹ M. Van der Mensbrugge a donné à ce Mémoire une suite, dans laquelle il complète son historique; c'est le travail inscrit au § 508 sous le n° 45.

Cette opinion se trouve appuyée par l'expérience de Newton (§ 319), d'après laquelle on n'observe le bleu sombre qui devrait toujours précéder le noir, que lorsque la solution contient une très forte proportion de savon; alors, en effet, dans l'hypothèse que je propose, il y a nécessairement moins de différence de composition entre la zone noire et le reste de la lame, et conséquemment le saut doit être moins brusque; enfin, dans l'expérience de Pfaff (§ 325), après que, par l'action du froid, la majeure partie de l'eau s'est séparée sous la forme de petits cristaux, la lame est noire, et peut se maintenir plusieurs jours; or le liquide de cette lame consiste évidemment alors en une solution très concentrée de savon.

CHAPITRE IX.

Stabilité des figures d'équilibre ; étude purement expérimentale.

§ 357. Revenons aux figures d'équilibre. Ainsi qu'on l'a vu (§ 34), il est très probable que la sphère est la seule figure d'équilibre fermée, et qu'ainsi toutes les autres présentent des dimensions infinies dans certains sens. Or, comme on l'a vu aussi par plusieurs exemples, quand on essaie de réaliser partiellement l'une de ces dernières, soit avec une masse d'huile dans le mélange alcoolique, soit avec une lame mince de liquide glycérique dans l'air, on reconnaît en général que, lorsque les terminaisons solides auxquelles adhère la masse ou la lame doivent comprendre entre elles une portion trop étendue de la figure, celle-ci refuse de se former, d'où il faut conclure qu'avec cet écartement des terminaisons, elle serait instable. Nous allons maintenant chercher les limites de stabilité de la plupart des figures dont nous nous sommes occupé, et spécialement des figures de révolution comprises entre deux bases égales perpendiculaires à l'axe.

Lorsqu'une sphère d'huile est librement suspendue dans le mélange alcoolique, elle, manifeste toujours, comme je l'ai déjà dit (§ 34), une parfaite stabilité de forme: si, par des mouvements imprimés au liquide ambiant, on altère cette forme, la masse la reprend toujours exactement. Une bulle de savon isolée dans l'air montre également une forme permanente et stable: si on la heurte de bas en haut avec une étoffe de laine tendue, et que le choc soit assez léger pour ne pas la faire crever, on la voit s'aplatir plus ou moins contre l'étoffe, puis rebondir à la manière d'une balle élastique, en reprenant sa sphéricité. Ainsi la sphère est une figure d'équilibre stable dans son état complet, et conséquemment, à plus forte raison, toute portion de sphère est stable.

La sphère n'a donc pas de limite de stabilité, dans le sens que j'ai donné à cette expression : c'est-à-dire que, quelle que soit l'étendue d'une portion réalisée de sphère relativement à la sphère entière, cette portion est toujours à l'état d'équilibre stable; c'est ce qu'on voit se vérifier, par exemple, à l'égard d'une masse adhérente à un disque solide (§§14 et 15), à l'égard des bases d'un cylindre réalisé entre deux anneaux (§ 40), etc.

Je citerai encore les petites surfaces qui terminent respectivement la colonne de mercure et la colonne d'alcool dans le thermomètre à maximum et à minimum de Rutherford. Ces surfaces étant très petites, l'action de la pesanteur sur leur forme peut être regardée comme négligeable; aussi celle du mercure constitue-t-elle sensiblement une calotte sphérique convexe, et celle de l'alcool une demi sphère concave. Or, ainsi que l'a fait remarquer M. Duprez²³⁰, c'est la stabilité de cette dernière qui est la véritable cause du recul de l'index d'émail quand la température s'abaisse, et j'ajouterai que c'est également à la stabilité de la surface terminale du mercure qu'il faut attribuer l'action de celle-ci pour faire avancer l'index d'acier quand la température s'élève.

§ 358. Le fait de l'absence de limites de stabilité étant indépendant du rayon et, par suite, de la courbure de la sphère, il est également vrai quand le rayon devient infini, ou, en d'autres termes, quand la surface de la sphère devient un plan. Le plan n'a donc pas non plus de limite de stabilité, ce qui signifie qu'il peut être réalisé dans un contour solide d'une étendue quelconque, sans cesser d'être stable.

§ 359. Les expériences des §§45 et 46 nous ont montré que lorsque, dans un cylindre liquide, la longueur surpasse notablement le triple du diamètre, l'équilibre est

²³⁰Note sur la cause qui s'oppose l'introduction d'un liquide dans un vase à orifice étroit (BULLET. DE L'ACAD. DE BELGIQUE, 2me série, t. XV, p. 11, 1863).

instable, et que la figure se sépare spontanément en deux portions inégales. Examinons actuellement la chose avec plus de détail.

Employons le système solide de la fig. 19, système composé de deux disques verticaux en regard; dans celui qui a servi à mes expériences, le diamètre des disques était de 30mm, et la distance entre eux était de 108mm de sorte que le rapport entre la longueur et le diamètre du cylindre liquide qui s'étendrait d'un disque à l'autre, serait égal à 3,6. Ce système étant introduit dans le mélange alcoolique, on a fait adhérer à l'ensemble des deux disques, par le procédé indiqué au § 46, une masse d'huile trop grande pour constituer le cylindre dont il s'agit, puis on a absorbé l'excès à l'aide de la petite seringue. Comme dans les expériences du § 45, la figure commençait à s'altérer spontanément avant que la forme cylindrique fût atteinte; mais on a pu, à l'aide d'un petit artifice, pousser l'expérience plus loin, et parvenir à former un cylindre exact²³¹. Celui-ci a paru persister pendant un instant; puis il a commencé à s'étrangler sur une partie de sa longueur pour se renfler sur l'autre, comme les figures verticales, et le phénomène de la désunion s'est achevé de la même manière, en donnant lieu à deux masses finales de volumes différents.

On a répété plusieurs fois l'expérience, et toujours avec les mêmes résultats; seulement la séparation s'est effectuée tantôt d'un côté, tantôt de l'autre du milieu de la longueur de la figure. Du reste, si le phénomène s'opère d'une manière non symétrique par rapport au milieu de la longueur de la figure soit horizontale, soit verticale, la symétrie subsiste, au contraire, toujours par rapport à l'axe; en d'autres termes, pendant toute la durée du phénomène, la figure ne cesse pas d'être de révolution. Ajoutons ici que, dans la figure horizontale, les longueurs respectives des portions étranglée et renflée paraissent égales entre elles.

On voit donc maintenant que le mode de déformation de ces cylindres est bien le résultat d'une propriété qui leur est inhérente. Il résulte, en outre, de l'expérience ci-dessus, que le rapport 3,6 est encore supérieur à la limite de la stabilité, de sorte que la valeur exacte de celle-ci doit se trouver entre les nombres 3 et 3,6.

§ 360. J'ai fait servir aussi à une approximation grossière de la limite dont il s'agit, des cylindres de mercure de petit diamètre réalisés dans l'air par le procédé suivant: on a placé, sur une plaque de verre horizontale, deux fils de cuivre d'environ un millimètre d'épaisseur et de quelques centimètres de longueur, dirigés dans le prolongement l'un de l'autre, mais laissant entre leurs extrémités en regard, extrémités qui étaient amalgamées, un intervalle de 7 à 8 millimètres; puis on a déposé dans cet intervalle un globule de mercure dont le diamètre n'excédait pas deux millimètres; on a rapproché ensuite les fils jusqu'à ce que les deux petites faces amalgamées vinsent toucher le globule et que l'adhérence s'établît. Alors on a fait glisser l'un des fils dans le sens de sa longueur, afin d'étirer le globule liquide et d'essayer de le convertir en un cylindre. Quand le volume du globule était suffisamment petit, on obtenait ainsi, en effet, un cylindre qui conservait sa forme d'une manière permanente. Si, au contraire, le volume du mercure surpassait une certaine grandeur, la petite masse se séparait toujours en deux parties avant que la forme cylindrique fût atteinte. En modifiant le volume du globule, on a tâché d'arriver au plus grand écartement des faces amalgamées pour lequel la formation du cylindre était possible, et l'on a pu reconnaître qu'il était

²³¹ Voici, pour cela, comment il faut procéder dans l'extraction, de l'excès d'huile. On fait d'abord marcher l'opération avec une rapidité convenable, jusqu'à ce que la figure commence à se déformer; alors on promène légèrement l'extrémité du bec de la seringue le long de la partie supérieure de la masse, en allant de la portion la plus épaisse vers l'autre: cette faible action suffit pour ramener vers cette dernière une petite quantité d'huile, et rétablir ainsi la symétrie de la figure; puis on exécute une nouvelle absorption, l'on régularise encore la figure, et l'on continue ainsi jusqu'à ce qu'on atteigne exactement la forme cylindrique.

supérieur au triple, mais inférieur au quadruple du diamètre de ce cylindre.

Cette expérience présente quelque difficulté, parce que, pendant les tâtonnements qu'elle exige, le mercure dissout du cuivre et perd de sa fluidité²³²; cependant, avec un peu d'habitude, on parvient à opérer assez vite pour éviter cet inconvénient.

Nous trouverons plus loin, à l'aide de la théorie, la valeur exacte de la limite de stabilité du cylindre, et nous la vérifierons par des expériences plus précises que les précédentes.

§ 361. Dans les cylindres instables que nous venons de former, le rapport entre la longueur et le diamètre était peu considérable; mais qu'arriverait-il si l'on par venait à obtenir des cylindres d'une grande longueur relativement à leur diamètre? Or, on peut, dans certaines conditions, réaliser des figures de cette espèce exactement ou sensiblement cylindriques, et nous allons voir quels sont alors les résultats de la rupture spontanée de l'équilibre.

Voici le mode d'expérience que j'ai adopté à cet effet, et qui m'a permis d'arriver à certaines lois du phénomène: je vais d'abord décrire d'une manière succincte l'appareil et les opérations, et j'ajouterai ensuite les détails nécessaires.

Les pièces principales de l'appareil sont 1° une plaque rectangulaire de verre à glace, de 25 centimètres de longueur sur 20 de largeur; 2° deux bandes du même verre, longues de 13 centimètres, larges de 2, et épaisses de 5 à 6 millimètres, parfaitement dressées et polies sur leur épaisseur; 3° deux bouts de fil de cuivre d'environ 1 millimètre d'épaisseur, et de 5 centimètres de longueur; ces fils doivent être bien droits, et l'une des extrémités de chacun d'eux doit être coupée bien nettement, puis soigneusement amalgamée.

La plaque étant placée horizontalement, on pose à plat sur sa surface, et parallèlement à ses grands côtés, les deux bandes de verre, de manière à laisser entre elles un intervalle d'environ un centimètre; puis on introduit dans celui-ci les deux fils de cuivre, en les plaçant en ligne droite dans le sens de la longueur des bandes, et de manière que les extrémités amalgamées se regardent et soient distantes l'une de l'autre de quelques centimètres. Cela fait, on dépose entre ces mêmes extrémités un globule de mercure bien pur, de 5 à 6 millimètres de diamètre, puis on rapproche les deux bandes de verre jusqu'à ce qu'elles viennent toucher les fils, de sorte qu'alors elles ne laissent plus entre elles qu'un intervalle égal en largeur au diamètre de ces mêmes fils.

La petite masse de mercure comprimée ainsi latéralement, est obligée de s'allonger et de marcher des deux côtés vers les surfaces amalgamées. Si elle ne les atteint pas, on fait glisser les fils vers elle, jusqu'à ce que le contact et l'adhérence soient établis. Alors on fait glisser les fils en sens contraire, de manière à les éloigner l'un de l'autre, ce qui détermine un nouvel allongement de la petite masse liquide, et une diminution de ses dimensions verticales. En agissant avec précaution, et en accompagnant l'opération de petits coups donnés avec le doigt sur l'appareil pour faciliter les mouvements du mercure, on parvient à étendre la petite masse jusqu'à ce que son épaisseur verticale soit partout égale à son épaisseur horizontale, c'est-à-dire à celle des fils de cuivre. Le mercure forme ainsi un fil liquide de même diamètre que les fils solides auxquels il est attaché, et d'une longueur de 8 à 10 centimètres. Ce fil, vu la petitesse de son diamètre, qui rend l'action de la pesanteur insensible relativement à celle de l'attraction

²³² Je pense que cette diminution de fluidité n'a lieu d'une manière sensible qu'à la surface de la petite masse: le cuivre qui s'allie au mercure, se trouvant dans un état d'extrême division, se combine avec l'oxygène de l'air environnant, d'où résulte, à la surface du liquide, la formation graduelle d'une mince pellicule d'oxyde. Dès lors, la petite masse de mercure, comme les masses d'huile quand elles se recouvrent de la pellicule dont il a été question au § 17, doit perdre peu à peu de sa tendance à prendre une figure d'équilibre déterminée, et conséquemment paraître moins fluide.

moléculaire, pourra être considéré comme exactement cylindrique; de sorte que l'on aura, de cette manière, un cylindre liquide ayant une longueur de 80 à 100 fois son diamètre, et attaché par ses extrémités à des parties solides, cylindre qui conserve sa forme tant qu'il demeure emprisonné entre les bandes de verre.

Les choses étant dans cet état, on pose des poids sur les parties des deux fils de cuivre qui font saillie au delà des extrémités des bandes, afin de maintenir ces fils dans des positions bien fixes; puis enfin, à l'aide d'un moyen que nous indiquerons plus bas, on enlève verticalement les deux bandes de verre. Au même instant, le cylindre liquide, libre de ses entraves, se transforme en une série nombreuse de sphères isolées, rangées en ligne droite suivant la direction du cylindre qui leur a donné naissance. Ordinairement la régularité du système de sphères ainsi obtenu laisse à désirer: les sphères présentent des différences dans leurs diamètres respectifs et dans les distances qui les séparent, ce qui provient sans doute de petites causes accidentelles dépendantes du mode d'opération; mais quelquefois les différences sont si minimes, que l'on peut alors considérer la régularité comme parfaite. Quant au nombre de sphères correspondant à un cylindre d'une longueur déterminée, il varie d'une expérience à une autre; mais ces variations, qui sont dues également aux petites causes accidentelles, demeurent comprises entre des limites peu étendues.

§ 362. Dans cette expérience, la transformation s'effectue avec trop de rapidité pour qu'on puisse bien en observer les phases; mais les phénomènes que nous ont présentés nos cylindres d'huile, cylindres plus gros et moins allongés, savoir la formation d'un renflement et d'un étranglement juxtaposés et égaux, ou à peu près, en longueur, l'accroissement graduel en épaisseur de la portion renflée et l'amincissement simultané de la portion étranglée, etc., autorisent à conclure que, dans le cas d'un cylindre dont la longueur est considérable par rapport au diamètre, les choses se passent de la manière suivante: la figure commence par se modifier de manière à offrir une suite régulière et uniforme de portions renflées, séparées par des portions étranglées de même longueur qu'elles, ou à peu près; cette altération, d'abord très faiblement indiquée, va en se prononçant de plus en plus, les portions étranglées s'amincissant graduellement, tandis que les portions renflées augmentent d'épaisseur, et la figure ne cessant pas d'être de révolution; enfin les étranglements se rompent, et les parties de la figure ainsi complètement isolées les unes des autres prennent chacune la forme sphérique.

Nous devons ajouter ici que la fin du phénomène est accompagnée d'une particularité remarquable, dont nous n'avons point encore parlé; mais comme elle ne constitue, pour ainsi dire, qu'une partie accessoire du phénomène général, nous en renvoyons la description plus loin (§ 375).

§ 363. Complétons maintenant la description de notre appareil, et ajoutons quelques détails concernant les opérations.

La plaque de verre devant être amenée à une position parfaitement horizontale, elle est portée, à cet effet, par quatre pieds à vis.

A chacune des extrémités de la surface inférieure des bandes de verre, est collée une petite bande transversale de papier mince, de sorte que les bandes de verre reposant sur la plaque par l'intermédiaire de ces petits papiers, leur surface inférieure n'est pas en contact avec la surface de la plaque. Sans cette précaution, les bandes de verre pourraient contracter avec la plaque une certaine adhérence, qui introduirait un obstacle lors de l'enlèvement vertical de ces mêmes bandes. Celles-ci portent, en outre, sur leur surface supérieure et à 6 millimètres de chacune de leurs extrémités, une petite vis implantée verticalement, la pointe en haut, dans le verre, bien fixée à celui-ci avec du mastic, et s'élevant de 8 millimètres au-dessus de sa surface. Ces quatre vis sont

destinées à recevoir des écrous servant à fixer les bandes au système à l'aide duquel on les enlève.

Ce système est en fer; il se compose, en premier lieu, de deux plaques rectangulaires ayant 55 millimètres de longueur, 12 de largeur, et 3 d'épaisseur. Chacune d'elles est percée perpendiculairement à ses grandes faces, de deux trous placés de telle manière qu'en posant chacune de ces plaques transversalement sur les extrémités des deux bandes de verre, les vis dont ces dernières sont munies puissent s'engager dans ces quatre ouvertures. Les vis étant assez longues pour faire saillie au-dessus des ouvertures, on peut alors y adapter de petits écrous, de sorte qu'en serrant ceux-ci, les bandes de verre se trouvent fixées dans une position invariable l'une par rapport à l'autre. Les ouvertures ont une forme allongée dans le sens de la longueur des plaques de fer; de cette manière on peut, après avoir desserré les écrous, augmenter ou diminuer la distance des deux bandes de verre sans être obligé d'enlever les plaques. Sur le milieu de la surface supérieure de chacune des plaques, est implantée une tige verticale de 5 centimètres de hauteur, et les extrémités supérieures de ces deux tiges sont réunies par une tige horizontale, du milieu de laquelle part une troisième tige verticale, dirigée de bas en haut, et longue de 15 centimètres. Cette dernière tige est à section carrée, et son épaisseur est de 5 millimètres. Lorsque les écrous sont serrés, on voit que les bandes de verre, les plaques de fer, et l'espèce de fourche qui réunit celles-ci, constituent un système invariable. La longue tige verticale sert à diriger le mouvement de ce système; à cet effet, elle passe à frottement très doux dans un conduit de même section qu'elle et de 5 centimètres de hauteur, percé dans une pièce qui est soutenue d'une manière bien fixe, par un support convenable, à 10 centimètres au-dessus de la plaque de verre. Enfin, la pièce percée est munie latéralement d'une vis de pression, qui permet de serrer la tige dans le conduit. À l'aide de cette disposition, si tout l'ensemble de l'appareil a été travaillé avec soin, les deux bandes de verre, une fois les petits écrous serrés, ne pourront se mouvoir qu'avec une parfaite simultanéité, et toujours identiquement dans une même direction perpendiculaire à la plaque de verre. Lorsque le cylindre liquide est bien formé, et que les poids sont posés sur les portions libres des fils de cuivre, on passe le doigt sous la branche horizontale de la fourche, et l'on soulève le système mobile jusqu'à une hauteur convenable au de la plaque de verre; puis on le maintient à cette hauteur en serrant la vis de pression, afin d'observer le résultat de la transformation du cylindre.

L'amalgamation des extrémités des fils de cuivre s'étendant toujours un peu sur la surface convexe de ceux-ci, on enduit cette surface d'un vernis, afin que l'amalgamation ne reste à découvert que sur la petite section plane.

Il serait à peu près impossible de juger, à la simple vue, du point précis où il faut cesser d'éloigner les fils de cuivre l'un de l'autre pour que le liquide ait atteint la forme cylindrique. Afin d'écartier cette difficulté, on se donne d'avance la longueur du cylindre, et l'on marque cette longueur, par deux traits déliés, sur la surface latérale de l'une des bandes de verre; puis l'on détermine, par le calcul, d'après le diamètre connu des fils, le poids du globule de mercure qui doit former un cylindre de ce diamètre et de la longueur voulue; enfin, au moyen d'une balance sensible, on fait en sorte que le globule destiné à l'expérience ait exactement ce poids. Il n'y a plus alors qu'à étirer la petite masse jusqu'à ce que les extrémités des fils de cuivre entre lesquels elle est comprise aient atteint les marques tracées sur le verre.

Lorsqu'on fait une série d'expériences, on peut se servir plusieurs fois du même mercure, en réunissant, à la suite de chaque observation, les sphères isolées en une seule masse. Cependant, après un certain nombre d'expériences, le mercure semble perdre

de sa fluidité, et la masse se désunit toujours en quelque point, malgré toutes les précautions possibles, avant qu'elle ait été étirée jusqu'à la longueur voulue, phénomènes qui proviennent de ce que les fils solides cèdent un peu de cuivre au mercure (note du § 360). Il faut alors enlever ce dernier, nettoyer les plaques de verre et les bandes, et prendre un nouveau globule. On est parfois aussi obligé de renouveler l'amalgamation des fils.

§ 364. A l'aide de l'appareil et des procédés ci-dessus, j'ai exécuté une suite d'expériences sur la transformation des cylindres; mais, avant d'en rapporter les résultats, il est nécessaire, pour l'interprétation de ceux-ci, d'envisager le phénomène d'un peu plus près.

Concevons un cylindre liquide d'une longueur considérable relativement à son diamètre, et attaché par ses extrémités à deux bases solides; supposons-le effectuant sa transformation, et considérons la figure à une époque du phénomène antérieure à la séparation des masses, c'est-à-dire lorsque cette même figure se compose encore de renflements alternant avec des étranglements. Les surfaces des renflements faisant saillie en dehors de la surface cylindrique primitive, et celles des étranglements se trouvant, au contraire, en dedans de cette même surface, nous pouvons concevoir dans la figure une série de sections planes perpendiculaires à l'axe, et ayant toutes un diamètre égal à celui du cylindre; ces sections constitueront évidemment les limites qui séparent les portions renflées des portions étranglées, en sorte que chaque portion, soit étranglée soit renflée, sera terminée par deux d'entre elles; en outre, les deux bases solides étant nécessairement au nombre des sections dont il s'agit, chacune de ces bases devra occuper l'extrémité même d'une portion étranglée ou renflée.

Cela posé, trois hypothèses se présentent relativement à ces deux portions de la figure, c'est-à-dire à celles qui s'appuient respectivement sur chacune des bases solides. En premier lieu, nous pouvons supposer que ces portions soient toutes deux renflées. Dans ce cas, chacun des étranglements enverra dans les deux renflements qui lui sont immédiatement adjacents le liquide qu'il perd, les mouvements de transport du liquide s'effectueront d'une même manière dans toute l'étendue de la figure, et la transformation pourra s'opérer avec une parfaite régularité, en donnant lieu à des sphères isolées exactement égales en diamètre et également espacées. Seulement, cette régularité ne s'étendra pas aux deux renflements extrêmes: car chacun de ceux-ci se trouvant terminé d'un côté par une surface solide, il ne recevra de liquide que de l'étranglement situé de l'autre côté, et acquerra, par conséquent, moins de développement que les renflements intermédiaires. Dans ces circonstances, on trouverait donc, après la terminaison du phénomène, deux portions de sphère respectivement adhérentes aux deux bases solides, et présentant chacune un diamètre un peu moindre que celui des sphères isolées rangées entre elles.

En second lieu, nous pouvons admettre que les portions extrêmes de la figure soient l'une un étranglement et l'autre un renflement. Alors le liquide perdu par la première ne pouvant traverser la base solide, il sera nécessairement chassé en totalité dans le renflement voisin, de sorte que celui-ci recevant d'un seul côté tout le liquide nécessaire à son développement, il ne devra rien recevoir du côté opposé, et que, par conséquent, tout le liquide perdu par le second étranglement se rendra de même dans le second renflement, et ainsi de suite, jusqu'au renflement extrême. La distribution des mouvements de transport sera donc encore uniforme dans toute la figure, et la transformation pourra également s'effectuer d'une manière parfaitement régulière. La régularité s'étendra même évidemment aux deux portions extrêmes, du moins tant que les étranglements n'auront pas atteint leur plus grande profondeur; mais, au delà de ce point, il n'en sera

plus tout à fait ainsi : car alors l'indépendance s'établissant entre les masses, chacun des renflements, à l'exception de celui qui s'appuie sur la base solide, se grossira par les deux côtés à la fois, pour passer à l'état de sphère isolée, en s'appropriant les deux demi étranglements adjacents, tandis que le renflement extrême ne pourra se grossir que d'un seul côté. Ainsi, après la terminaison du phénomène, on trouverait, à l'une des bases solides, une portion de sphère d'un diamètre peu inférieur à celui des sphères isolées, et, à l'autre base, une portion de sphère beaucoup plus petite, provenant du demi étranglement qui y est demeuré attaché.

Enfin, en troisième lieu, supposons que les portions extrêmes de la figure soient toutes deux des étranglements, ce qui, après la terminaison du phénomène, laisserait, à chacune des bases solides, une portion de sphère égale à la plus petite des deux ci-dessus. Dans ce cas, pour fixer les idées, partons de l'un de ces étranglements extrêmes, par exemple de celui de gauche. Tout le liquide perdu par ce premier étranglement étant chassé dans le renflement contigu, et suffisant au développement de celui-ci, admettons que tout le liquide perdu par le second étranglement se rende de même dans le second renflement, et ainsi de suite; alors tous les renflements, à l'exception du dernier à droite, prendront simplement leur développement normal; mais le renflement de droite, qui reçoit, comme chacun des autres, de la part de l'étranglement qui le précède la quantité de liquide nécessaire à son développement, reçoit, en outre, la même quantité de liquide de la part de l'étranglement qui s'appuie sur la base solide voisine, de sorte qu'il sera plus volumineux que les autres. On voit donc que, dans le cas dont il s'agit, les actions opposées des deux étranglements extrêmes introduisent dans le reste de la figure un excès de liquide. Or, quelque autre hypothèse que l'on fasse sur la distribution des mouvements transport, il faudra toujours, ou bien que l'excès de volume se répartisse sur tous les renflements à la fois, ou bien qu'il augmente seulement les dimensions d'un ou de deux d'entre eux; mais la première de ces suppositions est évidemment inadmissible, à cause de la complication qu'elle exigerait dans les mouvements de transport; il faudrait donc admettre la seconde, et alors les sphères isolées ne seraient pas toutes égales. Ainsi ce troisième mode de transformation amènerait nécessairement par lui-même une cause d'irrégularité, et, en outre, il ne permettrait pas une distribution uniforme des mouvements de transport, puisqu'il y aurait opposition, à l'égard de ces mouvements, au moins dans les deux étranglements extrêmes.

On doit donc regarder comme bien probable que la transformation se disposera suivant l'un ou l'autre des deux premiers modes, et jamais suivant le troisième c'est-à-dire que les choses s'arrangeront de manière que la figure qui se transforme, ait pour portions extrêmes, soit deux renflements, soit un étranglement et un renflement, mais non deux étranglements. Dans le premier cas, ainsi que nous l'avons vu, le mouvement du liquide de tous les étranglements s'effectuerait des deux côtés à la fois; et, dans le second, ce mouvement aurait lieu pour tous dans un seul et même sens. Si telle est réellement la disposition naturelle au phénomène, on comprend, en outre, que celui-ci la conservera lors même qu'il serait troublé dans sa régularité par de petites causes étrangères. Or c'est ce que confirment, comme nous le verrons, les expériences relatives au cylindre de mercure: bien que la transformation de ce cylindre ait rarement donné un système de sphères parfaitement régulier, j'ai trouvé, dans la grande majorité des résultats, soit chacune des bases solides occupée par une masse peu inférieure en diamètre aux sphères isolées, soit l'une des bases occupée par une semblable masse et l'autre par une masse beaucoup plus petite.

§ 365. Nommons, pour abrégé, *divisions* du cylindre les portions de la figure dont chacune fournit une sphère, soit que nous considérions ces portions par la pensée

dans le cylindre même, avant le commencement de la transformation, soit que nous les prenions pendant l'accomplissement du phénomène, c'est-à-dire pendant les modifications qu'elles subissent pour arriver à la forme sphérique. La longueur d'une division est évidemment la distance qui, pendant la transformation, se trouve comprise entre les cercles de gorge de deux étranglements voisins, et elle est, par conséquent, égale à la somme des longueurs d'un renflement et de deux demi-étranglements. D'après cela, voyons comment la longueur dont il s'agit, c'est-à-dire celle d'une division, se déduira du résultat d'une expérience.

Supposons la transformation parfaitement régulière, et soit λ la longueur d'une division, l celle du cylindre, et n le nombre de sphères isolées trouvées après la terminaison du phénomène. Chacune de ces sphères étant fournie par une division complète, et chacune des deux masses extrêmes par une portion de division, la longueur l se composera de n fois λ , plus deux fractions de λ . Pour estimer les valeurs de ces fractions, rappelons nous que la longueur d'un étranglement est exactement ou sensiblement égale à celle d'un renflement (§ 359); or, dans le premier des deux cas normaux (§ précéd.), c'est-à-dire lorsque les masses demeurées adhérentes aux bases après la terminaison du phénomène sont toutes deux de la grande espèce, chacune d'elles provient évidemment d'un renflement plus un demi étranglement, et, par conséquent, des trois quarts d'une division; la somme des longueurs des deux portions du cylindre qui ont fourni ces masses est donc égale à une fois et demie λ , et l'on aura, dans ce cas, $l = (n + 1,5)\lambda$, d'où $\lambda = \frac{l}{n+1,5}$. Dans le second cas, c'est-à-dire lorsque les masses extrêmes sont l'une de la grande et l'autre de la petite espèce, cette dernière provient d'un demi étranglement, ou du quart d'une division, de sorte que la somme des longueurs des portions du cylindre correspondantes à ces deux masses est égale à λ , et que, par conséquent, on aura $\lambda = \frac{l}{n+1}$.

Les dénominateurs respectifs de ces deux expressions représentant le nombre de divisions contenu dans la longueur totale du cylindre, il s'ensuit que ce nombre sera toujours soit un nombre entier simplement, soit un nombre entier plus un demi. D'autre part, puisque le phénomène est régi par des lois déterminées, on comprend que, pour un cylindre d'un diamètre donné, formé d'un liquide donné, et placé dans des circonstances données, il existe une longueur normale que les divisions tendent à prendre, et qu'elles prendraient rigoureusement si la longueur totale du cylindre était infinie. Si donc il arrive que la longueur totale du cylindre, bien que limitée, est égale au produit de la longueur normale des divisions par un nombre entier ou bien par un nombre entier plus un demi, rien n'empêchera les divisions de prendre exactement cette longueur normale. Si, au contraire, ce qui aura lieu en général, la longueur totale du cylindre ne remplit pas l'une ou l'autre des deux conditions précédentes, on doit croire que les divisions prendront la longueur la plus approchée possible de la longueur normale; et alors, toutes choses égales d'ailleurs, la différence sera évidemment d'autant moindre que les divisions seront plus nombreuses, ou, en d'autres termes, que le cylindre sera plus long. On doit croire aussi que la transformation adoptera celui des deux modes le plus propre à atténuer la différence dont il s'agit, et c'est ce que confirme encore l'expérience, comme nous le verrons bientôt.

Ainsi que je l'ai déjà dit, quoique la transformation du cylindre de mercure se dispose presque toujours suivant l'un ou l'autre des deux modes normaux, le résultat est rarement très régulier; il faut donc admettre que de petites causes perturbatrices accidentelles rendent, en général, les divisions formées dans une même expérience inégales en longueur; mais alors les expressions de obtenues plus haut donnent évidemment, dans chaque expérience, la longueur moyenne de ces divisions, ou, en d'autres termes,

la longueur commune que les divisions auraient prise si la transformation s'était opérée d'une manière parfaitement régulière en donnant lieu au même nombre de sphères isolées et au même état des masses extrêmes.

Enfin, puisque le troisième mode de transformation s'est présenté, c'est-à-dire puisqu'il est arrivé quelquefois que chacune des bases se soit trouvée occupée par une masse de la petite espèce, si l'on veut faire abstraction de la cause particulière d'irrégularité inhérente à ce mode (§ précéd.), et chercher l'expression correspondante de λ , il suffit de remarquer que chacune des masses extrêmes provient alors d'un demi étranglement, ou du quart d'une division, ce qui donnera évidemment $\lambda = \frac{l}{n+0,5}$.

§ 366. Je vais maintenant rapporter les résultats des expériences. Le diamètre des fils de cuivre, et par conséquent du cylindre, était de 1mm,05; j'ai donné d'abord au cylindre une longueur de 90mm, et j'ai répété dix fois l'expérience, en annotant, après chacune d'elles, le nombre des sphères isolées produites et l'état des masses adhérentes aux bases; puis j'ai calculé, pour chaque résultat, la valeur correspondante de la longueur d'une division, au moyen de celle des trois formules du paragraphe précédent qui se rapportait à ce même résultat.

J'ai fait ensuite dix nouvelles expériences, en donnant au cylindre une longueur de 100mm et j'ai calculé de même les valeurs correspondantes de la longueur d'une division.

Voici le tableau des résultats fournis par ces cylindres, et des valeurs, que l'on en tire pour la longueur d'une division. Chacune des deux séries ne m'a donné qu'un seul résultat parfaitement régulier; je l'ai indiqué par le signe * placé à côté du nombre de sphères isolées correspondant.

LONGUEUR DU CYLINDRE, 90mm			LONGUEUR DU CYLINDRE, 100mm		
Nombre des sphères isolées.	Masses adhérentes aux bases.	Longueur d'une division. mm.	Nombre des sphères isolées	Masses adhérentes aux bases.	Longueur d'une division. mm.
10	Deux grandes.	7,83	11	Une grande et une petite.	8,33
*12	Id.	6,67	14	Deux grandes.	6,45
12	Deux petites.	7,20	14	Id.	6,45
15	Deux grandes.	5,45	14	Id.	6,45
14	Id.	5,81	*14	Une grande et une petite	6,67
11	Id.	7,20	13	Id.	7,14
11	Id.	7,20	11	Deux grandes.	8,00
12	Une grande et une petite.	6,92	14	Une grande et une petite.	6,67
13	Deux grandes.	6,21	13	Deux grandes.	6,90
11	Id.	7,20	10	Id.	8,69

Comme on le voit dans ce tableau, en premier lieu, les différentes valeurs que l'on obtient pour la longueur d'une division ne s'écartent pas assez les unes des autres pour que l'on puisse méconnaître une tendance vers une valeur constante dont l'uniformité n'est altérée que par l'influence de petites causes accidentelles.

En second lieu, sur les vingt expériences, il est arrivé seulement une fois, que les masses adhérentes aux bases ont été l'une et l'autre de la petite espèce.

En troisième lieu, les deux résultats parfaitement réguliers ont donné identiquement la même valeur pour la longueur d'une division; cette valeur exprimée d'une manière approchée avec de décimales, est 6mm,67; mais son expression exacte est 6mm $\frac{2}{3}$: car l'opération à effectuer consiste, pour le cas de la première série, dans la division de 90mm par 13,5, et, pour le cas de la seconde série, dans la division de 100mm par 15. Comme les deux longueurs données au cylindre sont considérables relativement au diamètre, et que, par suite, les nombres de division sont assez grands, cette valeur 6mm $\frac{2}{3}$ doit constituer à fort peu près, sinon rigoureusement, celle de la longueur normale des divisions. On voit, en outre; que, pour donner aux divisions cette valeur très approchée ou exacte de la longueur normale, la transformation a choisi, d'une part le premier mode, et d'autre part le second mode.

§ 367. Citons d'autres exemples de la transformation spontanée d'un cylindre liquide très long par rapport à son diamètre:

Les physiciens savent que lorsqu'on fait passer, à travers un mince fil de fer tendu horizontalement, une décharge électrique d'une énergie suffisante, on voit d'abord le fil rougir à blanc, puis se résoudre en un grand nombre de globules séparés qui tombent, et dont on peut constater, après leur refroidissement, la forme arrondie.

En second lieu, un fil de coton de 20 à 25 centimètres de longueur est tendu entre les deux extrémités d'un arc en bois, dont il forme la corde; on remplit d'huile un grand plat, et l'on y fait plonger le fil, qui doit avoir été préalablement bien imprégné du même liquide, puis on le retire avec une vitesse convenable, en le maintenant dans une position horizontale. Au moment où il sort de l'huile, celle-ci constitue autour de lui une enveloppe sensiblement cylindrique de petit diamètre, laquelle se transforme aussitôt, d'une manière à fort peu près régulière, en un grand nombre de petites masses séparées les unes des autres et traversées par le fil comme des perles; si le fil a 25 centimètres de longueur, on y compte près de cent de ces perles. Je n'ai pas besoin de faire remarquer que les perles liquides dont il s'agit ne sont pas sphériques; l'action du fil les allonge un peu, et en fait de petits ondules renflés. Cette expérience est due mon fils Félix²³³, qui l'a variée de différentes manières.

Enfin je ne puis résister au désir d'exposer un procédé ingénieux qui m'a été suggéré par M. Donny, pour réaliser avec une grande régularité, dans le liquide alcoolique, un cylindre d'huile très long par rapport à son diamètre, et en observer la transformation.

Au centre du fond d'un vase cylindrique en verre de 7 à 8 centimètres de diamètre et de 60 de hauteur, est mastiqué un petit disque en fer d'un centimètre de diamètre et de quelques millimètres d'épaisseur; un tube en verre ou en fer d'un centimètre de diamètre intérieur occupe l'axe de ce vase, et embrasse à frottement doux, par son extrémité inférieure, le petit disque ci-dessus; ce tube dépasse le haut du vase, et contient un piston dont la tige, d'une longueur suffisante, est attachée par son extrémité supérieure à un support fixe; le piston ainsi maintenu est à un centimètre ou deux plus bas que l'orifice du vase; il ne peut ni monter ni descendre, mais pour lui faire parcourir la longueur du tube, il suffit, on le voit, de donner à celui un mouvement ascensionnel; ce mouvement est guidé par des pièces convenables, de façon à s'effectuer sans oscillations; enfin, le tube étant descendu, concevons qu'il soit rempli d'huile jusqu'au piston, et que le vase soit plein de liquide alcoolique.

Les choses étant ainsi disposées, faisons monter le tube avec une rapidité que des essais préalables auront déterminée; l'huile que le piston empêche complètement de

²³³ Sur la transformation d'un cylindre liquide en sphères isolées (BULLET. DE L'ACAD. DE BELGIQUE, 1867, 2me série, t. XXIV, p. 21). Voir aussi l'article inscrit au § 508 sous le n° 30.

s'élever, demeurera tout entière dans le liquide ambiant, où elle devra constituer un cylindre régulier s'étendant du petit disque de fer à l'extrémité inférieure du tube, et ayant en longueur au moins cinquante fois son diamètre. Ce cylindre commencera aussitôt à se transformer, et le phénomène devra s'accomplir avec une grande régularité.

Je n'ai pas essayé ce procédé, mais la réussite m'en paraît très probable; la seule difficulté réelle consisterait, je pense, dans l'égalisation des deux densités ; car, avec une hauteur aussi grande, une différence extrêmement faible entre ces densités pourrait altérer la régularité de la figure d'huile dès l'origine même de la transformation.

Si l'on peut étirer le verre en fils déliés sans qu'ils se convertissent en petites masses isolées, c'est qu'on n'élève pas assez la température de la substance pour amener celle-ci à l'état liquide: elle est simplement rendue sirupeuse, ce qui introduit déjà une grande résistance à la transformation, et, en outre, à mesure que le fil se forme, il est solidifié par le froid de l'air ambiant. De même si l'araignée et le ver à soie produisent leurs fils, c'est que, sans doute, la matière émise par leurs filières possède originairement une assez forte viscosité, et que, par suite de l'extrême ténuité de ces fils, la matière dont il s'agit est coagulée au moment de sa sortie.

§ 368. Ici doit se placer une remarque importante, dont nous ferons plus loin l'application: le phénomène de la conversion en sphères isolées n'est pas le résultat d'une propriété appartenant exclusivement à la forme cylindrique; il se produit à l'égard de toute figure liquide dont une dimension est considérable relativement aux deux autres: par exemple, dans l'expérience du § 222, si l'on crève en son milieu l'une quelconque des deux lames planes qui résultent de la désunion spontanée du caténoïde, l'huile qui constitue cette lame se retire rapidement dans tous les sens vers l'anneau métallique, le long duquel elle forme un joli anneau liquide; or celui-ci, dont les dimensions transversales sont fort petites, ne tarde pas à se transformer spontanément en une suite nombreuse de petites masses isolées que le fil métallique traverse, et qui, sans la présence de ce fil, seraient des sphères exactes.

Disons, en passant, que l'anneau liquide ci-dessus, au moment où il vient de se former, réalise la partie du nodoïde engendrée par un noeud de la ligne méridienne, dans le cas où ce noeud approche d'une circonférence de cercle (§ 75); avec un anneau métallique de 70mm de diamètre, la section méridienne de l'anneau liquide est sensiblement circulaire, et son diamètre n'est que de 2mm à 3mm.

§ 369. Poursuivons la recherche des lois de la transformation spontanée des longs cylindres; on verra, dans le chapitre XI, pourquoi nous donnons à cette partie de notre travail un développement si étendu.

On doit regarder à priori comme évident, que deux cylindres formés d'un même liquide et placés dans les mêmes circonstances, mais différents en diamètre, tendront à se diviser d'une manière semblable: c'est-à-dire que les longueurs normales respectives des divisions seront entre elles dans le rapport des diamètres de ces cylindres.

Afin de vérifier cette loi par l'expérience, je me suis procuré des fils de cuivre d'un diamètre exactement double de celui des premiers, et égal, par conséquent, à 2mm,1, et j'ai exécuté avec ceux une nouvelle série de dix expériences, en donnant au cylindre une longueur de 100mm. Cette série ne m'a fourni également qu'un seul résultat parfaitement régulier, que j'ai indiqué, comme précédemment, par le signe * placé en regard du nombre de sphères isolées correspondant. Voici le tableau relatif à la série dont il s'agit.

Nombre des sphères isolées.	Masses adhérentes aux bases.	Longueur d'une division.
		mm.
7	Deux petites.	13,33
6	Deux grandes.	13,83
6	Une grande et une petite.	14,28
7	id. id.	12,50
*6	Deux grandes.	13,33
6	id.	13,33
6	Une grande et une petite.	14,28
8	id. id.	11,11
8	Deux petites.	11,76
6	Une grande et une petite.	14,28

En s'arrêtant à la seconde décimale, on a ici, comme on voit, pour la longueur d'une division correspondante au résultat parfaitement régulier, la valeur 13mm,33; mais comme l'opération qui la donne consiste dans la division de 100mm par 7,5, la valeur exprimée d'une manière complète est 13mm $\frac{1}{3}$. Telle est donc à fort peu près, sinon exactement, la longueur normale des divisions de ce nouveau cylindre; or cette longueur 13mm $\frac{1}{3}$ est précisément double de la longueur 6mm $\frac{2}{3}$, qui appartient aux divisions du cylindre du § 366; ces deux longueurs sont donc effectivement entre elles dans le rapport des diamètres des deux cylindres.

Le résultat parfaitement régulier du tableau ci-dessus ayant présenté une masse de la grande espèce à chacune des bases, il s'ensuit que, pour permettre aux divisions du cylindre actuel de prendre leur longueur normale ou la longueur la plus approchée possible de cette dernière, la transformation a dû se disposer suivant le premier mode; tandis qu'à l'égard d'un cylindre moitié moindre en diamètre, et ayant la même longueur totale 100mm, la transformation s'était disposée suivant le second mode. Ici encore, le cas de deux masses de la petite espèce aux bases solides est le moins fréquent, bien qu'il se soit montré deux fois.

Enfin les différentes valeurs de la longueur d'une division sont plus concordantes que dans les deux séries relatives au premier diamètre, et manifestent mieux, par conséquent, la tendance vers une valeur constante; on voit même que la longueur normale est celle qui s'est reproduite le plus souvent.

§ 370. D'après la loi que nous venons d'établir, lorsque la nature du liquide et les circonstances extérieures ne changent pas, la longueur normale des divisions est proportionnelle au diamètre du cylindre; ou bien encore, en d'autres termes, le rapport entre la longueur normale des divisions et le diamètre du cylindre est constant.

Le cylindre du § 366 avait, comme nous l'avons vu, un diamètre de 1mm,05 et la longueur normale de ses divisions était à fort peu près de 6mm,67; par conséquent, lorsque le liquide est du mercure et que le cylindre repose sur une plaque de verre, la valeur du rapport constant dont il s'agit est, avec une grande approximation, $6,67/1,05 = 6,35$.

Examinons maintenant si les circonstances extérieures et la nature du liquide influent sur ce rapport, et commençons par les premières.

Notre cylindre de mercure doit contracter, sur toute la ligne suivant laquelle il touche la plaque de verre, une petite adhérence avec cette plaque, adhérence qui doit entraver plus ou moins la transformation. Pour découvrir si cette résistance influait sur la longueur normale des divisions, et, par suite, sur le rapport entre celle-ci et le

diamètre du cylindre, un moyen simple se présentait, c'était d'augmenter cette même résistance. Afin d'arriver à ce résultat, j'ai disposé l'appareil de manière à n'enlever qu'une des bandes de verre, de sorte que la figure liquide demeurait alors en contact à la fois avec la plaque et avec l'autre bande. J'ai répété encore dix fois l'expérience, en employant les fils de cuivre de 1mm,05 de diamètre, et en donnant au cylindre une longueur de 100mm. Les résultats ont été les suivants:

Nombre des sphères isolées.	Masses adhérentes aux bases.	Longueur d'une division. mm.
9	Une grande et une petite.	10,00
8	Id.	11,11
9	Id.	10,00
8	Id.	11,00
11	Deux petites.	8,69
8	Une grande et une petite.	11,11
8	Id.	11,11
8	Deux grandes.	10,53
8	Une grande et une petite.	11,11
6	Deux grandes.	13,33

On voit que les différentes valeurs de la longueur d'une division sont toutes, une seule exceptée, notablement supérieures à toutes celles qui se rapportent à un cylindre de même diamètre dont la surface ne touche le verre que par une seule ligne (§ 366). Il faut donc conclure de là que, toutes choses égales d'ailleurs, la longueur des divisions croît avec la résistance extérieure, et que, par conséquent, sous l'action d'une semblable résistance, cette longueur est nécessairement plus grande qu'elle ne le serait si le cylindre avait sa surface convexe entièrement libre.

Dans la série ci-dessus, aucun résultat ne s'est montré fort régulier; mais on comprend que la moyenne des valeurs de la troisième colonne approchera de la longueur normale des divisions. C'est, d'ailleurs, ce que confirment les tableaux des §§366 et 369: si l'on prend dans le premier les moyennes respectives des valeurs des deux séries, on trouvera pour l'une 6mm,77, et pour l'autre 7mm, 17, quantités dont la première est presque égale à la longueur 6mm,67, qui peut être considérée comme la longueur normale, et dont la seconde n'en diffère pas considérablement; et si l'on prend de même la moyenne relative au tableau suivant, on trouvera 13mm,15, quantité très voisine de la longueur 13mm,33, qui peut aussi, dans le cas du second tableau, être regardée comme la longueur normale. Or, la moyenne correspondante au tableau ci-dessus est 10mm,81 ; par conséquent, dans le cas de deux lignes de contact, nous aurons pour la valeur approchée du rapport entre la longueur normale des divisions et le diamètre du cylindre, $10,81/1,05 = 10,29$, tandis que, dans le cas d'une seule ligne de contact, nous avons trouvé seulement 6,35. Ainsi, en définitive, le rapport entre la longueur normale des divisions et le diamètre du cylindre augmente par l'effet d'une résistance extérieure.

§ 371. En l'absence complète d'une semblable résistance, le rapport ne doit donc plus dépendre que de la nature du liquide. Mais je dis qu'il y a une limite au dessous de laquelle ce même rapport ne peut descendre, et que celle-ci est précisément la limite de la stabilité.

Concevons un cylindre liquide d'une longueur suffisante par rapport au diamètre, compris entre deux bases solides, et effectuant sa transformation avec une régularité parfaite. Supposons, pour fixer les idées, que le phénomène se soit disposé suivant le second mode, ou, en d'autres termes, que les portions extrêmes de la figure soient l'une un étranglement et l'autre un renflement; alors, comme nous l'avons vu (§ 364), la régularité de la transformation s'étendra à ces dernières portions, c'est-à-dire que l'étranglement et le renflement extrêmes seront respectivement identiques avec les portions de même espèce du reste de la figure. Cela posé, prenons la figure à une époque du phénomène où elle ne présente encore que des étranglements et des renflements, et considérons de nouveau les sections dont le diamètre est égal à celui du cylindre (ibid.). Partons de la portion extrême étranglée; la base solide sur laquelle celle-ci s'appuie, et qui constitue la première des sections dont il s'agit, occupera, comme nous l'avons fait voir, l'origine même de l'étranglement; puis nous aurons une seconde section à l'origine du premier renflement; une troisième à l'origine du second étranglement, une quatrième à l'origine du second renflement, et ainsi de suite; de sorte que toutes les sections d'ordre impair occuperont les origines des étranglements, et toutes celles d'ordre pair, les origines des renflements. L'intervalle compris entre deux sections d'ordre impair consécutives renfermera donc un étranglement et un renflement; et puisque la figure commence par un étranglement et se termine par un renflement, il est clair que sa longueur totale se trouvera partagée en un nombre entier de semblables intervalles. En vertu de l'exacte régularité que nous avons supposée dans la transformation, tous les intervalles dont il s'agit seront égaux en longueur; et comme l'instant où nous considérons la figure peut être pris arbitrairement depuis l'origine du phénomène jusqu'au maximum d'approfondissement des étranglements, il s'ensuit que l'égalité de longueur des intervalles subsiste pendant toute cette période, et que, par conséquent, les sections qui terminent ces intervalles conservent pendant cette même période des positions parfaitement fixes. En outre, les parties de la figure respectivement contenues dans chacun des intervalles subissant identiquement et simultanément les mêmes modifications, les volumes de toutes ces parties demeurent égaux entre eux; et comme leur somme est toujours égale au volume total du liquide, il s'ensuit que, depuis l'origine de la transformation jusqu'au maximum d'approfondissement des étranglements, chacun de ces volumes partiels demeure invariable, ou, en d'autres termes, qu'aucune portion de liquide ne passe d'un intervalle dans les intervalles adjacents. Ainsi, à l'instant où nous considérons la figure, d'une part les deux sections qui terminent un même intervalle auront conservé leurs positions et leurs diamètres primitifs, et, d'autre part, ces sections n'auront été franchies par aucune portion de liquide. Les choses se seront donc passées dans chaque intervalle absolument de la même manière que si les deux sections qui le terminent eussent été des disques solides. Mais, entre deux disques solides, la transformation ne peut s'opérer si le rapport entre la distance qui sépare ces disques et le diamètre du cylindre est plus petit que la limite de la stabilité; donc le rapport entre la longueur de nos intervalles, et le diamètre du cylindre ne peut être inférieur à cette même limite. Or, la longueur d'un intervalle est évidemment égale à celle d'une division: car la première est, d'après ce que nous avons vu ci-dessus, la somme des longueurs d'un renflement et d'un étranglement, et la seconde est la somme des longueurs d'un renflement et de deux demi étranglements (§ 365); donc le rapport entre la longueur d'une division et le diamètre du cylindre ne peut être moindre que la limite de la stabilité; et nous remarquerons ici que cette conclusion est également vraie, soit que les divisions puissent ou non prendre exactement leur longueur normale.

§ 372. Passons à ce qui concerne la nature du liquide. La viscosité intérieure

engendre nécessairement une résistance qui doit aussi rendre la transformation moins facile; et puisque les résistances extérieures augmentent la longueur des divisions, il est à présumer que la viscosité intérieure agit de la même manière, et que, par conséquent, toutes choses égales d'ailleurs, le rapport dont nous nous occupons croît avec cette même viscosité. Cependant celle-ci ne peut exercer une influence bien considérable; en effet, la résistance qu'elle oppose aux déplacements relatifs des molécules diminue rapidement, nous le savons, avec, la vitesse de ces déplacements; or, quand la transformation commence, c'est avec une vitesse minime, et qui va ensuite en s'accélégrant; on doit donc admettre qu'à l'origine du phénomène, la résistance due à la viscosité intérieure est faible, et conséquemment ne produit jamais un grand allongement des divisions²³⁴. Enfin la viscosité superficielle a sans doute aussi quelque influence, du moins à l'égard des liquides de la première et de la troisième catégorie (Chap. VII).

§ 373. Il résulte de cette discussion concernant les résistances, que la plus petite valeur que l'on puisse supposer au rapport entre la longueur normale des divisions et le diamètre du cylindre, correspond au cas où il y aurait à la fois absence complète de résistance extérieure et de viscosités; et, d'après la démonstration donnée dans le § 371, cette plus petite valeur serait au moins égale à la limite de la stabilité. Or, comme tous les liquides sont, plus ou moins visqueux, il s'ensuit comme très probable, que, même dans l'hypothèse de l'annulation de toute résistance extérieure, le rapport dont il s'agit surpassera toujours la limite de la stabilité; et puisque celle-ci est supérieure à 3, ce même rapport sera, à plus forte raison, toujours supérieur à 3.

Il est à croire que la plus petite valeur ci-dessus considérée, c'est-à-dire celle qu'aurait le rapport dans le cas d'une absence complète de résistance tant intérieure qu'extérieure, serait égale à la limite même de la stabilité, ou la surpasserait excessivement peu. En effet, d'une part, le rapport s'approche de cette limite à mesure que les résistances diminuent, et, d'autre part, pour peu qu'il la dépasse, la transformation devient possible (§ 371); on ne voit donc pas de raison pour qu'il en différât sensiblement si les résistances étaient absolument nulles. C'est d'ailleurs ce que les résultats de nos expériences tendent à confirmer. D'abord, en effet, puisque le rapport appartenant à notre cylindre de mercure descend de 10,29 à 6,35 en passant du cas où le cylindre touche le verre par deux lignes à celui où il ne le touche que par une seule, il est clair que si ce dernier contact pouvait être lui-même supprimé, ce qui ne laisserait plus subsister que la seule influence des viscosités, le rapport deviendrait de beaucoup inférieur à 6,35; et comme, d'un autre côté, il doit surpasser 3, nous pouvons bien admettre qu'il se trouverait du moins compris entre ce dernier nombre et 4, de sorte qu'il se rapprocherait beaucoup de la limite de la stabilité. Si donc il était possible d'annuler aussi les viscosités, le nouveau décroissement que subirait alors le rapport amènerait bien probablement celui-ci jusqu'à la limite même dont il s'agit, ou du moins jusqu'à une valeur qui en différerait excessivement peu.

Ainsi, d'une part, la plus petite valeur du rapport, celle qui correspondrait à une complète nullité de résistances, ne différerait pas ou ne différerait guère de la limite de la stabilité; et, d'autre part, sous l'influence des viscosités seules le rapport appartenant au mercure s'éloignerait peu de cette plus petite valeur. On voit donc, du moins à l'égard du mercure, que l'influence de la viscosité, tant extérieure qu'intérieure, est réellement faible, et, d'après ce que nous avons dit plus haut, il doit en être à peu près de même à l'égard des autres liquides.

²³⁴ Une expérience décrite dans ma 2e Série m'avait conduit à exagérer l'influence de la viscosité sur la longueur des divisions; j'ai reconnu, plus tard, que l'expérience dont il s'agit présentait, à cet égard, une cause d'erreur; c'est pourquoi je ne l'ai pas reproduite dans l'ouvrage actuel.

De là résulte qu'en l'absence de toute résistance extérieure, les valeurs du rapport respectivement correspondantes aux divers liquides ne pourront, malgré les différences de viscosités, s'éloigner beaucoup de la limite de la stabilité; et comme le plus petit nombre entier supérieur à celle-ci est 4, nous pouvons adopter ce nombre comme représentant, en moyenne, la valeur approximative probable du rapport dont il s'agit.

En partant de cette valeur, le calcul donne, pour le rapport entre le diamètre des sphères isolées qui résultent de la transformation et le diamètre du cylindre, le nombre 1,82, et pour le rapport entre la distance de deux sphères voisines et ce même diamètre, le nombre 2,18.

Nous verrons plus loin (§ 406) que la théorie rend parfaitement raison de l'influence des résistances sur la longueur des divisions.

§ 374. Une autre conséquence découle encore de notre discussion. Soit, pour simplifier, le diamètre du cylindre pris comme unité. Alors le rapport entre la longueur normale des divisions et le diamètre exprimera cette longueur normale elle-même, et le rapport qui constitue la limite de la stabilité exprimera la longueur même correspondante à cette limite. Ceci convenu, reprenons la conclusion à laquelle nous sommes arrivés au commencement du paragraphe précédent, conclusion que nous énoncerons, par conséquent, ici en disant que pour tous les liquides la longueur normale des divisions surpasse toujours la limite de la stabilité; rappelons-nous, en second lieu, que la somme des longueurs d'un étranglement et d'un renflement est égale à celle d'une division (§ 371), et, en troisième lieu, que la longueur d'un étranglement est égale, ou à peu près, à celle d'un renflement (§359). Or, de l'ensemble de ces propositions il résulte que, lorsque la transformation d'un cylindre commence à s'effectuer, la longueur d'une seule portion, soit étranglement, soit renflée, est nécessairement supérieure à la moitié de la limite de la stabilité; et que, par conséquent, la somme des longueurs de trois portions contiguës par exemple de deux renflements et de l'étranglement intermédiaire, est supérieure à une fois et demie cette même limite. Donc enfin, si la distance des bases solides est comprise entre une fois et une fois et demie la limite de la stabilité, il est impossible que la transformation donne lieu à trois portions, et elle ne pourra, par conséquent, produire alors qu'un seul renflement juxtaposé à un seul étranglement. C'est, en effet, comme nous l'avons vu, toujours de cette manière que la chose s'est passée à l'égard du cylindre du § 359, cylindre qui se trouvait évidemment dans la condition ci-dessus, et l'on s'explique maintenant la non-symétrie de sa transformation.

§ 375. Ainsi que nous l'avons annoncé en terminant le § 362, nous avons encore à décrire un fait remarquable qui accompagne toujours la fin du phénomène de la transformation d'un cylindre liquide.

Dans la transformation des gros cylindres d'huile, soit imparfaits, soit exacts (§§45 et 359), lorsque la partie étranglée s'est considérablement amincie, et que la séparation semble sur le point d'avoir lieu, on voit les deux masses refluer rapidement vers les anneaux ou les disques; mais elles laissent entre elles un filet cylindrique qui établit encore, pendant un temps très court,

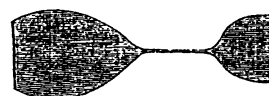


Fig. 97

la continuité de l'une à l'autre (fig. 97); puis ce filet se résout lui-même en masses partielles. Généralement il se divise en trois parties, dont les deux extrêmes vont se confondre avec les deux grosses masses, et dont l'intermédiaire forme une sphérule de quelques millimètres de diamètre, qui demeure isolée au milieu de l'intervalle qui sépare les grosses masses; en outre, dans chacun des intervalles entre cette sphérule et les deux grosses masses, on voit une autre sphérule beaucoup plus petite, ce qui in-

dique que la séparation des parties du filet ci-dessus s'est effectuée de même par des effilements; la fig. 98 montre cet état définitif du système liquide.

Dans le cas de nos cylindres de mercure, la résolution en sphères s'accomplit en trop peu d'instant pour qu'on puisse apercevoir formation des filets; mais on trouve toujours, dans plusieurs des intervalles entre les sphères, une ou deux sphérules très petites, d'où l'on peut conclure que la séparation s'est effectuée par le même mode.

Maintenant que nous connaissons toute la marche que doit suivre la transformation d'un cylindre liquide en sphères isolées, nous pouvons la représenter graphiquement; la fig. 99 montre plusieurs des formes successives par lesquelles passe graduellement la figure liquide, à partir du cylindre jusqu'au système de sphères isolées et de sphérules. Cette figure se rapporte au cas d'une liberté extérieure complète; par conséquent, d'après la conclusion probable qui termine le § 373, le rapport entre la longueur des divisions et le diamètre a été pris égal à 4.



Fig. 98

Le phénomène de la formation des filets et de leur résolution en sphérules n'est pas borné au cas de la rupture de l'équilibre des cylindres liquides; sauf de rares exceptions dont nous parlerons plus loin, il se manifeste toutes les fois qu'une de nos masses liquides, quelle que soit sa figure, se divise en masses partielles par exemple, lorsque l'expérience des §§222 et 368 est 209 effectuée avec soin, et que les anneaux liquides qui se forment après la rupture des deux lames planes se sont convertis en masses isolées, il y a, dans chacun des intervalles entre celles-ci, une masse plus petite, c'est la sphérule; seulement ces petites masses sont relativement plus volumineuses que celle qui se montre après la transformation de nos cylindres d'huile courts; en outre, la durée de la transformation des anneaux liquides dont il s'agit est de plusieurs secondes; on constate donc sans peine la formation des filets et la conversion de chacun d'eux en sa sphérule.

Le phénomène se produit de même avec les liquides soumis à l'action libre de la pesanteur, bien qu'il soit alors moins facile à constater. Par exemple, si l'on trempe dans l'éther l'extrémité arrondie d'une baguette de verre, et qu'on retire celle-ci verticalement et avec précaution, l'on voit, à l'instant où la petite quantité de liquide qui reste adhérente à la baguette se sépare de la masse, une sphérule extrêmement petite rouler sur la surface de cette dernière.

§ 376. Essayons d'expliquer la génération des filets. Il y a une analogie évidente entre cette génération et celle des lames; en effet, une lame commence en général à naître, nous le savons, lorsque deux surfaces concaves opposées et qui vont en se rapprochant graduellement, sont près de se toucher; et, dans la séparation spontanée d'un cylindre plein en masses isolées, les filets commencent à se former lorsque les sections méridiennes de la figure sont peu éloignées de se toucher par les sommets de leurs parties concaves; or nous allons voir que cette analogie dans les conditions de la production est liée à une analogie entre les causes.

Pendant qu'un cylindre liquide instable passe graduellement à l'état de masses séparées, les étranglements ne peuvent s'approfondir qu'en chassant leur liquide dans les renflements. Cela étant, considérons, à une époque du phénomène antérieure à l'apparition des filets, une section d'un étranglement assez rapprochée de celle du milieu pour qu'en passant de l'une à l'autre le diamètre demeure sensiblement le même; la quantité de liquide perdue, dans un intervalle de temps donné, par la tranche comprise entre ces deux sections, quantité qui traverse nécessairement dans ce même temps

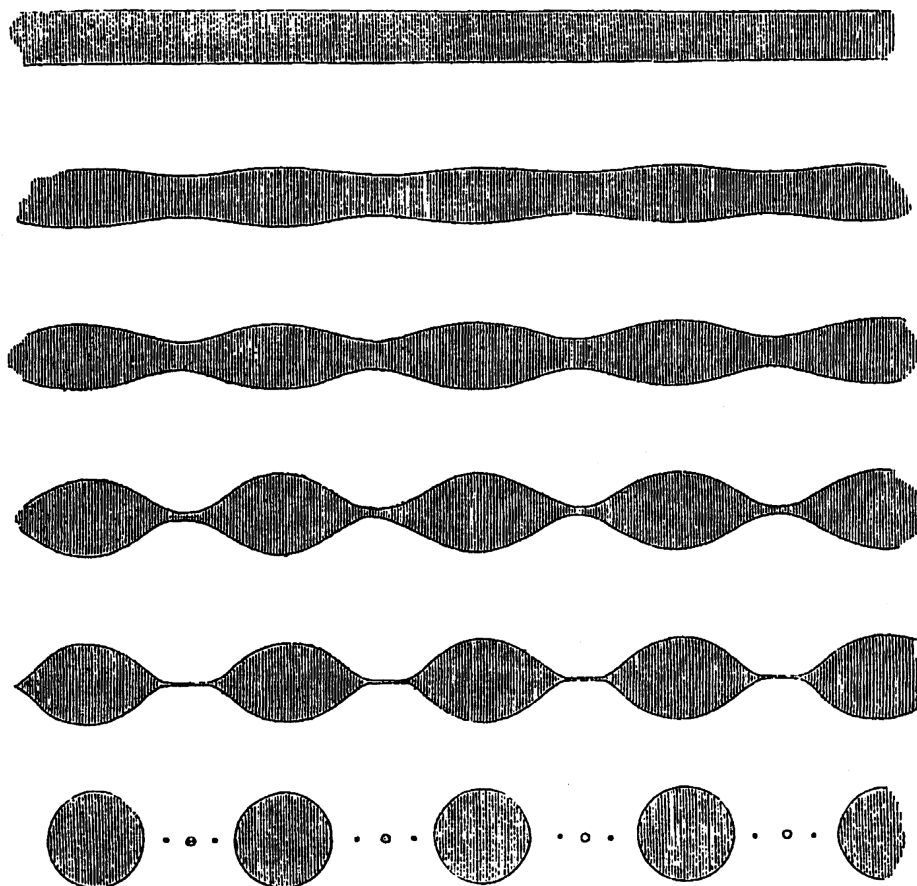


Fig. 99

la section considérée, est évidemment mesurée par la différence des volumes de deux cylindres ayant pour longueur commune la distance des deux sections, et pour rayons ceux de ces sections au commencement et à la fin du temps dont il s'agit. Si nous partageons la durée totale de la transformation en intervalles égaux et très petits, et si nous désignons par r la première valeur du rayon, par α la diminution qu'il subit dans l'un de ces petits intervalles de temps, et enfin par l la distance des deux sections, les volumes en question seront respectivement $\pi r^2 l$ et $\pi(r - \alpha)^2 l$; et comme α est nécessairement très petit, ce qui permet d'en négliger le carré, la différence de ces volumes se réduira à $2\pi l r \alpha$. Telle est donc la mesure de la quantité de liquide qui, dans un intervalle de temps constant très court, passe à travers notre section; or la vitesse avec laquelle s'effectue ce passage, est visiblement proportionnelle à la quantité ci-dessus et en raison inverse de l'aire πr^2 de la section; elle est donc proportionnelle au rapport $\frac{2\pi l r \alpha}{\pi r^2} = 2l \frac{\alpha}{r}$, ou simplement, en supposant constante la distance l des deux sections, au rapport $\frac{\alpha}{r}$.

Maintenant, comme la transformation va en s'accéléralant, le numérateur augmente d'abord beaucoup, pendant que le dénominateur r diminue, de sorte que, par cette double raison, la vitesse du passage du liquide à travers notre section commence par croître

suivant une loi très rapide; mais je dis que cette même vitesse finit par devenir sensiblement uniforme. En effet, dans le phénomène de la transformation, les mouvements des molécules liquides consistent surtout en des déplacements des unes par rapport aux autres, puisque la figure ne fait que changer de forme; or, ainsi que je l'ai rappelé souvent à propos des lames, la viscosité oppose à ces déplacements relatifs une résistance qui augmente considérablement avec leur vitesse; on peut donc admettre que, par suite de cette résistance, la vitesse, d'abord rapidement croissante, du passage à travers la section considérée, prend à la fin une valeur à peu près constante, comme cela a lieu à l'égard de toute vitesse accélérée et soumise à des résistances qui augmentent beaucoup avec elle.

Le rapport $\frac{\alpha}{r}$ atteint donc, lorsque le rayon r est suffisamment amoindri, une valeur qui peut être regardée comme ne variant, plus ensuite; mais cette constance ne peut avoir lieu que si α , qui représente la vitesse d'amincissement du milieu de l'étranglement, diminue en même temps que le rayon r ; ainsi cette vitesse d'amincissement, qui était primitivement très accélérée, finit par être au contraire retardée. Mais, dans cette phase de la transformation, les sections de l'étranglement plus distantes de celle du milieu ayant moins perdu en diamètre, le mouvement des molécules qui y passent est beaucoup moins entravé par la résistance de la viscosité, et conséquemment, vers la fin du phénomène, pendant que l'amincissement se ralentit au milieu de l'étranglement et dans les portions voisines, il poursuit sa marche accélérée dans les portions plus éloignées; or il résulte évidemment de là que le milieu de la figure doit prendre alors une forme allongée et quasi cylindrique, ou constituer ce que j'ai nommé un filet.

Disons ici que Beer a présenté une explication tout autre de la formation des filets; nous y reviendrons plus loin (§ 423).

§ 377. Un fait curieux, c'est que l'identité entre les figures laminaires et les figures pleines se soutient dans le phénomène particulier que nous venons d'étudier; en d'autres termes, quand une figure laminaire instable se partage spontanément en portions isolées, la séparation de celles-ci est de même accompagnée de la formation des filets, qui, eux aussi, se convertissent en sphérules, et ces filets, ainsi, que ces sphérules, sont alors laminaires comme la figure d'où ils proviennent. Par exemple, dans la désunion du caténoïde laminaire d'huile réalisé au sein du liquide alcoolique (§ 222), on distingue parfaitement le filet laminaire et sa transformation en sphérules; avec le caténoïde laminaire de liquide glycérique (§ 111), on ne peut observer le filet, à cause de la rapidité des phénomènes; mais, au moment de la désunion, on voit une sphérule de quelques millimètres de diamètre tomber sur la lame inférieure, et y rebondir pendant quelques instants; cette sphérule se change ensuite en une lentille bi-convexe, laminaire comme elle, enchâssée par son bord dans la lame. De même si, après avoir réalisé, au moyen du liquide glycérique, un onduloïde partiel étranglé ou un onduloïde partiel renflé (§ 113) on continue à élever l'anneau supérieur jusqu'à la rupture de l'équilibre, on voit, à l'instant de la désunion, une sphérule de quelques millimètres de diamètre s'échapper de la figure et voltiger dans l'air, ou tomber sur la bulle qui s'est, formée à l'anneau inférieur, selon le plus ou moins de ténuité de la lame qui constitue cette même sphérule.

§ 378. Il est aisé d'étendre à la génération des filets laminaires la théorie exposée plus haut. Dans une masse pleine, les forces qui produisent la transformation émanent de la couche superficielle, et la portion de cette couche qui correspond à un étranglement agit en exprimant, par sa contraction, le liquide qu'elle entoure vers les parties adjacentes de la masse; dans une figure laminaire, les actions émanent des couches superficielles des deux faces de la lame, et ces deux systèmes de forces s'ajoutent l'un

à l'autre. Si donc la figure laminaire est formée d'huile au sein du liquide alcoolique, la lame, en se contractant, chasse le liquide alcoolique intérieur de part et d'autre du milieu de l'étranglement; notre théorie reçoit conséquemment son application, et il y a formation d'un filet laminaire. Si la figure laminaire est réalisée dans l'air, par exemple avec, de l'eau de savon ou du liquide glycérique, c'est l'air qui est exprimé de l'intérieur de l'étranglement. Dans ce dernier cas, à cause de l'extrême mobilité des molécules des gaz, il semble d'abord qu'on ne peut plus faire intervenir l'influence de la viscosité; mais il faut faire attention que le phénomène s'accomplit avec une rapidité bien plus grande, de sorte que, par cet excès de vitesse, la résistance aux mouvements relatifs des molécules de l'air devient suffisante pour amener le même résultat, c'est-à-dire la naissance d'un filet.

§ 379. Continuons l'étude expérimentale de la transformation spontanée des cylindres en sphères isolées. Tâchons de découvrir la loi suivant laquelle la durée du phénomène varie avec le diamètre du cylindre, et d'obtenir au moins quelques indices relativement à la valeur absolue de cette durée pour un cylindre d'un diamètre donné, formé d'un liquide donné, et placé dans des circonstances données.

On comprend d'abord a priori que, pour un même liquide et les mêmes circonstances extérieures, et en supposant que la longueur du cylindre soit toujours telle que les divisions prennent exactement leur longueur normale (§ 365), la durée du phénomène doit croître avec le diamètre : car plus celui-ci est grand, plus est grande la masse de chacune des divisions, et, d'un autre côté, plus les courbures, d'où dépendent les intensités des forces figuratrices sont faibles. Il est vrai que la surface de chacune des divisions augmente aussi avec le diamètre du cylindre, et que, par suite, il en est de même du nombre des forces figuratrices élémentaires; mais cette augmentation a lieu dans un moindre rapport que celle de la masse.

Je me suis assuré, à l'aide des cylindres de mercure de 1mm,05 et de 2mm,1 de diamètre (§§366 et 369), que la durée du phénomène croît, en effet, avec le diamètre: bien que la transformation de ces cylindres s'effectue très rapidement, on reconnaît cependant sans peine que la durée relative au plus grand diamètre est supérieure à celle qui se rapporte au plus petit.

Quant à la loi qui régit cette augmentation de durée, il serait sans doute difficile d'en obtenir la détermination expérimentale d'une manière directe, c'est-à-dire en mesurant les temps qu'exigerait l'accomplissement du phénomène à l'égard de deux cylindres assez longs pour qu'ils se convertissent respectivement en plusieurs sphères isolées. On y parviendrait probablement en recourant au procédé indiqué par M. Donny (§ 367); mais on peut arriver au même résultat d'une manière plus simple, bien qu'avec certaine restriction dont nous parlerons bientôt, par le moyen de deux cylindres d'huile courts formés entre des disques, cylindres auxquels rien n'empêche de donner des diamètres assez grands pour rendre facile la mesure précise des durées. La transformation d'un cylindre de cette espèce ne produit qu'un seul étranglement et un seul renflement; mais comme, dans la transformation des cylindres assez longs pour fournir plusieurs sphères isolées complètes, les phases par lesquelles passent les étranglements et les renflements sont les mêmes pour tous, il suffit de considérer un seul étranglement et un seul renflement. On comprend que les deux systèmes solides devront avoir des dimensions relatives telles, que le rapport entre la distance des disques et le diamètre de ceux-ci, soit le même des deux parts, afin que la similitude existe entre les deux figures liquides à leur origine et dans tous les instants homologues de leurs transformations.

Avant de rendre compte de l'emploi de ces figures d'huile pour la recherche de la loi des durées, nous devons présenter ici plusieurs remarques importantes. Nous n'aurons

à faire usage (chap. XI) de la loi dont il s'agit, que dans le cas, d'ailleurs le plus simple, où les cylindres seraient formés dans le vide ou dans l'air, et seraient exempts de toute résistance extérieure, ou, en d'autres termes, libres sur toute leur surface convexe. Or nos cylindres d'huile courts sont, formés au sein du liquide alcoolique, et l'on peut se demander si cette circonstance n'influe pas sur le rapport des durées correspondant à un rapport donné entre les diamètres de ces cylindres. D'abord, en effet, une portion plus ou moins grande du liquide alcoolique doit être déplacée par les modifications des figures, de sorte que la masse totale à mouvoir dans une transformation, se compose de la masse d'huile et de cette portion du liquide alcoolique; mais il est clair qu'en vertu de la similitude des deux figures d'huile et de celle de leurs mouvements, les quantités du liquide ambiant respectivement déplacées seront entre elles exactement ou du moins sensiblement, comme les deux masses d'huile; de manière que le rapport des deux masses totales ne sera pas altéré par cette circonstance. Il est bien probable, d'après cela, que cette même circonstance n'influera pas non plus sur le rapport des durées; seulement les valeurs absolues de ces durées seront plus considérables.

D'un autre cas, l'attraction mutuelle des deux liquides en contact diminue les intensités des forces figuratrices; mais il est aisé de voir que cette diminution n'altère pas le rapport de ces intensités dans les deux figures. En effet, imaginons qu'à un instant homologue des deux transformations, le liquide alcoolique se trouve tout à coup remplacé par de l'huile, et concevons, par la pensée, dans celle les surfaces des deux figures, telles qu'elles étaient à cet instant. Alors les forces figuratrices seront complètement détruites par l'attraction de l'huile extérieure à ces surfaces, ou, en d'autres termes, l'attraction extérieure sera, en chaque point, égale et opposée à la force figuratrice intérieure. Si maintenant nous rétablissons le liquide alcoolique, les intensités des attractions extérieures changeront, mais elles conserveront évidemment entre elles les mêmes rapports; d'où il suit que celles qui correspondent à deux points homologues pris sur les deux figures, seront encore entre elles comme les forces figuratrices intérieures partant de ces deux points; de sorte qu'en définitive, les résultantes respectives des actions extérieure et intérieure en ces deux mêmes points, seront entre elles dans le même rapport que les deux forces intérieures seules. Ainsi les attractions exercées sur l'huile par le liquide alcoolique ambiant diminueront bien les intensités absolues des forces figuratrices, mais elles ne changeront pas les rapports de ces intensités, et il est à croire, par conséquent, qu'elles n'auront aucune influence sur le rapport des durées. Mais il est clair que cette cause augmentera encore de beaucoup les valeurs absolues de celles-ci.

Par les deux raisons que nous venons d'exposer, la présence du liquide alcoolique augmentera donc considérablement les valeurs absolues des deux durées; mais on peut admettre qu'elle n'altérera pas le rapport de ces valeurs, de sorte que ce rapport sera le même que si les phénomènes s'opéraient dans le vide ou dans l'air. Nous considérerons, par conséquent, la loi que nous déduirons de nos expériences sur les cylindres d'huile courts, comme indépendante de la présence du liquide alcoolique ambiant, et c'est ce qui se trouvera appuyé par la nature même de cette loi.

Pendant la transformation de nos cylindres courts présente une particularité qui entraîne une restriction. Les deux masses finales dans lesquelles se résout un semblable cylindre étant inégales, la plus petite atteint sa forme d'équilibre notablement avant l'autre, de sorte que la durée du phénomène n'est pas unique. Il résulte de là que nous ne pourrions compter la durée, que jusqu'à l'instant de la rupture du filet; et, par conséquent, le rapport que nous obtiendrons ainsi pour deux cylindres, ne sera que celui des durées de deux portions homologues des transformations totales. Du reste,

le rapport de ces durées partielles est précisément celui dont nous aurons à faire usage plus loin.

§ 380. J'ai exécuté les expériences dont il s'agit, en employant deux systèmes de disques, dont les dimensions respectives étaient entre elles comme 1 à 2; dans le premier, les disques avaient un diamètre de 15mm et étaient séparés par une distance de 54mm, et, dans le second, le diamètre était de 30mm et la distance de 108mm. Les cylindres formés respectivement dans ces deux systèmes étaient donc semblables entre eux, et, comme on devait s'y attendre, la similitude entre les deux figures se maintenait exactement, pour autant que l'oeil pouvait en juger, dans toutes les phases de leurs transformations.

Il arrivait quelquefois que le cylindre, en apparence bien formé, ne montrait aucune persistance, et commençait immédiatement à s'altérer; cette circonstance devant être attribuée à un petit reste d'irrégularité de la figure, on rétablissait aussitôt la forme cylindrique²³⁵, et l'on ne comptait le temps que lorsque la figure paraissait se maintenir sous cette forme pendant quelques instants. Mais alors encore se présentait parfois une autre anomalie, qui consistait dans la formation simultanée de deux étranglements comprenant entre eux un renflement; cette modification s'arrêtait après avoir atteint un degré assez peu prononcé d'ailleurs, et la figure semblait demeurer dans le même état pendant un temps notable; puis l'un des étranglements se prononçait peu à peu davantage, tandis que l'autre s'effaçait, et la transformation continuait ensuite à la manière ordinaire. Comme cette particularité constituait une exception à la marche régulière du phénomène, on cessait de compter dès qu'elle se montrait, et l'on rétablissait encore la forme cylindrique. On ne continuait définitivement à compter le temps, que dans les cas où, après quelque persistance de la forme cylindrique, il ne se produisait qu'un seul étranglement.

Pour chacun des deux cylindres, on a répété vingt fois l'expérience, afin d'obtenir un résultat moyen. Lorsqu'une transformation était opérée, on réunissait en une seule les deux masses aux quelles elle avait donné lieu, et l'on reformait le cylindre²³⁶, pour passer à une nouvelle mesure du temps.

Voici les nombres de secondes obtenus; chacun d'eux exprime le temps écoulé depuis l'instant de la formation du cylindre jusqu'à celui de la rupture du filet. Ces temps étaient comptés à l'aide d'une montre battant les cinquièmes de seconde.

²³⁵ Voir la note du § 339.

²³⁶ On étirait, à cet effet, la grosse masse vers la petite, au moyen de l'anneau dont j'ai parlé dans le § 46. Mais il fallait empêcher que l'anneau, en quittant la figure liquide, n'entraînât avec lui une quantité sensible d'huile; pour cela, au lieu de faire adhérer à la grosse masse la totalité de l'anneau, on laissait libre une petite portion de celui-ci, et comme alors son action était insuffisante pour étendre la grosse masse jusqu'à l'autre, on y aidait en poussant légèrement l'huile avec l'extrémité du bec de la seringue. Lorsque après la réunion des deux masses on retirait l'anneau, il n'abandonnait dans le liquide alcoolique qu'une sphérule fort petite, que d'ailleurs on réunissait ensuite au reste de l'huile à l'aide de l'anneau lui-même, ainsi que la plus grosse des sphérules dues à la transformation du filet.

CYLINDRE DE 15mm DE DIAMÈTRE.	CYLINDRE DE 30mm DE DIAMÈTRE.
25''0	59''6
26,6	73,0
28,0	57,0
30,0	61,0
24,8	67,8
35,2	60,0
27,0	63,6
30,0	54,2
30,4	61,0
29,8	52,6
36,4	51,6
32,0	68,0
30,4	73,6
24,6	61,8
32,6	53,0
33,8	58,0
33,8	63,8
20,2	60,0
28,6	52,6
32,6	55,2
Moyenne.. 29''59	Moyenne.. 60''38

On voit que les nombres relatifs à un même diamètre ne s'écartent pas assez les uns des autres pour qu'on ne puisse regarder le rapport des deux moyennes comme s'approchant beaucoup du rapport véritable des durées. Or le rapport de ces deux moyennes est 2,04, c'est-à-dire presque exactement égal à celui des deux diamètres. D'ailleurs, il est évident que, pour chacun de ces derniers, le plus grand des nombres obtenus doit correspondre au cas où le cylindre, était formé de la manière la plus parfaite, et, par conséquent, il est probable que le rapport de ces deux plus grands nombres s'approche aussi beaucoup du rapport véritable des durées. Or ces deux nombres sont, d'une part 36,4, et, de l'autre, 73,6, et leur rapport est 2,02, nombre qui diffère encore moins de 2, ou du rapport des diamètres.

Nous pouvons donc admettre que les durées relatives à ces deux cylindres sont entre elles comme les diamètres de ces mêmes cylindres; d'où nous déduisons cette loi, que la durée partielle de la transformation d'un semblable cylindre est proportionnelle au diamètre de celui-ci.

J'ai dit (§ précéd.) que la loi ainsi obtenue fournirait par elle-même un nouveau motif de croire qu'elle ne changerait pas si nos cylindres d'huile courts étaient réalisés dans le vide ou dans l'air. En effet, la proportionnalité au diamètre est la loi la plus simple possible, et, d'autre part, les circonstances dans lesquelles le phénomène s'opère sont moins simples dans le cas de la présence du liquide alcoolique qu'elles ne le seraient dans celui de son absence; par conséquent, si la loi changeait du premier au second, il s'ensuivrait qu'une simplification dans les circonstances amènerait, au contraire, une complication dans la loi, ce qui est bien peu vraisemblable.

Nous pouvons donc, je pense, légitimement généraliser la loi ci-dessus d'après l'ensemble des remarques du paragraphe précédent, et en tirer la conclusion qui suit:

Si l'on suppose un cylindre liquide formé dans le vide ou dans l'air, assez long pour fournir plusieurs sphères, libre sur toute sa surface convexe, et d'une longueur telle, que les divisions prennent exactement leur longueur normale, le temps qui s'écoulera depuis l'origine de la transformation jusqu'à l'instant de la rupture des filets sera exactement ou sensiblement proportionnel au diamètre de ce cylindre.

§ 381. Occupons-nous maintenant de la valeur absolue du temps dont il s'agit, pour un diamètre donné, le cylindre étant toujours supposé réalisé dans le vide ou dans l'air, assez long pour fournir plusieurs sphères, libre sur toute sa surface convexe, et d'une longueur telle que ses divisions prennent leur longueur normale.

Il est clair que cette valeur absolue doit varier avec la nature du liquide: car elle dépend évidemment de la densité de celui-ci, de l'intensité de ses forces figuratrices, et enfin de ses viscosités.

Les expériences que nous venons de rapporter ne donnent à l'égard de l'huile qu'une limite supérieure fort éloignée: c'est ce qui résulte d'abord des deux causes que nous avons signalées dans le § 379 et qui sont dues à la présence du liquide alcoolique; mais à ces deux causes s'en joint une troisième que nous devons faire connaître. Si l'on imagine un cylindre d'huile formé dans les conditions ci-dessus la somme des longueurs d'un étranglement et d'un renflement sera probablement plus considérable à l'égard de ce cylindre qu'à l'égard de nos cylindres d'huile courts ayant le même diamètre: car, à cause de la grande viscosité de l'huile, cette somme doit sans doute surpasser plus que dans nos cylindres d'huile courts la longueur qui correspond à la limite de la stabilité. Or on peut poser en principe, que, toutes choses égales d'ailleurs, une augmentation dans la somme des longueurs d'un étranglement et d'un renflement tend à rendre la transformation plus rapide, et, par conséquent, à raccourcir les durées totale et partielle du phénomène. En effet, pour un diamètre donné, plus la somme dont il s'agit s'éloigne de la longueur qui correspondrait à la limite de la stabilité, plus les forces qui produisent la transformation doivent agir avec énergie; d'ailleurs, immédiatement au-dessous de la limite de la stabilité la transformation ne s'effectuant plus, on peut alors considérer la durée du phénomène comme infinie, d'où il suit que lorsqu'on passe au delà de cette limite, la durée passe l'une valeur infinie à une valeur finie, et que, par conséquent, elle doit décroître rapidement à partir de cette même limite; enfin, c'est aussi ce que confirment les résultats de l'expérience comme nous le montrerons plus loin § 407. Ainsi, lors même qu'il serait possible de former dans le vide ou dans l'air l'un de nos cylindres d'huile courts, et d'éliminer, par conséquent, les deux causes de retard dues à la présence du liquide alcoolique, la durée relative à ce cylindre surpasserait encore celle qui se rapporterait à un cylindre d'huile de même diamètre formé dans les conditions que nous avons supposées.

§ 382. Mais si, en comptant la durée absolue dans le cas de l'un de nos cylindres d'huile courts, nous n'obtenons à l'égard de ce liquide qu'une limite supérieure beaucoup trop élevée, le cylindre de mercure du § 369, cylindre qui est formé dans l'air, et dont la longueur est suffisante par rapport au diamètre pour que les divisions, aient exactement ou à fort peu près leur longueur normale, nous fournira, au contraire, à l'égard de ce dernier liquide, une limite inférieure probablement plus approchée.

D'abord, dans le cas de ce cylindre, dont le diamètre était, comme nous l'avons dit, de 2mm,1, la transition ne s'effectue pas en un temps tellement court, que l'on ne puisse estimer avec quelque exactitude la durée totale du phénomène; je dis la durée totale, parce que dans, une transformation aussi rapide, il serait bien difficile de saisir l'instant de la rupture des filets. Pour approcher autant que possible de la valeur de cette durée totale, j'ai eu recours au procédé suivant.

On a réglé, par des épreuves successives, les battements d'un métronome de telle manière qu'en soulevant avec rapidité, à l'instant précis d'un battement le système des bandes de verre appartenant à l'appareil qui sert à former le cylindre, le battement suivant parût coïncider avec la terminaison de la transformation; puis, après s'être assuré encore plusieurs fois que cette coïncidence paraissait bien exacte, on a déterminé la durée de l'intervalle entre deux battements, en comptant les oscillations exécutées par l'instrument pendant deux minutes, et divisant ce temps par le nombre des oscillations.

J'ai trouvé ainsi, pour l'intervalle dont il s'agit, la valeur $0'',39$. La durée totale de la transformation de notre cylindre de mercure peut donc être évaluée approximativement à $0'',39$, ou, plus simplement, à $0'',4$.

Mais ce cylindre n'est pas libre sur toute sa surface convexe, et son contact avec la plaque de verre doit influer sur la durée, tant directement que par l'accroissement qu'il détermine dans la longueur des divisions. Examinons donc sous ce double point de vue l'influence dont il s'agit.

L'action directe du contact avec la plaque est sans doute bien faible : car, dès que la transformation commence, le liquide doit se détacher du verre dans tous les intervalles entre les parties renflées, de manière à ne plus toucher le plan solide que par une série de très-petites surfaces appartenant à ces parties renflées; par conséquent, si l'action directe du contact de la plaque était seule éliminée, c'est-à-dire si l'on pouvait faire en sorte que le cylindre fût libre sur toute sa surface convexe, mais que cependant les divisions qui s'y forment prissent la même longueur qu'auparavant, la durée totale se trouverait à peine diminuée.

Reste donc l'effet de l'allongement des divisions. La longueur des divisions de notre cylindre est égale à 6,35 fois le diamètre (§ 370), tandis que, dans l'hypothèse d'une liberté complète de la surface convexe, cette longueur serait très probablement moindre que 4 fois le diamètre (§ 373); or, en vertu du principe établi dans le paragraphe précédent, cette augmentation dans la longueur des divisions entraîne nécessairement une diminution dans la durée, diminution d'autant plus considérable, qu'elle a lieu dans le voisinage de la limite de la stabilité; par conséquent, si l'on pouvait faire en sorte que l'allongement dont il s'agit n'existât pas, la durée totale se trouverait très notablement accrue.

Ainsi, la suppression de l'action directe du contact de la plaque ne produirait dans la durée totale qu'une diminution très légère; et l'annulation de l'allongement des divisions déterminerait, au contraire, un accroissement très notable dans cette même durée; si donc ces deux influences étaient éliminées à la fois, ou, en d'autres termes, si notre cylindre était libre sur toute sa surface convexe, la durée totale de sa transformation serait très notablement supérieure au résultat direct de l'observation.

Maintenant, la quantité que nous avons à considérer, c'est la durée partielle, et non la durée totale; mais, dans les mêmes circonstances, la première doit être peu inférieure à la seconde : car lorsque les filets vont se rompre, les masses entre lesquelles ils s'étendent approchent déjà de la forme sphérique; par conséquent, en vertu de la conclusion ci-dessus obtenue, nous devons admettre que la durée partielle dont nous nous occupons, c'est-à-dire celle qui se rapporterait au cas d'une liberté complète de la surface convexe du cylindre, excéderait encore notablement la durée totale observée, savoir $0'',4$.

En partant de cette valeur $0'',4$ comme constituant la limite inférieure correspondante à un diamètre de $2\text{mm},1$, la loi de la proportionnalité de la durée partielle au diamètre donnera immédiatement la limite inférieure correspondante à un autre diamètre quelconque: on trouvera, par exemple, que, pour dix millimètres, cette limite serait de

$\frac{0'',4 \times 10}{2,1} = 1'',9$, ou plus simplement de $2''$.

Si donc on suppose un cylindre de mercure d'un centimètre de diamètre, formé dans le vide ou dans l'air, assez long pour fournir plusieurs sphères, libre sur toute sa surface convexe, et d'une longueur telle que ses divisions prennent leur longueur normale, le temps qui s'écoulera depuis l'origine de la transformation de ce cylindre jusqu'à l'instant de la rupture des filets, surpassera notablement deux secondes.

§ 383. Revenons, pour un instant, à notre théorie de la génération des filets (§§376 à 378). Une conséquence immédiate de cette théorie, c'est que plus est grande la vitesse avec laquelle un étranglement s'approfondit, moins le filet doit être mince; or, ainsi qu'on ra vu plus haut, un étranglement doit s'approfondir d'autant plus vite qu'il est plus allongé; si donc, par suite de circonstances particulières, un étranglement appartenant soit à un cylindre, soit à une autre figure, est très allongé, le filet auquel il donnera lieu sera épais, et la principale des sphérules résultant de sa conversion pourra ne pas différer beaucoup en diamètre des deux masses extrêmes; il est même possible que, vu sa longueur, il fournisse plus d'une grosse sphérule; nous verrons un exemple remarquable de ces cas. Si, au contraire, un étranglement est très court, le filet sera très délié, et conséquemment la sphérule très petite, ou même il ne se formera ni filet ni sphérule; une expérience de M. Tait (§ 345) offre un exemple de ce dernier cas, et nous en indiquerons un autre au § 504.

En outre, un filet se transformant dès que le rapport entre sa longueur et son diamètre atteint la limite de stabilité des cylindres, il en résulte qu'un fil très court devra aussi être très mince pour se transformer, et que si, au moment où il vient d'être développé, il n'a pas un diamètre assez petit, il ne se transformera qu'après s'être suffisamment aminci; tandis qu'un filet très long, filet qui, d'après ce qui précède, est originairement épais, pourra se transformer en cet état. De là donc une seconde raison de la différence des résultats fournis respectivement par un étranglement court et par un étranglement allongé.

§ 384. Il n'est pas inutile de présenter ici, en résumé, l'ensemble des faits et des lois que les expériences décrites dans ce qui précède nous ont conduit à établir à l'égard des cylindres liquides instables.

1° Lorsque un cylindre liquide est formé entre deux bases solides, si le rapport de sa longueur à son diamètre surpasse une certaine limite dont la valeur exacte est comprise entre 3 et 3,6, le cylindre constitue une figure d'équilibre instable.

La valeur exacte dont il s'agit est ce que nous nommons *la limite de la stabilité du cylindre*.

2° Si le cylindre a une longueur considérable par rapport à son diamètre, il se convertit spontanément, par la rupture de l'équilibre, en une série de sphères isolées, égales en diamètre, également espacées, ayant leurs centres sur la droite qui formait l'axe du cylindre, et dans les intervalles desquelles sont rangées, suivant ce même axe, des sphérules de différents diamètres. Seulement chacune des bases solides retient adhérente à sa surface une portion de sphère.

3° La marche du phénomène est la suivante: le cylindre commence par se renfler graduellement sur des portions de sa longueur situées à égale distance les unes des autres, tandis qu'il s'amincit dans les portions intermédiaires, et la longueur des renflements ainsi formés est égale ou à fort peu près à celle des étranglements; ces modifications continuent à se prononcer de plus en plus, en s'effectuant avec une vitesse accélérée, jusqu'à ce que les milieux des étranglements soient devenus très minces; alors, à partir de chacun de ces milieux, le liquide se retire rapidement dans les deux sens, mais en laissant encore les masses réunies deux à deux par un filet sensiblement

cylindrique; puis celui-ci éprouve les mêmes modifications que le cylindre; seulement il ne s'y forme en général que deux étranglements, qui comprennent, par conséquent, entre eux un renflement; chacun de ces petits étranglements se convertit à son tour en un filet plus délié, qui se brise en deux points et donne naissance à une sphérule isolée très petite, tandis que le renflement ci-dessus se transforme en une sphérule plus grande; enfin, après la rupture de ces derniers filets, les grosses masses prennent complètement la forme sphérique. Tous ces phénomènes s'accomplissent d'une manière symétrique par rapport à l'axe, de sorte que, pendant leur durée, la figure ne cesse pas d'être de révolution.

4° Nous nommons *divisions* d'un cylindre liquide, les portions de ce cylindre dont chacune doit fournir une sphère, soit que nous considérions par la pensée ces portions dans le cylindre même, avant qu'elles aient commencé à se dessiner, soit que nous les prenions pendant la transformation, c'est-à-dire pendant que chacune d'elles se modifie pour arriver à la forme sphérique. La longueur d'une division mesure, par conséquent, la distance constante qui, pendant la transformation, se trouve comprise entre les cercles de gorge de deux étranglements voisins.

Nous nommons, en outre, *longueur normale des divisions*, celle que prendraient les divisions si le cylindre auquel elles appartiennent avait une longueur infinie.

Dans le cas d'un cylindre limité par des bases solides, les divisions prennent aussi la longueur normale lorsque la longueur du cylindre est égale au produit de cette même longueur normale par un nombre entier ou bien par un nombre entier plus un demi.

Alors, si le second facteur est un nombre entier, la transformation se dispose de telle manière, que, pendant son accomplissement, la figure se termine d'un côté par un étranglement et de l'autre par un renflement; si le second facteur est composé d'un nombre entier plus un demi, la figure se termine de chaque côté par un renflement.

Quand la longueur du cylindre ne remplit ni l'une ni l'autre de ces conditions, les divisions prennent la longueur la plus approchée possible de la longueur normale, et la transformation adopte celle des deux dispositions ci-dessus la plus convenable pour atteindre ce but.

5° Pour un cylindre d'un diamètre donné, la longueur normale des divisions croît avec les résistances qui gênent la transformation; elle varie donc, mais sans doute assez faiblement, avec la nature du liquide, les viscosités, tant intérieure que superficielle, de celui-ci constituant des résistances. S'il y a une résistance extérieure, telle que le contact de la surface convexe du cylindre avec un plan solide, cette résistance augmente conséquemment aussi la longueur normale des divisions. Dans tous les énoncés qui suivent, nous prendrons le cas le plus simple, savoir celui de l'absence de toute résistance extérieure; en d'autres termes, nous supposerons toujours les cylindres dans le vide ou dans l'air, et libres sur toute leur surface convexe.

6° Deux cylindres différents en diamètre, mais formés du même liquide, et ayant des longueurs telles que les divisions prennent dans chacun d'eux leur longueur normale, se divisent d'une manière semblable, c'est-à-dire que les longueurs normales respectives des divisions sont entre elles comme les diamètres de ces cylindres.

En d'autres termes, la nature du liquide ne changeant pas, la longueur normale des divisions d'un cylindre est proportionnelle au diamètre de celui-ci.

Il en est de même, par conséquent, du diamètre des sphères isolées dans lesquelles se convertissent les divisions normales, et de la longueur des intervalles qui séparent ces sphères.

7° Par suite des viscosités intérieure et superficielle, le rapport entre la longueur normale des divisions et le diamètre du cylindre surpasse toujours la limite de la sta-

bilité. Il se réduirait sans doute à cette limite même si le liquide était exempt de toute viscosité.

8° On peut adopter 4 comme valeur moyenne de ce rapport dans les différents liquides. D'après cela, on a, pour la valeur approximative probable du rapport entre le diamètre des sphères isolées qui résultent de la transformation et le diamètre du cylindre, le nombre 1,82; et, pour celle du rapport entre la distance de deux sphères voisines et ce même diamètre, le nombre 2,18.

9° Le temps qui s'écoule depuis l'origine de la transformation jusqu'à l'instant de la rupture des filets, est exactement ou sensiblement proportionnel au diamètre du cylindre.

10° Pour un même diamètre, et les divisions ayant toujours leur longueur normale, la valeur absolue du temps dont il s'agit varie avec la nature du liquide.

11° Dans le cas du mercure, et pour un diamètre d'un centimètre, cette valeur absolue est notablement supérieure à deux secondes.

12° Lorsque un cylindre est formé entre deux bases solides suffisamment rapprochées pour que le rapport de la longueur du cylindre au diamètre soit compris entre une fois et une fois et demie la limite de la stabilité, la transformation ne produit qu'un seul étranglement et un seul renflement; on n'obtient alors pour résultat final, que deux portions de sphères inégales en volume et en courbure, respectivement adhérentes aux bases solides, plus des sphérules interposées.

§ 385. Nous venons d'étudier expérimentalement ce qui concerne la stabilité des cylindres liquides; passons au caténoïde.

On a vu (§ 60) que le caténoïde partiel de hauteur maxima, quand on le réalise, au sein du liquide alcoolique, avec une masse d'huile pleine, est toujours parfaitement stable, et que cependant on doit le regarder comme étant à sa limite de stabilité. Nous allons, comme je l'ai annoncé (§ 111), éclaircir cette difficulté.

Pour cela, commençons par décrire, avec leurs curieuses particularités, les expériences relatives à la recherche de ce caténoïde maximum. Rappelons d'abord ce que nous avons déjà dit (§ 62), savoir: que le diamètre extérieur des anneaux était de 71mm; que, dans toutes les expériences dont il s'agit, après avoir formé un cylindre entre ces anneaux, on enlevait graduellement de l'huile à la masse; enfin qu'on interrompait de temps à autre l'exhaustion, pour observer la figure. Voici maintenant les résultats :

1re EXPÉRIENCE. Distance des anneaux, 55mm. On réduit par degrés à une fraction de millimètre la flèche des calottes sphériques qui constituent les bases; alors, pendant une interruption de l'épuisement, un phénomène singulier se produit : la figure éprouve une petite modification spontanée; la convexité des bases augmente rapidement, jusqu'à ce que la flèche reprenne une valeur d'environ 2mm,5, et par conséquent l'étranglement formé entre les anneaux s'amincit quelque peu, puis tout demeure parfaitement stationnaire. En absorbant encore de l'huile avec ménagement, la flèche s'accroît jusqu'à 3mm peu près; enfin, à la suite d'une nouvelle absorption, la figure se désunit à la manière ordinaire par le milieu de l'étranglement.

2me EXPÉRIENCE. Distance des anneaux, 49mm. Les bases finissent par perdre sensiblement toute courbure, puis il y a, comme précédemment, transformation spontanée: les bases redeviennent légèrement convexes, avec une flèche d'environ 1mm. Une nouvelle absorption amène la désunion.

3me EXPÉRIENCE. Distance des anneaux, 47mm. Les bases paraissent encore s'aplanir tout à fait, et la figure persiste dans cet état. Des absorptions ultérieures semblent d'abord n'avoir d'autre effet que d'approfondir l'étranglement, sans que les bases cessent de se montrer planes; puis une petite convexité se reforme, mais non plus

spontanément: elle naît et augmente au fur et à mesure que l'on épuise; lorsque la flèche est à peu près de 1mm,5, la désunion s'effectue.

4^{me} EXPÉRIENCE. Distance des anneaux, 45mm. Les bases deviennent d'abord planes, puis légèrement concaves La flèche de cette concavité croît jusqu'à 2mm approximativement, puis on observe de nouveau une transformation spontanée la concavité se change en une convexité, dont la flèche est de près d'un millimètre. L'action de la seringue, détermine ensuite la désunion.

5^{me} EXPÉRIENCE. Distance des anneaux, 43mm. Les bases sont rendues planes, puis concaves, et la flèche de la concavité atteint graduellement 4mm ou 5mm; enfin la figure se désunit.

§ 386. Voyons ce que nous apprennent ces expériences. En premier lieu, il n'est pas facile, remarquons-le, de juger du point précis où les bases de la figure sont rendues planes, une courbure extrêmement faible échappant à la vue. De là naît quelque incertitude dans la détermination de la hauteur limite du caténoïde; heureusement les particularités que nous avons signalées fournissent un moyen d'appréciation plus exact.

Dans la quatrième expérience, on passe nécessairement par des bases planes, puisque la courbure, de convexe qu'elle était, devient graduellement concave par le progrès de l'absorption du liquide; mais en est-il de même dans la deuxième et dans la troisième, où l'on a paru arriver aussi à des plans? Essayons d'éclaircir cette question. La première, la deuxième et la quatrième expérience ont cela de commun qu'il s'y est produit une petite modification ou transformation spontanée de la figure, tandis que dans la troisième ce phénomène n'a pas eu lieu; et cette modification a été en décroissant de la première à la deuxième, pour disparaître dans la troisième et reparaitre dans la quatrième. On doit croire, d'après cela, que la troisième expérience forme une sorte de passage en deçà et au delà duquel se manifestent les petites transformations spontanées; mais l'effet s'est montré, dans la première expérience, lorsque les bases avaient encore une courbure visible, et, dans la quatrième, lorsqu'elles en avaient pris une en sens inverse; il est donc bien probable que, dans la deuxième, au moment où l'on a vu naître la transformation spontanée, les bases conservaient encore une courbure réelle, quoi que trop faible pour être distinguée, et que c'est seulement dans la troisième, où la distance des anneaux était de 47 millimètres, que l'on a atteint des bases tout à fait planes. Si, dans cette troisième expérience, les bases jugées planes ont paru ne commencer à perdre cet état qu'après l'absorption d'une quantité très notable de liquide, cela tient évidemment à la difficulté mentionnée plus haut de distinguer nettement le point où la courbure est annulée.

Ainsi, avec nos anneaux de 71 millimètres de diamètre, on peut admettre que la distance de 47 millimètres diffère très peu de celle pour laquelle on commence à obtenir des bases rigoureusement planes, et 47 est sensiblement les $\frac{2}{3}$ de 71; c'est de cette manière qu'à l'aide de l'expérience seule effectuée sur un caténoïde plein, j'ai trouvé $\frac{2}{3}$ pour la valeur très approchée du rapport entre la hauteur du caténoïde limite et le diamètre des bases.

§ 387. En second lieu, appelons l'attention sur les petites transformations spontanées considérées en elles-mêmes. Jusqu'à présent, quand nous voyions une de nos figures liquides se transformer, et passer ainsi d'un équilibre instable à un équilibre stable, l'altération était profonde, la masse se séparait en deux ou plusieurs parties, et le résultat final du phénomène se composait toujours de sphères ou de portions de sphères; ici rien de semblable: l'altération est petite, la masse ne se désunit pas, et le résultat final est une figure qui s'éloigne peu de la première, du moins dans la portion réalisée, et qui peut être de la même nature. Dans la première expérience, par exemple,

un onduloïde partiel instable se transforme en un autre onduloïde peu différent, et il en est sans doute de même dans la deuxième.

En outre, ce qui est plus remarquable encore, la comparaison des deux premières expériences semble indiquer que l'onduloïde instable et l'onduloïde stable dans lequel il se convertit se rapprochent indéfiniment l'un de l'autre à mesure que la distance des anneaux est plus voisine de la hauteur maxima du caténoïde.

Ces faits nous donnent la clef de la difficulté relative à la stabilité du caténoïde limite plein. Lorsque, les anneaux étant à la distance qui correspond à ce caténoïde et un cylindre étant formé entre eux, on fait agir la petite seringue, la figure devient d'abord, nous le savons, un onduloïde qui, en va par suite de l'absorption, tend progressivement vers le caténoïde; mais la troisième expérience nous montre, de plus, que si, après avoir atteint cette, limite, on continue l'opération, la figure redevient insensiblement un onduloïde qui, au fur et à mesure de l'épuisement, s'éloigne de ce même caténoïde. Si donc le caténoïde partiel de plus grande hauteur constitue le passage entre les caténoïdes partiels stables et les caténoïdes partiels instables, il constitue, d'autre part, le passage entre une suite continue d'onduloïdes stables et une autre suite continue d'onduloïdes également stables. Telle est évidemment la raison de la stabilité prononcée du caténoïde partiel de plus grande hauteur réalisé à l'état plein; aussi, comme nous l'avons vu (§§111 et 222), quand on réalise le caténoïde à l'état laminaire, et qu'ainsi on rend impossible la formation de toute autre figure, il perd sa stabilité dès qu'on lui donne la hauteur maxima.

Cette explication laisse cependant encore quelque obscurité sur l'idée d'une figure à la fois très stable et à sa limite de stabilité; je vais donc la rendre plus complète. Ainsi que je viens de le faire remarquer, il peut arriver, dans certains cas, que la figure stable vers laquelle marche une figure instable qui se déforme spontanément, soit de plus en plus rapprochée de celle-ci à mesure qu'on diminue la distance des bases, et se confonde enfin avec cette figure instable pour une valeur déterminée de la distance en question, de manière qu'alors la figure est nécessairement stable; mais elle est réellement à sa limite de stabilité, en ce sens que si l'on essaie de la réaliser sur une portion plus étendue de sa ligne méridienne, elle ne se maintiendra pas. Seulement la nouvelle forme qu'elle prendra différera d'autant moins de la première que celle-ci dépassera moins la limite, en sorte que si l'on a été à peine au delà de cette limite, le changement de forme sera très minime.

Tel est sans doute le cas du caténoïde; si, avec une masse pleine, on parvenait à en réaliser un dont la chaînette méridienne s'étendît au delà des points correspondants à la hauteur maxima, il constituerait le plus rentré des deux caténoïdes possibles entre les mêmes bases, et conséquemment il serait instable (§§58 et 60); et l'on peut conclure de la 4^{me} et de la 5^{me} expérience du § 385, que sa déformation spontanée le convertirait en un nodoïde ou en un onduloïde, mais ce changement de forme serait d'autant plus petit que le caténoïde excéderait moins la limite en question; enfin, s'il est à cette limite même, il n'y aura pas de changement du tout, et la figure sera stable. Nous verrons ci-après un second exemple du même genre.

§ 388. Arrivons à l'onduloïde. Les conditions de stabilité de cette figure sont essentiellement différentes suivant que son milieu est occupé par un étranglement ou par un renflement.

Dans le premier cas, la limite de stabilité n'a rien d'absolu : quand le rapport entre la distance et le diamètre des bases est assez grand, et que, par l'exhaustion graduelle de la masse, on approche du point où la figure se désunirait spontanément, celle-ci présente (§ 55), outre l'étranglement, deux portions adjacentes de renflements; dans

ce cas donc la ligne méridienne de l'onduloïde partiel à sa limite de stabilité s'étend beaucoup au delà des deux points d'inflexion; mais il n'en est plus de même pour un intervalle moindre des bases, comme dans les onduloïdes voisins du caténoïde limite; dans ces derniers, la ligne méridienne est loin d'atteindre les points d'inflexion; en effet, le caténoïde peut (§ 61) être considéré comme un onduloïde dans lequel les points d'inflexion de la ligne méridienne sont situés à l'infini, et conséquemment, dans un onduloïde partiel très rapproché du caténoïde limite, onduloïde qui, d'après les expériences du § 385, est lui-même très près de sa limite de stabilité, les points d'inflexion doivent être situés fort loin au delà des bases de la figure.

Heureusement les choses sont toutes différentes dans le second cas, c'est-à-dire pour un onduloïde partiel dont le milieu est un renflement: alors la limite de la stabilité paraît pouvoir s'exprimer d'une manière très simple et toujours la même; en effet, l'expérience conduit (§ 52) à admettre que la figure liquide est à sa limite de stabilité lorsqu'elle se termine aux cercles de gorge de deux étranglements consécutifs, ou, en d'autres termes, lors qu'elle est exactement composée d'un renflement entre deux demi étranglements. Nous reviendrons sur ce point (§ 409).

§ 389. Reste encore, quant aux figures d'équilibre de révolution, ce qui se rapporte à la stabilité du nodoïde. Mes procédés réalisent, on l'a vu, soit la portion engendrée par une partie ou par la totalité d'un noeud de la ligne méridienne (§§ 63 à 68), soit la portion engendrée par un arc de cette ligne tournant sa convexité vers l'extérieur (§ 71). Nous aurions donc à chercher la limite de la stabilité dans ces deux cas de la figure partielle.

Dans le premier, l'expérience nous a montré (§ 65) la stabilité s'étendant au moins depuis la circonférence engendrée par le sommet du noeud jusqu'aux deux circonférences où les éléments sont perpendiculaires à l'axe de révolution; cependant il y a nécessairement une catégorie de noeuds pour lesquels la stabilité s'arrête en deçà des dernières circonférences ainsi caractérisées. En effet, concevons un nodoïde très voisin du caténoïde (§ 77), et considérons en particulier l'un des noeuds de sa ligne méridienne; ce noeud sera, nous le savons, très allongé, de sorte que les points où les tangentes sont perpendiculaires à l'axe de révolution se trouveront à une distance de celui-ci très grande par rapport à celle du sommet du noeud et par rapport à l'intervalle compris entre eux. Si donc on pouvait réaliser entre deux disques la portion de figure engendrée par la partie d'un semblable noeud allant du sommet jusqu'aux points en question, ces disques seraient très rapprochés relativement à leur rayon, et la figure étranglée pénétrerait fort avant dans leur intervalle. Mais, entre deux disques ainsi placés, mes procédés ne donnent jamais qu'un étranglement dont la ligne méridienne diffère peu d'une demi circonférence, comme le montrent les fig. 36 et 37 (§ 65). Entre deux disques suffisamment rapprochés, il y a conséquemment deux figures étranglées théoriquement possibles, partant l'une et l'autre des bords des disques où leurs lignes méridiennes respectives ont leurs éléments couchés sur les rayons de ces disques, et pénétrant inégalement entre ces mêmes disques; or, comme la moins rentrée est toujours la seule qui se réalise, j'en conclus que la plus rentrée serait instable, c'est-à-dire que, pour celle-ci, la stabilité cesse en deçà des circonférences où les éléments sont perpendiculaires à l'axe.

D'après cela, on doit, me semble-t-il, admettre comme très probable ce qui suit:

1° Dans la figure la moins rentrée, la limite de la stabilité est au delà des circonférences situées aux bords des disques, de sorte que, pour réaliser cette figure jusque près de sa limite, il faut un procédé différent. Celui du § 67 permet de réaliser, en relief, la portion engendrée par la totalité d'un noeud; à la vérité, la figure n'est pas stable,

mais elle persiste assez longtemps pour qu'on puisse en conclure que, si elle n'est pas à sa limite de stabilité, elle en est du moins très voisine: il n'est pas douteux que si, au lieu d'un anneau en simple fil de fer, on employait une bande de fer peu large et courbée cylindriquement, de manière que la ligne méridienne de la figure liquide n'atteignît pas la pointe du noeud, bien que s'en rapprochant, cette figure, qui dépasserait de beaucoup les circonférences dont il s'agit, serait stable²³⁷. Dans la figure la plus rentrée, au contraire, la limite de la stabilité est en deçà de ces mêmes circonférences.

2° A mesure que l'écartement des disques est plus grand, les deux figures se rapprochent l'une de l'autre, et il en est de même de leurs limites respectives de stabilité; enfin, pour une certaine valeur maxima de l'écartement, ces deux figures coïncident, ainsi que leurs limites de stabilité, qui se trouvent alors aux bords mêmes des disques. Je suis porté à croire que ce dernier cas est celui du nodoïde dont la ligne méridienne est engendrée par le roulement d'une hyperbole équilatère, et je pense, en outre, qu'au delà de l'écartement en question, il n'y a plus de nodoïde étranglé possible entre les mêmes disques.

Si ces conjectures sont vraies, le nodoïde étranglé aurait, dans un cas particulier simple, une limite de stabilité nettement définie.

§ 390. Dans le second cas de réalisation, c'est-à-dire dans celui où la figure est engendrée par un arc convexe vers l'extérieur, on a vu (§§71 et 114) qu'en rapprochant graduellement les deux disques, on atteint un point au delà duquel la figure, soit pleine, soit laminaire, perd sa forme de révolution, la masse d'huile ou la lame se portant davantage d'un côté de l'axe du système; on a vu aussi qu'à la plus petite distance des disques où la figure conserve sa régularité, les éléments de l'arc méridien aux points où il aboutit aux deux disques, semblent être, ou à fort peu près, perpendiculaires à l'axe. On pourrait présumer, d'après cela, que la limite de stabilité du nodoïde partiel renflé correspond au cas où les éléments extrêmes de l'arc méridien sont perpendiculaires à l'axe; mais j'ai cherché à décider la question par de nouvelles expériences.

On a d'abord mesuré exactement le diamètre des disques; il était, pour l'un, de 71mm,38, et, pour l'autre, de 71mm,82, moyenne 71mm,60. On a ensuite fait adhérer à l'ensemble de ces deux disques, au sein du liquide alcoolique, une masse d'huile suffisante, puis on a abaissé graduellement le disque supérieur, et on l'a arrêté au point au delà duquel la figure renflée commençait à perdre sa forme de révolution. Cela fait, on a mesuré au cathétomètre l'intervalle des deux disques, ou plutôt la distance comprise entre la face supérieure du disque supérieur et la face inférieure du disque inférieur, puis que c'était des bords de ces deux faces que partait la surface libre de la figure liquide; on a effectué cette opération de deux côtés opposés de l'axe, et l'on a trouvé les deux valeurs 63mm,95 et 64mm,08, moyenne 64mm,01; enfin, en disposant le cathétomètre horizontalement, on a mesuré le diamètre équatorial de la figure, et l'on a obtenu 118mm,67.

Or, en prenant comme données le diamètre des disques et le diamètre équatorial de la masse, M. Lamarle a bien voulu calculer pour moi, au moyen des fonctions elliptiques (§ 84), la distance qui aurait dû exister entre les bords solides d'où partait la figure liquide pour qu'à ces bords les éléments fussent perpendiculaires à l'axe, et il a trouvé ainsi 51mm,9, valeur qui n'est que les huit dixièmes environ de la distance mesurée 64mm,01.

On a répété ensuite l'expérience avec une masse d'huile moindre. Ici la distance des

²³⁷ En résumant ma 4^{me} Série dans les ANN. DE CHIM. ET DE PHYS. DE PARIS (3^{me} série, t. LIII), j'ai dit, page 37, que la figure obtenue dans un anneau en fil de fer, est à sa limite de stabilité; cette assertion est évidemment trop positive.

disques était, en moyenne, 39mm,63, et le diamètre équatorial de la figure 101mm,17; la valeur de la distance des disques déduite du calcul, pour le cas de l'horizontalité réelle des éléments extrêmes, était 32mm,10, qui constitue aussi les huit dixièmes de la valeur mesurée.

Il suit évidemment de ce constant désaccord entre l'apparence des figures et les résultats du calcul, que, dans ces figures, les éléments extrêmes de l'arc méridien faisaient encore, en réalité, un angle notable avec les prolongements des rayons des disques, et que si, au simple aspect, on pouvait croire cet angle nul, cela tenait à la grande difficulté d'une semblable appréciation. On doit, je pense, conclure de là que, dans le nodoïde partiel renflé, la limite de la stabilité est en deçà des circonférences où les éléments sont perpendiculaires à l'axe.

§ 391. Dans les expériences que je viens de décrire, quand, après avoir abaissé le disque supérieur jusqu'à la dernière limite où la figure liquide se maintient régulière, on abaisse encore ce même disque d'une quantité très petite, le transport latéral de la masse est aussi très petit, et reste tel tant que le disque demeure dans la même position; il augmente par un abaissement ultérieur, et se montre d'autant plus prononcé que l'abaissement est plus grand.

Le nodoïde partiel renflé nous offre donc un nouvel exemple d'une figure liquide permanente bien qu'étant à sa limite de stabilité, et le phénomène s'explique comme à l'égard du caténoïde plein : c'est que la figure stable dans laquelle ce nodoïde se convertirait spontanément s'il était au delà de sa limite, est d'autant plus rapprochée que le nodoïde est supposé plus près de cette limite, et coïncide enfin avec lui à la limite même.

Ajoutons une dernière remarque: lorsque le cylindre, l'onduloïde étranglé, l'onduloïde renflé, le caténoïde et le nodoïde étranglé atteignent ou dépassent leur limite de stabilité, et, par suite, s'altèrent spontanément, le phénomène s'accomplit sans que la figure liquide perde sa forme de révolution, et la figure stable résultante est encore de révolution autour du même axe; mais, ainsi qu'on vient de le voir, le nodoïde renflé fait exception: pendant sa déformation spontanée, la figure se montre dissymétrique, et elle demeure telle après l'achèvement du phénomène. Un autre exemple de dissymétrie s'était déjà présenté à nous dans la déformation spontanée d'un noeud de nodoïde réalisé en relief dans un anneau en fil de fer (§ 67).

§ 392. Dans cette recherche des limites de stabilité des figures d'équilibre de révolution, nous avons toujours supposé la figure terminée à deux sections perpendiculaires à l'axe et égales en diamètre. Mais il est clair qu'on pourrait adopter d'autres terminaisons et qu'alors les limites de Stabilité seraient différentes : on pourrait, par exemple, prendre encore pour bases de la figure deux sections perpendiculaires à l'axe, mais leur donner, sauf dans le cas du cylindre, des diamètres inégaux. On a vu (§ 91) que M. Lindelöf a traité analytiquement, sous ce rapport, la question du caténoïde; mais j'étais arrivé auparavant à un résultat remarquable que j'avais fait connaître dans ma 11^{me} Série; le voici: quand on prend le cercle de gorge pour l'une des terminaisons, le caténoïde n'a plus de limite de stabilité, c'est-à-dire que la seconde base peut être aussi loin de la première qu'on le veut, sans que la figure tende à s'altérer spontanément.

Pour le démontrer, concevons un onduloïde partiel terminé d'un côté au cercle de gorge d'un étranglement, et, de l'autre côté, à l'équateur de l'un des deux renflements entre lesquels, dans la figure indéfinie, cet étranglement serait compris; l'onduloïde ainsi formé sera très stable, puisque, en conservant la première base, il faudrait, pour atteindre la limite de stabilité, reculer la seconde jusqu'au cercle de gorge suivant (§ 52). Imaginons maintenant que, la première base, savoir le cercle de gorge, demeurant con-

stante, on fasse varier l'onduloïde en question de manière qu'il converge graduellement vers le caténoïde; notre seconde base, c'est-à-dire la section équatoriale du renflement, ira en croissant et en s'éloignant de la première, et la figure conservera évidemment sa stabilité; enfin, à la limite de ces variations, ou, en d'autres termes, quand la section dont il s'agit sera infiniment grande et infiniment éloignée, l'onduloïde, qui n'aura pu perdre sa stabilité, sera un demi caténoïde s'étendant à l'infini à partir du cercle de gorge; si donc on prend où l'on veut, sur ce demi caténoïde, une section perpendiculaire à l'axe, et qu'on en fasse la seconde base de la figure, cette figure sera toujours nécessairement stable.

Afin de vérifier cette déduction, j'ai pris, pour la seconde base, l'anneau en fil de fer de 20 centimètres de diamètre, employé dans l'expérience du § 186bis et, pour le cercle de gorge, un autre anneau, dont le diamètre n'était que de 3,5 centimètres; celui-ci était porté par une fourche dont la queue était fixée sous un bras horizontal mobile le long d'une tige verticale. On a mouillé de liquide glycérique ce petit anneau, puis on a produit une lame du même liquide dans le grand, et l'on a posé ce dernier sur ses pieds, de façon que la lame fût horizontale; le support qui soutenait le petit anneau a été ensuite placé de manière que ce petit anneau fût au-dessus du grand et que les centres de tous deux fussent sur une même verticale; on a abaissé alors le petit anneau jusqu'à ce qu'il vînt se mettre en contact avec la lame, puis on l'a soulevé graduellement. La lame adhèrent à la fois aux deux anneaux, a pris nécessairement la forme d'une portion de caténoïde, et l'on a pu ainsi arriver à rendre d'abord vertical l'élément de la chaînette méridienne qui aboutissait au petit anneau, puis à le faire rentrer vers l'axe d'une manière visible, de sorte que la figure présentât un commencement d'étranglement; en d'autres termes; on a pu non seulement atteindre le demi caténoïde, mais même le dépasser un peu, sans que la figure perdît sa stabilité.

Ce dernier résultat est d'accord, autant qu'on peut en juger en l'absence de mesures précises, avec les nombres du tableau du § 91. On voit, en effet, par ce tableau, que, quel que soit le rapport des diamètres des bases, le caténoïde, à sa limite, a toujours un cercle de gorge; mais on voit, en même temps, qu'à mesure que le diamètre de la base supérieure diminue, celui du cercle de gorge s'en rapproche, de telle sorte que si le diamètre de la base supérieure n'est, comme dans mon expérience, que les 0,17 de celui de la base inférieure, l'étranglement doit être assez légèrement accusé. On n'a pu, d'ailleurs, observer cet étranglement qu'un peu en deçà de la hauteur limite du caténoïde, puisque, à cette limite même, la figure se désunissait.

Dans l'article où il donne le tableau dont il s'agit, M. Lindelöf montre que ses formules établissent, comme mon raisonnement, l'absence de limite de stabilité à l'égard du caténoïde dont l'une des bases est le cercle de gorge.

Les nombres du tableau, du moins ceux de la 2^{me} colonne, sont susceptibles de vérifications expérimentales précises; seulement elles ne seraient pas sans difficultés, car il faudrait trouver le moyen de rendre les plans des deux anneaux exactement parallèles et de disposer rigoureusement les deux centres sur une même perpendiculaire à ces plans.

§ 393. Les figures d'équilibre qui ne sont pas de révolution ont aussi, et pour la plupart sans nul doute, leurs limites respectives de stabilité. Seulement il faut, pour chacune d'elles, faire également une convention à l'égard du système solide dans lequel on la comprend.

Je citerai d'abord, comme exemple, celle des surfaces mentionnées dans le § 137, que j'ai réalisée à l'état laminaire; ainsi qu'on l'a vu (§ 138), on obtient une portion stable de cette surface dans le système solide que j'ai choisi, quand la hauteur de celui-

ci est égale à sa largeur; mais il n'en est plus de même quand la hauteur est quadruple de la largeur.

Je citerai encore l'hélicoïde de M. Lamarle que j'ai réalisé avec de l'huile dans le liquide alcoolique (§ 132). Il était compris, on se le rappelle, entre des sections perpendiculaires à l'axe de la figure; or il montrait une stabilité bien décidée quand les sections solides étaient distantes d'un quart de spire; mais on ne parvenait plus à le former entre deux sections éloignées d'une demi spire, ce qui indique qu'avec cette longueur il est instable.

J'étais porté à croire que l'hélicoïde gauche à plan directeur n'a pas de limite de stabilité, du moins lors qu'il est compris, à l'état laminaire, dans un système solide composé d'une portion de l'axe et d'une hélice rattachée à celui-ci par des portions droites (§ 130); en effet, celui que j'ai réalisé avait deux spires complètes, et il était parfaitement stable; or, d'après une remarque de M. Schwarz²³⁸, on démontre aisément l'exactitude de cette conjecture, en partant d'un résultat connu du calcul des variations.

²³⁸Voir l'article inscrit au § 508 sous le n° 37.

CHAPITRE X.

Stabilité des figures d'équilibre; étude théorique, et vérifications expérimentales.

§ 394. Dans le chapitre précédent, nous n'avons eu recours qu'à l'expérience; voyons maintenant ce que la théorie peut nous apprendre à l'égard de la stabilité de nos figures.

Quelques mois après la publication de ma 2^{me} Série, où j'avais exposé l'étude expérimentale de la stabilité du cylindre, M. Hagen a essayé²³⁹ d'appliquer le calcul à la recherche de la limite relative à cette figure. Pour cela, supposant un cylindre liquide dont la forme est très légèrement altérée de manière qu'il présente une suite de renflements et d'étranglements égaux et extrêmement peu prononcés, M. Hagen admet que les arcs méridiens de ces renflements et de ces étranglements peuvent, sans erreur sensible, être assimilés à des arcs de cercle. Il calcule, dans cette hypothèse, les pressions capillaires exercées aux sommets respectifs d'un arc convexe et d'un arc concave, et enfin il cherche la limite de la stabilité en partant de la considération que la différence des deux pressions ci-dessus doit être positive d'un côté de cette limite, et négative de l'autre côté; il arrive ainsi à la valeur $2^{3/2}$ c'est-à-dire au nombre 2,8284.

§ 395. Dans un article²⁴⁰ en réponse à cette Note, j'ai fait voir que la méthode employée par M. Hagen, bien qu'ingénieuse, ne pouvait donner qu'une valeur plus ou moins éloignée de la véritable, parce que les arcs méridiens des renflements et des étranglements ne sont pas des arcs de cercle, et qu'en substituant à ces derniers des arcs de sinusöide, évidemment plus rapprochés de ceux de la courbe réelle, on obtient un résultat notablement différent.

J'ai annoncé alors que j'étais parvenu, à l'aide d'une méthode rigoureuse, à la valeur exacte de la limite dont il s'agit, et que cette valeur exacte est la quantité π , c'est-à-dire le rapport de la circonférence au diamètre, ou 3,1416. Je vais maintenant faire connaître cette méthode; le principe sur lequel elle repose m'a été fourni par M. Lamarle.

§ 396. Supposons un cylindre d'huile horizontal réalisé entre deux disques au sein du mélange alcoolique, et assez court pour être stable, sans être cependant trop en deçà de la limite. Si, en poussant légèrement le liquide en plus grande quantité vers l'un des disques au moyen du bec de la petite seringue, on détermine la formation artificielle d'un renflement et d'un étranglement, et si cette modification de la figure ne dépasse pas un certain degré, la masse abandonnée ensuite à elle-même reprend spontanément la figure cylindrique initiale. Mais si l'altération excède le degré dont il s'agit, elle progresse ensuite spontanément, et la transformation s'achève.

Or, au degré précis d'altération qui sépare les tendances à ces deux effets opposés, la masse doit évidemment être indifférente à l'une et à l'autre; il doit donc y avoir là un état d'équilibre, bien que cet équilibre soit instable; et comme la figure est alors encore de révolution et qu'elle se compose d'un renflement et d'un étranglement, elle forme nécessairement une portion d'onduloïde. En second lieu, puisque cet onduloïde partiel constitue le degré d'altération où va commencer la tendance spontanée à une altération plus profonde, il doit s'écarter d'autant moins de la figure initiale, c'est-à-dire du cylindre, que celui-ci est plus près de sa limite de stabilité. Enfin, lorsque le cylindre est à cette limite même, l'onduloïde partiel doit coïncider exactement avec lui,

²³⁹ *Ueber die Auflösung flüssiger Cylinder in Tropfen* (ANN. DE M. POGGENDORF, année 1850, vol. LXXXI p. 559).

²⁴⁰ *Ueber die Gränze der Stabilität eines flüssigen Cylinders* (Ibid., ibid., p. 566.)

puisque alors la plus faible trace d'un renflement et d'un étranglement doit suffire pour amener la transformation spontanée.

§ 397. Le principe ci-dessus étant admis, appliquons-y le calcul. Reprenons l'expression de la condition générale à laquelle doivent satisfaire les lignes méridiennes des figures d'équilibre de révolution, savoir (§ 36)

$$\frac{1}{M} + \frac{1}{N} = C$$

expression où M est le rayon de courbure et N la normale. Dans le cas du cylindre, la ligne méridienne étant une droite, M est partout infini, ce qui réduit la formule à $\frac{1}{N} = C$, d'où $N = \frac{1}{C}$; or comme la droite en question est parallèle à l'axe, la normale N est le rayon du cylindre engendré, d'où il suit que ce rayon est égal à $\frac{1}{C}$.

Rappelons-nous, en outre, que l'expression générale ci-dessus, mise sous la forme différentielle, peut s'intégrer une première fois (§ 84). Si l'on prend l'axe de révolution comme axe des x , cette intégrale, qui représente nos lignes méridiennes, devient:

$$\frac{y}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{Cy^2}{2} + C', \quad (8)$$

p désignant le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$, et C' étant la constante arbitraire introduite par l'intégration. S'il s'agit du cylindre, la tangente est nulle partout; faisant donc $p = 0$ et résolvant par rapport à y , on a:

$$y = \frac{1}{C} \pm \frac{1}{C} \sqrt{1 - 2CC'}.$$

Il est clair qu'ici y est le rayon du cylindre, et puisque ce rayon est simplement égal à $\frac{1}{C}$, la constante arbitraire C' doit être déterminée de manière à annuler le radical $\sqrt{1 - 2CC'}$, c'est-à-dire qu'il faut faire $C' = \frac{1}{2C}$.

Cela posé, concevons un cylindre réalisé entre deux disques de rayon $\frac{1}{C}$, et supposons la distance de ces disques telle que le cylindre soit en deçà de sa limite de stabilité, mais extrêmement près de celle-ci. Alors l'onduloïde partiel qui lui correspond s'en écartera à peine; en d'autres termes, les arcs méridiens du renflement et de l'étranglement seront presque confondus avec la droite $y = \frac{1}{C}$, et il en sera de même des arcs méridiens de tous les autres renflements et étranglements de la figure complète, c'est-à-dire infiniment prolongée au delà des disques. Dans cette circonstance, par conséquent, l'ordonnée y variera très peu sur toute l'étendue de la ligne méridienne, et la tangente p demeurera toujours fort petite.

Introduisons ces conditions dans l'équation [1], et, pour cela, transportons l'axe des x parallèlement à lui-même, au-dessus de sa position première, d'une quantité égale à $\frac{1}{C}$, de manière à le faire coïncider avec la génératrice du cylindre. Remplaçons donc y par $y + \frac{1}{C}$, et n'oublions pas que, dans l'équation transformée, y représentera l'ordonnée comptée à partir du nouvel axe des abscisses, de sorte que, dans toute la courbe, y demeurera, comme p , fort minime. Développons, en outre, le radical $\sqrt{1+p^2}$; nous pourrions négliger toutes les puissances de p supérieures à la deuxième, et nous aurons ainsi, au lieu du radical en question, la quantité $1 + \frac{1}{2}p^2$. Faisant donc ces substitutions, l'équation [1] deviendra, les réductions étant effectuées,

$$2C^2y^2 + C^2p^2y^2 + 2Cp^2y + (1 + 2CC')p^2 = 2(1 - 2CC'). \quad (9)$$

Enfin, à cause de la petitesse de y et de p , négligeons les termes du 4me et du 3me degré $C^2 p^2 y^2$ et $2Cp^2 y$, et l'équation se réduira ainsi à

$$2C^2 y^2 + (1 + 2CC')p^2 = 2(1 - CC'). \quad (10)$$

L'erreur que nous commettrons sera d'autant plus minime que l'onduloïde se rapprochera davantage du cylindre, et le résultat que nous tirerons de cette équation, pour le cas où l'onduloïde se confond avec le cylindre, sera rigoureusement exact.

Écrivant, dans cette même équation, $\frac{dy}{dx}$ au lieu de p , et résolvant par rapport à dx , il vient:

$$dx = \sqrt{\frac{1 + 2CC'}{2}} \cdot \frac{dy}{\sqrt{1 - 2CC' - C^2 y^2}},$$

ce qui donne, par l'intégration:

$$x = \frac{1}{C} \sqrt{\frac{1 + 2CC'}{2}} \cdot \arcsin \frac{Cy}{\sqrt{1 - 2CC'}}. \quad (11)$$

Je n'ajoute point de constante arbitraire, parce que je prends pour origine l'un des points où la courbe coupe l'axe des x , ce qui exige que l'équation soit satisfaite en y faisant à la fois $y = 0$ et $x = 0$.

Telle est donc l'équation approchée de la ligne méridienne de l'onduloïde en question, équation d'autant plus exacte que cet onduloïde est plus près de coïncider avec le cylindre. Cette même équation résolue par rapport à y devient:

$$\frac{\sqrt{1 - 2CC'}}{C} \sin C \sqrt{\frac{2}{1 + 2CC'}} \cdot x. \quad (12)$$

C'est l'équation d'une sinusoïde, et l'on voit que les points où, après avoir quitté l'origine, la courbe va de nouveau couper l'axe des abscisses, sont à des distances de l'origine successivement égales à

$$\frac{1}{C} \sqrt{\frac{1 + 2CC'}{2}} \cdot \pi, \quad \frac{1}{C} \sqrt{\frac{1 + 2CC'}{2}} \cdot 2\pi, \quad \text{etc.}$$

Or la seconde est évidemment la longueur d'une portion de l'onduloïde composée d'un renflement et d'un étranglement; en la désignant par L , nous aurons donc

$$L = \frac{1}{C} \sqrt{\frac{1 + 2CC'}{2}} \cdot 2\pi.$$

Lorsque l'onduloïde se confondra avec le cylindre, cette longueur sera, en vertu du principe du paragraphe précédent, celle qui correspond à la limite de la stabilité de ce cylindre, et elle sera alors rigoureusement exacte; or, quand la figure est devenue un cylindre, le rayon de celui est, comme on l'a vu, représenté par $\frac{1}{C}$, et l'on a en même temps, comme on l'a vu aussi, $C' = \frac{1}{2C}$; si donc on désigne le rayon par r , on aura $C = \frac{1}{R}$ et $C' = \frac{r}{2}$. Substituant ces valeurs dans l'expression de L , on obtient enfin, pour la longueur précise qui correspond à la limite de la stabilité du cylindre,

$$L = 2\pi r,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{L}{2r} = \pi.$$

Ainsi un cylindre liquide compris entre deux bases solides est exactement à sa limite de stabilité, quand sa longueur, ou l'intervalle de ses bases, est égale à sa circonférence, ou, ce qui revient au même, quand le rapport de sa longueur à son diamètre est égal à π .

Je ferai connaître plus loin une autre méthode au moyen de laquelle j'arrive, sans aucun calcul, au même résultat, en partant du principe de M. Delaunay (§ 82); mais je ne puis l'exposer qu'après ce qui concerne la limite de stabilité de l'onduloïde.

§ 398. Beer, dans le premier des deux Mémoires où il soumet au calcul une partie des résultats de ses expériences²⁴¹, parvient également à la quantité π ; voici de quelle manière. Supposant une masse liquide adhérente à un cylindre solide suffisamment long, il obtient nécessairement, pour ligne méridienne, celle d'une portion d'onduloïde, portion qui se compose d'un renflement et de deux demi étranglements. Il montre ensuite, à l'aide d'un artifice de calcul, que si l'on diminue progressivement le rayon équatorial de la figure, la distance des deux points extrêmes de la ligne méridienne converge vers une valeur égale à la circonférence du cylindre solide, valeur qu'elle atteint lorsque le rayon équatorial est égal à celui de ce cylindre, ou, en d'autres termes, lorsque la masse liquide est réduite à une couche infiniment mince sur la surface de ce même cylindre. Puis, après l'exposé d'un résultat qui ne se rapporte point au sujet actuel, vient un passage que je traduis ici, en avertissant le lecteur que Beer représente par 2 la distance ci-dessus.

«Concevons un cylindre d'huile infiniment long placé dans l'alcool dilué, et faisons-lui subir uniformément, dans toute sa longueur, une petite altération telle que la surface demeure *minimæ areæ*²⁴². Cette surface sera évidemment une surface de révolution dont la ligne méridienne ne se composera que de courbes égales de l'espèce considérée plus haut, se raccordant entre elles. Le cylindre acquiert ainsi une suite régulière d'étranglements alternant avec des renflements. Pour une déformation très petite, l'enfoncement et la saillie de ces étranglements et renflements sont également très petits, et le cylindre auquel les courbes en question seraient tangentes s'écarte aussi fort peu de la surface primitive de l'huile. De là résulte donc que la distance de deux étranglements avance d'autant plus vers la limite de $2y_4$ trouvée plus haut pour la surface originellement cylindrique, et conséquemment vers la valeur de la circonférence de cette dernière, que la déformation supposée est plus faible. La limite de $2y_4$, indépendante de la nature du liquide, n'est évidemment autre chose que la limite de la stabilité d'un cylindre liquide soustrait à la pesanteur, limite observée et mesurée par M. Plateau. Ce physicien a trouvé qu'en prenant pour unité le diamètre du cylindre, la limite dont il s'agit est comprise entre 3 et 3,6. M. Hagen est arrivé, par une voie théorique, à la valeur 2,828, à quoi M. Plateau oppose la remarque suivante: *Si l'on remplace le rayon de courbure qu'emploie M. Hagen par celui du sommet des arcs d'une sinusoïde, on obtient alors, pour valeur de la limite de la stabilité la quantité π* . Et, en effet, d'après ce qui précède, cette dernière quantité est la valeur exacte. »

Par l'expression: la distance de deux étranglements (*zweier Einschnürungen*, il faut entendre la distance des milieux de ceux-ci; et comme cet intervalle comprend un renflement et deux demi étranglements, il équivaut en longueur à l'ensemble d'un renflement et d'un étranglement; Beer a donc cherché de son côté, bien que par une méthode essentiellement différente de la mienne, ce que devient la longueur d'une portion d'onduloïde composée d'un renflement et d'un étranglement, lorsque cet on-

²⁴¹ Ueber die Oberflächen rotirender Flüssigkeiten im allgemeinen, insbesondere über den Plateau'schen Rotationsversuch (ANN. DE M. POGGENDORF, 1855, t. XCVI, pp. 1 et 210).

²⁴² On verra plus loin (§§413 et 418) que Beer n'emploierait plus aujourd'hui cette expression dans le cas dont il s'agit.

duloïde passe au cylindre; mais il regarde comme évident que cette même longueur est celle qui correspond à la limite de la stabilité du cylindre, et cependant on ne voit a priori aucune relation nécessaire entre la longueur d'une portion d'onduloïde, au moment où elle se confond avec le cylindre, et la stabilité ou l'instabilité de celui-ci. Il est bien vrai qu'un cylindre, à sa limite de stabilité, se modifie de manière à présenter une portion renflée et une portion étranglée; mais rien ne dit immédiatement qu'à l'origine de cette déformation, la figure appartienne à l'onduloïde; c'est un point qu'il fallait établir, ainsi que je l'ai fait dans le § 396; cette recherche de Beer est donc incomplète, elle demande une démonstration qu'il ne donne pas.

Dans son second travail²⁴³, il effectue la même détermination au moyen de son intégrale elliptique (§§84 et 85), mais il n'établit pas davantage la relation entre le résultat et la stabilité du cylindre.

§ 399. J'ai essayé, à l'aide des cylindres d'huile formés entre deux disques solides au sein du mélange alcoolique, de vérifier, par des expériences plus précises que celles des §§45 et 359, la valeur exacte π de la limite de stabilité du cylindre. Je vais rendre compte des résultats, mais auparavant je dois présenter ici quelques remarques sur la marche à suivre dans ce genre de recherche.

La limite de stabilité d'une figure d'équilibre constitue un passage graduel entre deux états différents de cette figure, et conséquemment l'expérience seule ne peut la déterminer d'une manière rigoureuse; mais elle peut conduire à deux valeurs assez rapprochées l'une de l'autre et telles que, pour la première, il y ait encore stabilité certaine, tandis que, pour la seconde, il y a déjà instabilité certaine. Si ces deux valeurs sont peu différentes, comme je l'ai supposé, leur moyenne donnera avec une grande approximation la vraie valeur de la limite.

J'ai employé cette méthode à l'égard du cylindre. Quand on n'est pas trop près de la limite, il y a deux caractères qui accusent nettement la stabilité ou l'instabilité de cette figure : si, le cylindre étant réalisé dans le voisinage de sa limite et conservant sa forme, on y produit artificiellement, en poussant l'huile à l'aide du bec de la seringue, un renflement et un étranglement peu prononcés, et que la figure reprenne ensuite d'elle-même sa forme première, il est évident qu'elle possède encore une stabilité réelle; d'autre part si, pendant qu'on essaie d'obtenir le cylindre, c'est-à-dire pendant que la masse d'huile est en excès et qu'on la diminue pour arriver à la forme cylindrique, la figure commence déjà à s'altérer spontanément avant que cette forme soit atteinte, on doit en conclure que le cylindre qu'on veut réaliser serait instable. La limite exacte se trouve donc entre les longueurs les plus rapprochées où ces deux effets sont encore respectivement observables.

§ 400. L'appareil dont j'ai fait usage consiste en deux disques verticaux en fer minces, de même diamètre, placés en regard, et dont l'un peut être graduellement rapproché ou éloigné de l'autre. Chacun d'eux est porté par un gros fil de fer implanté normalement au centre de sa face postérieure, et replié verticalement de haut en bas; l'extrémité inférieure de celui qui soutient le disque immobile est fixée à l'un des bouts d'une barre horizontale en fer à section carrée, et l'extrémité inférieure de celui qui soutient le disque mobile est fixée à un curseur qui glisse sans ballotement le long de cette barre. Une vis maintenue parallèlement à celle-ci; et qu'on peut faire tourner sur elle-même au moyen d'une manivelle, s'engage dans un écrou tenant au curseur; en faisant agir la manivelle dans un sens ou dans l'autre, on oblige ainsi le curseur avec son disque à marcher en avant ou en arrière. La barre horizontale est munie de quatre

²⁴³ *Tractatus de Theoria mathematica phenomenorum in liquidis actioni gravitatis detractis observatorum.* Bonn, 1857.

petits pieds, qui sont attachés eux-mêmes sur une plaque rectangulaire en plomb servant de base à tout le système; cette plaque était destinée à empêcher, par sa masse, que l'appareil placé au fond du vase à parois planes, dans le liquide alcoolique, n'oscillât pendant les opérations. Enfin on imprimait le mouvement à la manivelle à l'aide d'une bielle suffisamment longue dont on tenait à la main l'autre extrémité.

Le diamètre de chacun des disques a été mesuré au cathétomètre, et l'on a trouvé pour l'un 30mm,05, et pour l'autre 30mm,18; la moyenne 30mm,11 a été prise pour le diamètre du cylindre; la 0mm,13 entre ces deux diamètres était évidemment trop petite pour exercer une influence appréciable sur les résultats. Dans chaque expérience, la distance des disques était mesurée au moyen du cathétomètre disposé horizontalement, en visant à la partie supérieure de ces disques; on s'était assuré d'ailleurs du parallélisme de leurs plans.

1re EXPÉRIENCE. On a placé d'abord le disque mobile à 108mm,40 de l'autre, ce qui donnait à fort peu près 3,6 pour le rapport de la longueur du cylindre à son diamètre, puis on a fait adhérer à l'ensemble des deux disques une masse d'huile en excès, de sorte que la figure constituait un onduloïde assez fortement renflé au milieu. Alors on a absorbé graduellement du liquide, en observant de temps à autre la figure, et celle-ci a commencé à se déformer spontanément lorsque la flèche du renflement ci-dessus était encore d'environ 5mm.

2me EXPÉRIENCE. On a rapproché ensuite les disques, de manière à amener leur distance à 99mm,36, ce qui correspondait au rapport 3,3. La figure étant ainsi redevenue stable, on a continué à enlever du liquide, et la tendance à la déformation spontanée ne s'est manifestée que lorsque la flèche du renflement n'était plus que de 2mm,5 à peu près.

3me EXPÉRIENCE. Distance des disques 95mm,75, rapport 3,18. La figure était de nouveau stable, et l'épuisement ultérieur a dû réduire la flèche à moins d'un millimètre pour qu'on vît la figure se déformer d'elle-même²⁴⁴.

4me EXPÉRIENCE. Distance des disques 94mm,53, rapport 3,14. Il ne s'est plus montré de tendance à la déformation spontanée tant que la flèche avait une valeur sensible, de sorte qu'on est arrivé sans difficulté à la forme cylindrique; mais ce cylindre, abandonné à lui-même, après avoir paru persister pendant quelques secondes, a commencé à s'altérer avec une extrême lenteur d'abord, puis graduellement plus vite la figure s'est partagée, comme à l'ordinaire, en une portion renflée et une portion étranglée, et la déformation a continué à marcher jusqu'à la désunion complète. On a refait plusieurs fois l'expérience, et toujours avec les mêmes résultats.

5me EXPÉRIENCE. Distance des disques 93mm,03, rapport 3,09. On a atteint sans peine la forme cylindrique, puis on a produit artificiellement un étranglement et un renflement, la flèche de ce dernier étant à peu près de 1mm. La figure abandonnée à elle-même a repris la forme cylindrique, et il a fallu, pour amener le progrès spontané de la déformation, porter la flèche du renflement artificiel à 3mm environ.

6me EXPÉRIENCE. Distance des disques 93mm,65, rapport 3,11. On est parvenu de même au cylindre; pour qu'il y eût progrès spontané de la déformation, la flèche du renflement artificiel a dû être comprise entre 2mm et 3mm. Dans cette expérience, avant de former le cylindre, on avait, bien entendu, ajouté un peu d'huile à la masse.

7me EXPÉRIENCE. Distance des disques 94mm,18, rapport 3,13. Après une nouvelle addition préalable de liquide, on est parvenu encore au cylindre; le progrès

²⁴⁴ Le rapport de la longueur au diamètre est donné ici avec deux décimales, parce qu'on reconnaît que l'on approche déjà de la limite. Il en est de même à l'égard des expériences suivantes; on a, bien entendu, renforcé la seconde décimale quand la troisième eût été assez grande; dans des expériences de cette nature, il serait, je pense, illusoire de vouloir pousser la précision plus loin.

spontané à commencé quand la flèche du renflement artificiel n'était que de 1mm et une fraction.

§ 401. On le voit, dans les trois premières expériences, la figure a manifesté le caractère indiquant qu'un cylindre formé entre les disques serait instable, et, de la première à la troisième, ce caractère a été de moins en moins prononcé; enfin, dans cette troisième expérience, pour laquelle le rapport était 3,18, on se trouvait déjà fort près de la limite cherchée. Les trois dernières expériences ont manifesté, au contraire, le caractère de la stabilité du cylindre, et cette stabilité a été en décroissant de la cinquième expérience à la septième, pour laquelle le rapport était 3,13 et la stabilité très faible.

On peut donc affirmer, abstraction faite de tout résultat théorique, que la limite de la stabilité du cylindre est comprise entre les valeurs 3,13 et 3,18, qui ne diffèrent entre elles que de 0,05; et comme les cylindres correspondants à ces deux valeurs ont encore respectivement, d'une manière nette, les caractères de la stabilité et de l'instabilité, la limite cherchée est notablement supérieure à la première et inférieure à la seconde. Conséquemment si l'on prend la moyenne de ces mêmes valeurs, savoir 3,15, on peut être certain que la limite véritable n'en est pas éloignée de; 0,02, quantité qui n'est que les 0,006 de cette même moyenne.

Ainsi, en partant des seuls résultats de l'expérience, on doit regarder le nombre 3,15 comme étant la valeur très approchée de la limite de la stabilité du cylindre; or ce nombre diffère à peine de la valeur théorique π , ou 3,14; enfin la quatrième expérience montre qu'en plaçant les disques à la distance qui donne ce rapport théorique 3,14, la figure ne présente plus ni l'un ni l'autre des caractères de l'instabilité ou de la stabilité du cylindre, c'est-à-dire que, d'une part, elle ne manifeste aucune tendance à la transformation tant que la forme cylindrique n'est pas atteinte, et que, d'autre part, quand le cylindre est formé, il n'exige, pour commencer et accomplir sa transformation, aucune altération artificielle.

L'ensemble des expériences ci-dessus peut donc être considéré comme vérifiant pleinement la théorie.

§ 402. La cinquième, la sixième et la septième expérience, c'est-à-dire celles qui ont été faites en deçà de la limite, ont offert une particularité en apparence fort singulière. Chacune d'elles a été répétée plusieurs fois; or, dans certains cas, le cylindre, qui semblait bien régulier, s'altérait de lui-même après quelques instants: on voyait s'y dessiner un renflement et un étranglement; mais ceux-ci, après avoir atteint un degré plus ou moins marqué, quoique toujours assez petit, demeurai stationnaires, sans progresser ni s'effacer. Ce phénomène, qui paraissait inexplicable, m'a beaucoup embarrassé, jusqu'à ce que je m'en fusse rendu raison de la manière suivante.

Quand les densités des deux liquides sont bien égales, un cylindre réalisé en deçà de sa limite doit persister indéfiniment sans aucune altération, quelle que soit sa position dans le liquide alcoolique, qu'il soit horizontal, vertical au incliné; mais s'il y a entre les densités une différence, même trop faible pour déterminer dans l'huile une tendance visible à monter ou à descendre, si, en outre, l'axe de la figure est légèrement incliné, de sorte que l'un des disques est un peu plus élevé que l'autre, si enfin le cylindre est très rapproché de sa limite et qu'ainsi les forces qui tendent à maintenir sa forme n'aient qu'une intensité extrêmement petite, on comprend que l'infériorité ou l'excès de densité de l'huile portera celle-ci en plus grande quantité du côté du disque le plus haut ou le plus bas, et que dès lors la figure présentera un renflement et un étranglement. Toutefois, comme il ne s'agit ici que de différences très minimes entre les densités des liquides et entre les hauteurs des disques, ce transport de l'huile ne sera pas assez abondant pour que la figure atteigne l'onduloïde instable (§ 396) correspondant à sa

longueur; la transformation ne pourra donc s'effectuer, et la petite altération du cylindre demeurera stationnaire.

J'ai confirmé cette explication par l'expérience suivante les disques étant placés à la distance qui donne le rapport 3,11, et un cylindre étant réalisé entre eux, on a incliné quelque peu l'appareil de manière que l'un des disques fût d'environ un millimètre plus bas que l'autre, et en même temps on a donné au mélange alcoolique un excès de densité suffisant pour obliger le cylindre, à s'infléchir en formant un arc d'une courbure sensible, quoique petite, dont la convexité regardait le haut; on a vu bientôt se produire un étranglement et un renflement, celui-ci s'appuyant sur le disque le plus élevé. On a établi ensuite une même inclinaison du système en sens inverse, on a effacé l'étranglement et le renflement, et on les a vus se développer de nouveau, le renflement s'appuyant sur l'autre disque. Enfin on a rendu, au contraire, la densité du mélange alcoolique un peu trop faible, ce qui arquait légèrement la figure dans le sens opposé au précédent, et le renflement s'est montré alors vers le disque le plus bas. J'ajouterai que, dans les trois expériences rappelées au commencement de ce paragraphe, c'est-à-dire dans les trois dernières du § 400, quand la figure présentait l'altération stationnaire dont j'ai parlé, et qu'on l'avait abandonnée à elle-même pendant plusieurs minutes, on reconnaissait en général, par un légère flexion de l'ensemble, une différence entre les densités; cette différence, d'abord trop minime pour déterminer un effet sensible à l'oeil, s'était peu à peu accrue, soit par une variation de la température, soit par l'action chimique mutuelle des deux liquides, action qu'il est impossible d'annuler complètement.

Enfin je rappellerai que dans la formation des cylindres laminaires verticaux, on voit (§ 112) l'influence du poids de la lame renfler la figure dans sa moitié inférieure et l'étrangler dans sa moitié supérieure, quand le rapport entre l'écartement et le diamètre des anneaux commence à approcher de celui qui correspond à la limite de la stabilité du cylindre.

Il résulte de tout cela que, si l'on répète mes expériences sur la limite de la stabilité du cylindre, il faudra donner le plus grand soin à la parfaite horizontalité de l'axe des figures.

§ 403. Les résultats des cinquième, sixième et septième expériences, effectuées en deçà de la limite, et celui de la quatrième, effectuée à la limite même, achèvent d'établir le fait sur lequel j'ai basé la recherche de la valeur théorique de cette limite, fait consistant (§ 396) en ce que l'onduloïde instable correspondant à un cylindre stable s'approche d'autant plus de ce cylindre que celui-ci est plus voisin de la limite. En effet, l'ensemble de ces résultats donne, entre la longueur et le diamètre, la suite de rapports 3,09, 3,11, 3,13, 3,14, qui se termine au rapport limite, et donne en même temps, pour les flèches respectives du renflement de l'onduloïde instable, 3mm, 2mm et une fraction, 1mm et une fraction, 0mm.

§ 404. Supposons un cylindre réalisé ainsi un peu en deçà de sa limite de stabilité, et dans lequel on produit; par la manoeuvre indiquée, un renflement et un étranglement. Puisque c'est nécessairement d'un onduloïde que part le progrès spontané de la déformation, on comprend que si, au moment où ce progrès spontané va commencer, le renflement et l'étranglement avaient, par suite de l'opération artificielle qui les a constitués, une forme et un rapport de longueur autres que ceux qui conviennent à l'onduloïde, ils, prendraient immédiatement d'eux-mêmes cette dernière forme et ce dernier rapport. Maintenant rappelons de nouveau que cet onduloïde s'écarte d'autant moins du cylindre originaire que celui-ci est plus près de sa limite, et coïncide avec lui à la limite même; rappelons, en outre (quatrième expérience du § 400), qu'à cette

limite le cylindre, qui se déforme spontanément, se partage toujours en une seule portion renflée et une seule portion étranglée, et nous concluons de tout cela que, dans un cylindre à sa limite de stabilité, la transformation s'effectue invariablement comme si elle avait pour origine un onduleïde infiniment peu différent de ce cylindre et composé d'un seul renflement et d'un seul étranglement.

L'équation [5] du § 397 montre que la ligne méridienne de la figure est alors une sinusoïde, d'où résulte cette seconde conclusion qu'à la naissance de la transformation du cylindre dont il s'agit, le renflement et l'étranglement sont rigoureusement égaux en longueur.

§ 405. Dans le § 373, je suis arrivé à la conclusion qu'un cylindre indéfini, entièrement libre sur toute sa surface, et formé d'un liquide absolument exempt de viscosités, se transformerait très probablement de manière que chacune des divisions, et, par suite, l'ensemble d'un renflement et d'un étranglement, aurait la longueur qui correspond à la limite de la stabilité.

Mais, d'une part, j'ai montré (§ 371) que, toujours dans la transformation régulière d'un cylindre indéfini ou d'une grande longueur, les modifications de forme s'accomplissent dans chacun de ces couples comme s'il était terminé par des bases solides; et, d'autre part, nous venons de voir (§ précédent) qu'à l'origine de la transformation d'un couple isolé ayant la longueur correspondante à la limite de la stabilité, la figure constitue un onduleïde partiel infiniment peu différent du cylindre; la même chose aura donc lieu, à l'origine de la transformation d'un cylindre indéfini, dans tous les couples qui se forment, s'ils ont la longueur ci-dessus, et toutes ces portions identiques d'onduleïde se raccordant entre elles puisque chacune se compose d'un renflement entier et d'un étranglement entier, la figure totale constituera un onduleïde indéfini.

Si donc on se place dans les conditions théoriquement les plus simples, c'est-à-dire si l'on suppose le liquide sans aucune viscosité, la longueur du cylindre infinie ou seulement multiple exact de celle qui correspond à la limite de la stabilité, la surface convexe entièrement libre, et toute cause étrangère de trouble écartée, enfin si l'on imagine que le cylindre ait de très petites imperfections de forme, imperfections sans lesquelles il persisterait puisqu'il constitue une figure d'équilibre, on doit croire que, la transformation s'effectuera comme si elle partait d'un onduleïde infiniment peu différent de ce cylindre.

Dans ce cas, d'après la remarque qui termine le paragraphe précédent, la longueur initiale des renflements est rigoureusement égale à celle des étranglements. S'il y a des résistances, les renflements et les étranglements sont plus allongés, et conséquemment la figure originaire ne peut plus être un onduleïde; mais alors encore, ainsi qu'on le verra (§ 423), les renflements et les étranglements initiaux sont très probablement égaux en longueur.

§ 406. Il est d'ailleurs assez facile de faire comprendre, à quoi tient l'influence des résistances sur la longueur des renflements et des étranglements; l'examen de cette question contribuera en même temps à rendre plus nettes nos idées sur le jeu des pressions capillaires dans l'acte de la transformation spontanée.

Admettons qu'à l'origine d'une transformation régulière, quand on considère les renflements et les étranglements comme infiniment peu prononcés, les premiers sont réellement égaux en longueur aux seconds; alors, quelle que soit la vraie nature de la ligne méridienne, elle constituera une courbe analogue à la sinusoïde. Raisonnons en supposant que ce soit une sinusoïde même. Si nous désignons par r le rayon du cylindre, par β la flèche des arcs, par l la longueur de la corde de chacun de ceux-ci, que nous prenons pour axe des abscisses l'axe du cylindre, et que nous faisons passer

l'axe des ordonnées par le point d'où part l'un des arcs convexes, l'équation de notre sinusoïde sera évidemment

$$y = r + \beta \sin \frac{\pi}{l} x \quad (1)$$

Prenons sur cette courbe deux points appartenant l'un à un arc convexe, l'autre à un arc concave, et placés de la même manière sur ces deux arcs, c'est-à-dire à des distances égales des origines respectives de ces mêmes arcs. Si, pour abrégé, nous représentons par γ le terme $\beta \sin \frac{\pi}{l} x$ de notre équation, la valeur de γ sera la même, au signe près, pour les deux points, de sorte que les ordonnées de ceux-ci seront respectivement $r + \gamma$ et $r - \gamma$, ce qui donne, d'après la formule connue, pour les valeurs des deux normales, $(r + \gamma)\sqrt{1 + p^2}$ et $(r - \gamma)\sqrt{1 + p^2}$, où p est, comme toujours, le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$; il faut remarquer que, par la nature de la figure liquide, ces normales sont l'une et l'autre positives; on devra se souvenir en outre, pour l'intelligence des formules qui suivent, que la quantité γ , ou $\beta \sin \frac{\pi}{l} x$, est prise en elle-même, et par conséquent est essentiellement positive. Quant au rayon de courbure, il est clair que sa valeur est, au signe près, la même pour les deux points; si donc q désigne le coefficient différentiel du second ordre $\frac{d^2y}{dx^2}$, on aura, aussi d'après l'expression connue, pour le rayon de courbure au premier point, $+\frac{(1+p^2)^{3/2}}{q}$ et au second point $-\frac{(1+p^2)^{3/2}}{q}$.

La pression capillaire correspondante au premier point et rapportée à l'unité de surface sera conséquemment, en vertu de la formule que j'ai si souvent rappelée,

$$P + \frac{A}{2} \left\{ \frac{1}{(r + \gamma)\sqrt{1 + p^2}} + \frac{q}{(1 + p^2)^{3/2}} \right\}$$

et la pression correspondante au second point sera

$$P + \frac{A}{2} \left\{ \frac{1}{(r - \gamma)\sqrt{1 + p^2}} - \frac{q}{(1 + p^2)^{3/2}} \right\},$$

P étant toujours la pression d'une surface plane, et A une constante positive dont la valeur dépend de la nature du liquide.

Retranchons la première de ces expressions de la seconde; nous aurons ainsi, pour l'excès de la pression du point de l'arc concave sur celle du point de l'arc convexe,

$$\frac{A}{\sqrt{1 + p^2}} \left\{ \frac{\gamma}{r^2 - \gamma^2} - \frac{q}{1 + p^2} \right\}.$$

Puisque nous avons supposé la déformation infiniment peu prononcée, la tangente p est partout infiniment petite, ce qui permet de remplacer $\sqrt{1 + p^2}$ par $1 + \frac{1}{2}p^2$. Faisant cette substitution et effectuant les calculs, il vient:

$$A \frac{\gamma + \gamma p^2 - q r^2 + q \gamma^2}{r^2 - \gamma^2 + \frac{3}{2} r^2 p^2 - \frac{3}{2} \gamma^2 p^2 + \frac{1}{2} r^2 p^4 - \frac{1}{2} \gamma^2 p^4}.$$

Négligeant les termes en p^2 , γ^2 , p^4 , qui sont des infiniment petits d'ordres supérieurs, l'expression se réduit à

$$A \cdot \frac{\gamma - q r^2}{r^2}. \quad (2)$$

Reste à substituer dans cette expression les valeurs de γ et de q . Les deux différentiations successives de l'équation [1] donnent $q = -\frac{\beta \pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi}{l} x$; mais comme nous

avons affecté les quantités des signes propres qui dépendent des parties de la courbe auxquelles ces quantités appartiennent il faut ici faire abstraction du signe négatif; et, en effet, si nous voulions remplacer, dans expressions des deux pressions, la valeur générale $\frac{q}{(1+p^2)^{3/2}}$ de l'inverse du rayon de courbure par sa valeur relative à notre sinussoïde, nous ne pourrions laisser à celle de q le signe — amené par la différenciation, qu'en choisissant ce même signe entre les deux dont le dénominateur peut être affecté à cause de l'exposant $3/2$, sans quoi les termes qui représentent les inverses des rayons de courbure n'auraient plus, dans les expressions dont il s'agit, les signes qui conviennent à la question; or cela revient à faire abstraction de ces signes et à prendre q et le dénominateur d'une manière absolue. Substituant donc, dans l'expression [2], à γ et à q leurs valeurs absolues respectives $\beta \sin \frac{\pi}{l}x$ et $\frac{\beta^2 \pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi}{l}x$, on obtient enfin, pour la mesure de la différence des pressions, correspondantes à deux points semblablement situés l'un sur un arc convexe et l'autre sur un arc concave,

$$A \left\{ \frac{1}{r^2} - \frac{\pi^2}{l^2} \right\} \beta \sin \frac{\pi}{l}x. \quad (3)$$

Dans cette expression, les facteurs A et $\beta \sin \pi/lx$ sont, nous le savons, essentiellement positifs, de sorte que le signe de la quantité totale dépendra de celui du facteur $\frac{1}{r^2} - \frac{\pi^2}{l^2}$; la différence des pressions sera donc positive si l'on a

$$\frac{1}{r^2} - \frac{\pi^2}{l^2} > 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$2l > 2\pi r,$$

c'est-à-dire si la somme des longueurs d'un renflement et d'un étranglement excède la circonférence du cylindre originaire, et cela dans toute l'étendue des arcs, sauf à leurs extrémités mêmes, où le facteur $\beta \sin \frac{\pi}{l}x$ s'évanouit. On voit, de plus, que la différence dont il s'agit augmente à partir de ces extrémités jusqu'aux milieux des arcs. Ainsi, en premier lieu, quand un cylindre réalisé entre deux bases solides dépassera la limite de la stabilité, mais aura assez peu de longueur pour ne donner qu'un seul renflement et un seul étranglement, la pression correspondante à un point quelconque de l'arc méridien de l'étranglement l'emportera sur celle qui appartient au point semblablement placé de l'arc méridien du renflement.

Considérons maintenant un second cylindre de même diamètre et formé du même liquide, mais plus long, toujours avec la condition qu'il ne s'y produise qu'un seul couple, et supposons une déformation de même degré, c'est-à-dire dont le renflement et l'étranglement aient la même flèche que dans la première figure; nous passerons ainsi d'une sinussoïde à une autre plus allongée, mais de même flèche, ce qui revient à augmenter l sans changer β non plus que r et A . Si nous prenons respectivement sur ces deux sinussoïdes deux points homologues, ou tels que leurs abscisses soient entre elles comme les cordes des arcs, le rapport $\frac{x}{l}$ sera le même pour ces deux points, et conséquemment le facteur $\beta \sin \frac{\pi}{l}x$ de l'expression [3] aura la même valeur, ainsi que A ; mais le facteur $\frac{1}{r^2} - \frac{\pi^2}{l^2}$ augmentera en passant du point de la première figure au point de la seconde, et d'autant plus qu'on aura donné à l un plus grand accroissement. La prédominance des pressions capillaires de tous les points de l'étranglement sur celles des points du renflement est donc d'autant plus forte que le couple est plus allongé; et comme nous pouvons appliquer à chacun des couples formés dans la transformation

d'un cylindre d'une grande longueur ce que nous venons de trouver à l'égard d'un couple isolé, il en résulte que, dans la transformation d'un semblable cylindre, plus les renflements et les étranglements sont allongés, plus les forces qui font progresser le phénomène sont intenses. D'après cela, lorsque, dans un cylindre indéfini ou d'une longueur considérable, la transformation est gênée par des résistances soit extérieures soit intérieures, ces résistances, à moins qu'elles ne soient trop énergiques, pourront être surmontées par un allongement des couples; or on conçoit que la transformation se dispose d'elle-même de manière à produire cet effet, et qu'elle allonge d'au tant plus les couples que les résistances opposent plus d'obstacle.

A la vérité, le calcul ci-dessus est basé sur la supposition qu'à l'origine du phénomène, la ligne méridienne est une sinusoïde; mais, ainsi que je l'ai fait remarquer, si, en réalité, elle n'est pas telle; elle a bien probablement beaucoup d'analogie avec cette courbe, à laquelle elle se réduit d'ailleurs, nous le savons, quand les couples ont la longueur correspondante à la limite de la stabilité; si l'on en connaissait la nature exacte, et qu'on lui appliquât le calcul précédent, on sans aucun doute au même résultat.

§ 407. D'abord, en effet, on y arrive par les considérations exposées dans le §381, considérations d'où il résulte a priori que lorsqu'un cylindre réalisé entre deux bases solides a une longueur assez petite pour ne donner qu'un seul couple, il doit se transformer d'autant plus rapidement que sa longueur excède davantage la limite de la stabilité; et puisque, dans la transformation régulière d'un cylindre indéfini ou d'une grande longueur, les choses se passent à l'égard d'un couple quelconque comme s'il était terminé par des bases solides, il s'ensuit que, dans un cylindre indéfini ou d'une grande longueur, la transformation sera aussi d'autant plus rapide que les couples seront plus allongés; mais une transformation plus rapide suppose des forces plus intenses; les différences de pression dont il a été question dans le paragraphe précédent augmentent donc avec la longueur des couples.

En outre, on peut recourir à des vérifications expérimentales: il suffit, pour cela, d'après ce que je viens de dire, de réaliser, avec le même liquide, des cylindres de même diamètre dépassant de plus en plus leur limite de stabilité, et de compter, pour chacun d'eux, la durée de la transformation. Or c'est ce qui a été effectué en même temps que les expériences du § 400 : dans les trois premières, après avoir observé le point où la figure commençait à s'altérer spontanément, on a continué l'extraction du liquide, jusqu'à ce que, en employant la petite manoeuvre indiquée dans la note du § 359, c'est-à-dire en régularisant constamment la figure au moyen du bec de la seringue, on eût atteint la forme cylindrique; puis on a abandonné la figure à elle-même, et l'on a compté, avec une montre ordinaire, la durée approximative de la transformation; on a estimé aussi cette durée dans la quatrième expérience, où le cylindre était à sa limite de stabilité. On a trouvé ainsi pour le rapport limite 3,14 entre la longueur et le diamètre, une durée de 11 minutes; pour le rapport 3,18, une durée de 4 minutes; pour le rapport 3,3, une durée de 2 minutes; et, pour le rapport 3,6, une durée de 1 minute.

En répétant la quatrième expérience, il est arrivé plusieurs fois que la durée a été seulement de 5 à 7 minutes; mais on voit qu'elle était toujours supérieure à toutes les autres.

§ 408. Si, dans l'expression [3] du § 406, on a $\frac{1}{r^2} - \frac{\pi^2}{l^2} < 0$, d'où $2l < 2\pi r$, ce qui la rend négative, on conclura du mode de raisonnement employé, que les pressions capillaires de tous les points de l'étranglement seront inférieures à celles des points du renflement, et d'autant plus que le couple sera plus court. Dans ce cas, par conséquent, si le couple est unique et terminé à deux bases solides, la masse liquide tendra à regagner la figure cylindrique; en d'autres termes, le cylindre formé entre les bases dont

il s'agit sera stable, et sa stabilité sera d'autant plus prononcée que sa longueur sera moindre.

Enfin si l'on $\frac{1}{r^2} - \frac{\pi^2}{l^2} = 0$, d'où $2l = 2\pi r$, la différence des pressions est nulle dans toute l'étendue du couple, de sorte que, s'il n'y a qu'un seul couple compris entre des bases solides, la masse ne tendra ni à revenir à la figure cylindrique, ni à s'en éloigner davantage; le cylindre formé entre ces bases sera donc alors à sa limite de stabilité, comme nous le savions d'ailleurs.

Cette manière d'arriver à la limite de la stabilité du cylindre n'est autre chose, on le voit, que la méthode de M. Hagen (§ 394), mais corrigée en substituant aux arcs de cercle des arcs de sinusöide, et en évaluant les pressions dans toute la longueur de ces arcs, au lieu de le faire à leurs sommets seulement.

§ 409. Occupons-nous actuellement de l'onduloïde. Les conditions de stabilité de cette figure changent, on l'a vu (§ 388), suivant que son milieu est occupé par un étranglement ou par un renflement. L'application d'une méthode théorique au premier cas serait sans doute bien difficile; mais il n'en est pas de même à l'égard du second:

Quand on réalise un onduloïde partiel de cette seconde espèce en faisant adhérer, au sein du mélange alcoolique, une masse d'huile à la surface convexe d'un cylindre solide préalablement frotté d'huile (§ 47), il est évident que la surface de cette masse ne peut, à ses extrémités, former un angle avec la mince couche d'huile qui mouille la surface solide au delà de ces mêmes extrémités, et qu'ainsi la surface de la figure doit venir lécher la couche dont il s'agit, d'où il suit que la ligne méridienne se termine précisément aux minima de distance à l'axe; or, nous le savons, l'onduloïde ainsi réalisé est stable, et on en tire cette conclusion rigoureuse que la limite de la stabilité n'est point en deçà des cercles de gorge des deux étranglements. Il faut maintenant démontrer qu'elle n'est pas non plus au delà.

Pour cela, reprenons la réalisation de notre onduloïde entre les deux petits disques (§ 52); laissons à la masse d'huile un excès suffisant pour que les derniers éléments de la ligne méridienne n'aient pas encore atteint le parallélisme réel ou apparent avec l'axe, mais n'en soient pas très éloignés (fig. 100); cet onduloïde sera conséquemment stable. Poussons alors légèrement l'huile avec le bec de la petite seringue vers l'un des disques; nous diminuerons ainsi ou nous effacerons entièrement la portion d'étranglement qui était du côté de ce disque, tandis que nous rendrons plus prononcée la portion d'étranglement aboutissant à l'autre disque. Or il est clair que les choses se passeront ici comme à l'égard du cylindre; c'est-à-dire que si la déformation artificielle ne dépasse pas un certain degré, la figure abandonnée à elle-même reprendra sa forme originaire, mais que, si l'on va au delà de ce degré, elle continuera spontanément à s'altérer dans le même sens, jusqu'à sa désunion complète. Il y a donc ici également, à ce degré précis de déformation, une figure d'équilibre instable (§ 396); et comme, pendant la déformation artificielle et la déformation spontanée subséquente, la figure d'huile se maintiendra toujours de révolution et que sa ligne méridienne présentera toujours au moins un point d'inflexion, la figure d'équilibre instable dont il s'agit est nécessairement un autre onduloïde.

Cet onduloïde instable, que, pour abrégier le langage, nous appellerons *l'onduloïde conjugué*, sera, d'après ce qui précède, dissymétrique par rapport au milieu de l'intervalle des deux disques, c'est-à-dire aura son renflement plus rapproché de l'un de ces disques que de l'autre (fig. 101). Enfin ce même onduloïde s'écartera évidemment d'autant moins de l'onduloïde originaire que celui était plus près de sa limite de stabilité, et, à cette limite, coïncidera exactement avec lui.

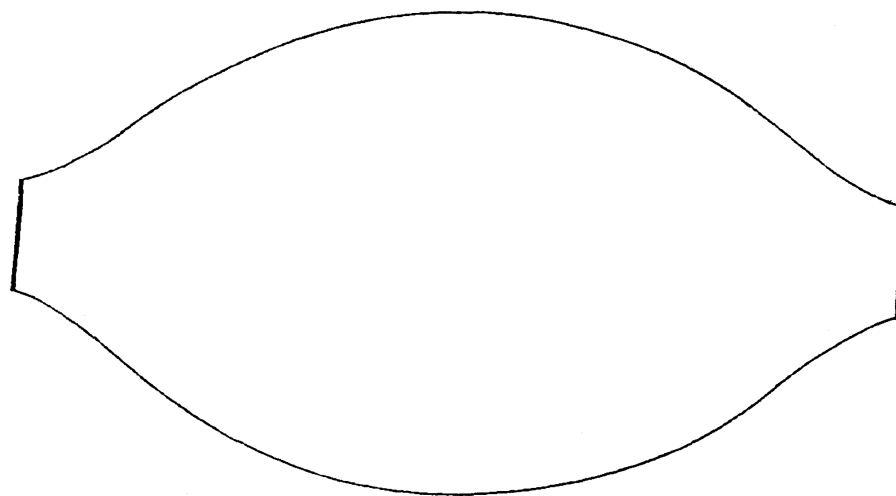


Fig. 100

Maintenant remarquons que, d'après le mode de génération de la ligne méridienne de l'onduloïde par le foyer d'une ellipse roulante (§ 82), cette ligne est nécessairement d'une symétrie parfaite des deux côtés d'un maximum de distance à l'axe, et qu'ainsi, dans un onduloïde indéfini, il y a symétrie rigoureuse des deux côtés de l'équateur d'un renflement. Il suit de là que si l'on comprend entre deux disques égaux un renflement d'onduloïde avec des portions des deux étranglements adjacents, et si ces portions dépassent l'une et l'autre leurs cercles de gorge respectifs (fig. 102), les deux disques sont rigoureusement à égale distance de la section équatoriale du renflement. Pour que cette section n'occupe pas le milieu précis de l'intervalle des disques, il faut évidemment que l'un des étranglements dépasse son cercle de gorge, et que l'autre n'atteigne pas le sien; c'est donc là le cas de l'onduloïde conjugué (fig. 101); dans cet onduloïde, un seul des deux étranglements présente un cercle de gorge.

Ces principes établis, concevons un onduloïde de l'espèce considérée dans ce paragraphe, et précisément à sa limite de stabilité; imaginons-le mathématiquement parfait, en sorte qu'il se maintienne, et supposons que ses étranglements dépassent leurs cercles de gorge, de manière qu'il soit analogue à celui de la fig. 102. Ajoutons-y une très petite quantité de liquide, ce qui en fera une figure stable, mais voisine de sa limite. Puisque nous sommes maîtres du volume ajouté, nous pouvons le prendre assez minime pour que l'onduloïde stable produit diffère aussi peu que nous le voudrons de l'onduloïde primitif, et conséquemment pour que l'onduloïde instable conjugué diffère lui-même aussi peu que nous le voudrons de cet onduloïde primitif si donc celui-ci, c'est-à-dire l'onduloïde à sa limite de stabilité, s'étendait au delà des cercles de gorge de ses étranglements, nous pourrions toujours, par une addition de liquide suffisamment petite et un transport minime du renflement vers l'un des disques, arriver à un onduloïde conjugué dont les étranglements dépasseraient encore tous deux leurs cercles de gorge respectifs; or, d'après ce que j'ai démontré plus haut, cela est incompatible avec la nature de l'onduloïde conjugué. Notre onduloïde à sa limite de stabilité ne peut donc se terminer au delà des cercles de gorge de ses étranglements, et puisqu'il ne peut non plus, comme je l'ai fait voir au commencement de ce paragraphe, se terminer en deçà,

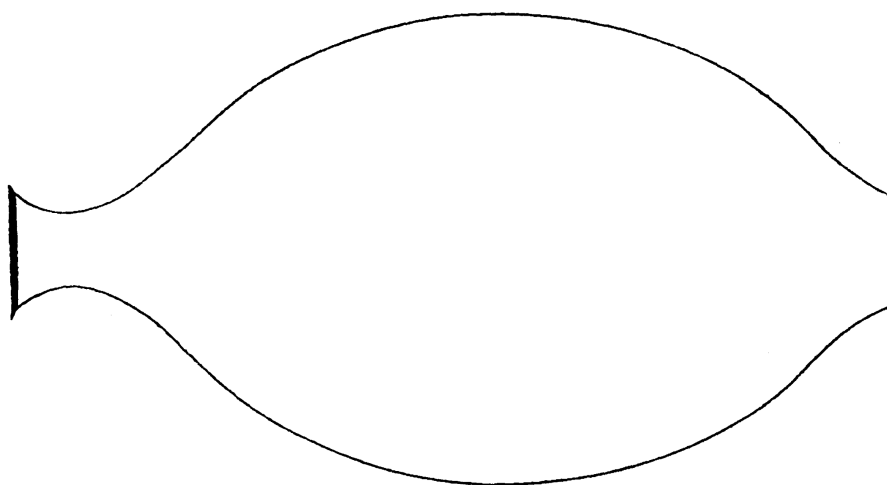


Fig. 101

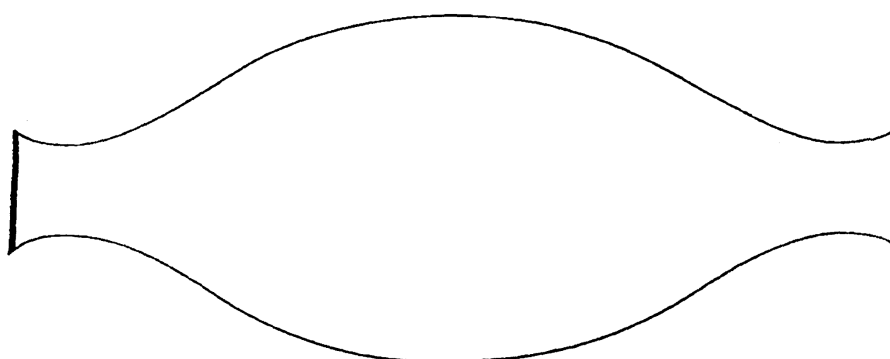


Fig. 102

il se termine bien réellement à ces cercles mêmes, ainsi que l'expérience me l'avait indiqué.

J'ajouterai que M. Lindelöf, à qui j'ai communiqué ce résultat, m'a dit y être arrivé de son côté par le calcul; l'expérience, le raisonnement et l'analyse s'accordent donc pour l'établir.

§ 410. Je puis actuellement exposer la méthode annoncée à la fin du § 397, par laquelle je parviens sans aucun calcul à la valeur exacte de la limite de stabilité du cylindre.

Il suit de la génération des lignes méridiennes, que la portion de la ligne méridienne de l'onduloïde comprise entre un minimum de distance à l'axe et le minimum suivant, correspond à une révolution entière de l'ellipse roulante; donc l'onduloïde partiel engendré par cette portion, c'est l'onduloïde à sa limite de stabilité, a une longueur égale à la périmétrie de l'ellipse dont il s'agit; or, quand cette ellipse devient un cercle, l'onduloïde devient un cylindre, et conséquemment celui-ci, à sa limite de stabilité, a une longueur égale à la circonférence du cercle roulant; mais cette circonférence est évidemment égale à celle du cylindre; donc le cylindre limite a une longueur égale à sa propre circonférence; donc enfin, dans un semblable cylindre, le rapport de la longueur

au diamètre a pour valeur exacte la quantité π .

§ 411. On a vu (§ 387) que le caténoïde de hauteur maxima est bien réellement à sa limite de stabilité, et nous savons aussi que lorsqu'on le réalise à l'état laminaire, il se convertit en deux lames planes dès qu'on atteint cette hauteur maxima; or, en conséquence du calcul de Goldschmidt (§ 80), à cette même hauteur maxima, le rapport de l'écartement des bases à leur diamètre est égal à 0,6627. En employant certaines précautions, j'ai pu soumettre à une vérification expérimentale cette valeur précise.

Pour cela, j'ai substitué aux anneaux en fil de fer deux bandes de fer ployées cylindriquement, d'un centimètre de hauteur et de deux millimètres d'épaisseur, ayant leurs bords en regard taillés extérieurement en biseau sous un angle d'environ 45° , de manière que les arêtes de ces deux biseaux, arêtes d'où devait partir la lame, fussent tranchantes. Ces deux bandes ou anneaux étaient façonnés au tour; le diamètre des circonférences formées par chacune des arêtes ci-dessus a été trouvé exactement le même pour les deux²⁴⁵, et égal à 71mm,02. La fig. 103 représente, en grandeur réelle, la coupe verticale du côté gauche du système. Ces mêmes anneaux étaient portés comme les anneaux en fil de fer, savoir l'inférieur par trois petits pieds et le supérieur par une fourche; seulement ces pieds et cette fourche étaient plus solides. De même que dans les expériences des § 110 à 114, la tige verticale à laquelle on devait visser la queue de la fourche s'adaptait, à l'aide d'une pièce intermédiaire convenable, à l'extrémité de la lunette d'un cathétomètre; on pouvait ainsi élever bien verticalement l'anneau supérieur, et en même temps mesurer avec exactitude la quantité dont son arête tranchante s'était séparée de celle de l'anneau inférieur.

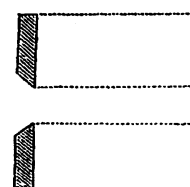


Fig. 103

Les choses étant ainsi disposées, on a procédé de la manière suivante: on a posé, par ses pieds, l'anneau inférieur sur une tablette à vis calantes et sous l'anneau supérieur soutenu, comme je rai dit, par le cathétomètre; on a rendu bien horizontale l'arête du premier, au moyen des vis calantes et d'un petit niveau à bulle d'air; on a descendu ensuite le second, et, à l'aide d'une pince, on a courbé légèrement la queue de la fourche dans un sens ou dans un autre, en faisant glisser en même temps, de petites quantités, l'anneau inférieur sur la tablette, jusqu'à ce que les deux arêtes fussent exactement superposées. Alors, après avoir remonté l'anneau supérieur, on a mouillé de liquide glycérique les bords en biseau des deux anneaux, en se servant pour cela d'un pinceau, puis on a abaissé de nouveau l'anneau supérieur jusque très près de l'autre, et l'on a rempli du même liquide la rainure circulaire formée par les deux biseaux, en y promenant le pinceau bien imbibé. Cela fait, on a soulevé le supérieur jusqu'à un millimètre environ en deçà de la quantité qu'indiquait la théorie, et qu'on avait préalablement déterminée; puis on a fait agir, avec des ménagements extrêmes, la vis du mouvement graduel, en s'arrêtant au moment précis de la rupture de l'équilibre, c'est-à-dire à l'instant où la figure se resserre rapidement pour se désunir en son milieu et se convertir en deux lames planes, comme avec les anneaux en fil de fer.

Le diamètre des bords tranchants étant, ainsi que je l'ai indiqué plus haut, de 71mm,02, on devait avoir (§ 80), pour la hauteur du caténoïde limite et conséquemment pour l'écartement de ces bords correspondant à la rupture de l'équilibre, $71\text{mm},02 \times 0,6627 = 47\text{mm},06$. Or, sur sept fois qu'on a effectué l'expérience, la lecture au cathétomètre a donné six fois identiquement la même valeur, savoir 46mm,97, et une fois 46mm,92 qui s'écarte à peine de la précédente. On doit donc regarder la

²⁴⁵ On a mesuré ces diamètres au moyen du cathétomètre, en plaçant pour cela les anneaux dans une position verticale.

valeur 46mm,97 comme étant celle que donne l'expérience; elle ne diffère de la valeur théorique 47mm,06 que de 0mm,09 quantité qui n'atteint pas les deux millièmes de cette valeur théorique. J'appellerai ici l'attention sur une autre vérification de la théorie. Nous avons vu (ibid.) que, d'après les calculs de Goldschmidt, lorsque l'écartement des bases excède la limite, il n'y a plus, comme surface de révolution à courbure moyenne nulle s'appuyant sur ces bases, que deux plans qui les occupent respectivement; or nous savons en effet, par l'expérience ci-dessus et par celles des §§111 et 222, qu'au moment où, par l'écartement graduel des anneaux, on atteint la limite théorique soit exactement, soit à fort peu près, le caténoïde laminaire compris entre eux se transforme spontanément en deux lames planes.

La discussion contenue dans le § 78 et le théorème de M. Delaunay (§ 82) complété par M. Lamarle (§ 83) ont, du reste, montré, depuis, que, parmi les surfaces de révolution, le caténoïde et le plan sont les seules à courbure moyenne nulle.

Rappelons ici que le caténoïde limite est défini (§ 80) par cette propriété simple, que les points extrêmes de sa chaînette méridienne sont ceux dont les tangentes prolongées iraient également toucher la chaînette méridienne opposée, ou, ce qui revient au même, se couperaient au centre de la figure.

On a vu encore (§ 89) que le caténoïde en question jouit de cette autre propriété simple, que son volume est la moitié de celui du cylindre de même base et de même hauteur, propriété que nous avons également vérifiée par l'expérience (§ 90).

Enfin ce même caténoïde possède une dernière propriété, celle d'être unique; nous savons, en effet, que, pour tout écart des bases inférieur à l'écartement limite, il y a toujours deux caténoïdes possibles s'appuyant sur ces bases et pénétrant inégalement entre elles, caténoïdes qui diffèrent d'autant moins l'un de l'autre qu'on approche davantage de la limite, et dont le moins rentré est le seul stable.

§ 412. Nous aurions encore à chercher, par la théorie, les limites précises de stabilité du nodoïde dans les différents cas examinés aux §§389 et 380; mais ici, comme à l'égard de l'onduloïde partiel étranglé, les principes que nous avons appliqués au cylindre et à l'onduloïde partiel renflé ne sauraient être employés. Il en est de même quant aux figures mentionnées au § 393.

§ 413. Essayons maintenant de pénétrer plus avant dans l'essence des phénomènes.

Concevons une figure d'équilibre liquide réalisée dans un système solide, et mathématiquement parfaite; alors la pression capillaire sera rigoureusement la même en tous les points de la couche superficielle, et la figure, quelle que soit son étendue, se maintiendra tant qu'une cause extérieure ne viendra point la troubler. Supposons qu'on lui imprime artificiellement une déformation très petite; ainsi altérée, elle cessera en général d'être une figure d'équilibre, et dès lors les pressions respectivement correspondantes aux différents points de sa couche superficielle ne seront plus exactement égales; si donc on l'abandonne à elle-même, elle tendra à quitter ce nouvel état. Cela posé, deux cas sont possibles savoir que la figure tende à revenir à sa première forme, ou bien qu'elle tende à s'en éloigner davantage. Si le premier cas a lieu quelle que soit la nature de la petite déformation, la figure est stable; si, au contraire, le second cas se présente soit pour une petite déformation quelconque, soit pour une petite déformation d'une nature déterminée, la figure est instable.

Mais on peut envisager la stabilité et l'instabilité des figures liquides sous un autre point de vue, également général, dont l'idée m'a été suggérée par un passage de l'un des Mémoires de Beer, passage que je reproduis plus bas.

Les géomètres ont admis, comme résultat de l'analyse, que les surfaces représentées par l'équation $\frac{1}{r} + \frac{1}{R'} = C$, c'est-à-dire les surfaces dont la courbure moyenne est

constante, sont aussi celles qui, renfermant un volume donné, ont une étendue minima. Mais s'il fallait accepter ce principe sans restriction, il s'ensuivrait que toute figure d'équilibre liquide partielle terminée à un système solide serait nécessairement stable, quelque portion qu'elle représentât de la figure complète à laquelle elle appartient l'onduloïde, par exemple, conserverait toute sa stabilité avec un nombre quelconque de renflements et d'étranglements entre ses deux bases solides.

En effet, la couche superficielle de la masse étant réellement, nous le savons (chap. V), dans un état de tension, elle fait constamment effort pour se resserrer; si donc, dans l'état d'équilibre, son étendue était toujours un minimum, une déformation très petite quelconque augmenterait cette étendue, et conséquemment la couche superficielle ferait effort pour reprendre ses dimensions premières et rétablir la forme d'équilibre. Aussi Beer cherche à modifier le principe énoncé par les géomètres: dans le second des deux Mémoires qu'il a publiés sur ses expériences²⁴⁶, il s'exprime de la manière suivante:

« Un liquide à l'état d'équilibre et soustrait à toute influence étrangère jouit de cette propriété que la variation de sa surface est toujours nulle... cette surface est donc de la nature de celles qu'on nomme *minimæ* ou *maximæ areæ* or, à une surface *maximæ areæ* correspondra évidemment un équilibre instable, tandis qu'à une surface *minimæ areæ* correspondra un équilibre stable. »

Cependant, si l'on réfléchit, on se convaincra sans peine qu'une surface renfermant un volume donné ne saurait constituer un maximum d'une manière absolue, car on pourrait toujours trouver des modes de petite déformation qui l'augmenteraient : si l'on imagine, par exemple, que la figure se sillonne de cannelures telles que la somme de celles qui sont en creux par rapport à la surface primitive soit égale en volume à la somme de celles qui sont en relief, de façon que le volume total n'ait pas changé, il est clair que la surface aura reçu par là un accroissement notable, quelque ténues qu'on suppose les cannelures en question. C'est, sans doute, pour ce motif que les géomètres ont considéré les surfaces à courbure moyenne constante comme ayant toujours chacune un minimum d'étendue. L'expérience vient d'ailleurs confirmer cette impossibilité d'un maximum absolu, et c'est elle, en outre, qui nous donnera la solution des difficultés ci-dessus :

Quand on a réalisé entre deux disques, dans le liquide alcoolique, un cylindre d'huile dépassant très peu sa limite de stabilité, si, avant que la déformation spontanée ait commencé à se montrer, on pousse légèrement le cylindre en son milieu à l'aide d'une spatule recouverte d'étoffe, de manière à fléchir la figure d'une certaine quantité, puis qu'on enlève la spatule, on voit la figure revenir d'elle-même à la forme cylindrique, plus ou moins altérée par la naissance du renflement et de l'étranglement; d'où il faut conclure qu'un cylindre dépassant sa limite de stabilité est néanmoins stable encore et conséquemment *minimæ areæ*, par rapport aux déformations qui le fléchiraient. Il résulte de là que la surface d'une figure d'équilibre liquide qui dépasse sa limite de stabilité, est encore *minimæ areæ* par rapport à certaines déformations, tandis qu'elle est *maximæ areæ* par rapport à d'autres.

L'expérience montre, de plus, qu'une figure d'équilibre liquide donnée comprise dans un système solide donné, et dépassant sa limite de stabilité, s'altère toujours identiquement de la même manière le cylindre, par exemple, terminé à deux disques solides, se fractionne toujours en portions renflées alternant avec des portions étranglées, et, quand aucune cause perturbatrice n'intervient, les longueurs respectives des renflements et des étranglements, à une époque quelconque du phénomène, sont tou-

²⁴⁶ Voir la troisième note du § 398.

jours les mêmes dans les mêmes conditions de l'expérience; dans l'onduloïde partiel renflé et compris entre deux disques égaux, le renflement marche toujours vers l'une des bases, de façon que l'un des deux étranglements s'efface par degrés, tandis que l'autre s'approfondit jusqu'à sa désunion; etc.

Or ces faits paraissent conduire à une seconde conséquence, savoir qu'au delà de la limite de stabilité, ou bien la surface n'est *maximæ areæ* que par rapport à un seul mode de déformation, ou bien, si elle est *maximæ areæ* par rapport à plusieurs, il existe certaines conditions qui déterminent le choix de la masse parmi ceux-ci, de façon qu'une seule déformation est susceptible de progresser.

§ 414. Pour rendre plus évidentes encore les déductions qui précèdent, je vais étudier le cylindre au point de vue des variations que subit l'étendue de sa surface quand on altère un peu la forme de celle-ci, sans changer le volume qu'elle renferme; cette figure, en effet, se prête sans trop de peine à un semblable examen.

Concevons un cylindre liquide d'une longueur quelconque par rapport à son diamètre et terminé à deux bases solides, et imaginons qu'on lui imprime une déformation finie, mais très petite, astreinte à la seule condition que les aires de toutes les sections planes parallèles aux bases solides soient demeurées les mêmes que dans le cylindre. Une telle déformation est admissible, car elle n'altère pas le volume de la masse; figurons-nous, en effet, deux de ces sections infiniment rapprochées; le volume de la tranche liquide qu'elles comprennent sera égal au produit de l'aire de l'une d'elles par la distance qui les sépare, et puisque cette aire est égale à celle d'une section circulaire du cylindre, le volume en question sera égal à celui d'une tranche de même épaisseur appartenant au cylindre; enfin le volume total de la figure étant la somme des volumes de toutes les tranches obtenues en coupant cette figure par un nombre infini de plans infiniment rapprochés et parallèles aux bases, et le nombre de ces tranches étant le même avant et après la déformation, celle-ci, comme je l'ai avancé, n'apporte aucune modification au volume total dont il s'agit.

Considérons actuellement, dans la figure déformée, l'une des tranches ci-dessus. Si les sections qui la comprennent ne sont pas circulaires, leurs périmètres seront plus grands que celui des sections du cylindre, puisque de toutes les courbes planes qui renferment la même aire, la circonférence de cercle est la plus courte; la petite zone superficielle qui unit ces périmètres et qui fait partie de la surface libre de la figure, sera donc, pour cette raison et, en outre, parce qu'elle se compose en général d'éléments obliques aux plans des deux sections, plus grande que la petite zone appartenant à une tranche du cylindre. Si les deux sections sont circulaires, elles seront, par la condition assignée aux aires, identiques à celles du cylindre, mais leurs centres ne seront pas en général exactement en regard l'un de l'autre, de sorte que la petite zone qui unit les deux périmètres se composera aussi d'éléments obliques, et sera encore conséquemment plus grande que celle d'une tranche du cylindre. D'après cela, comme le nombre des tranches est le même dans la figure déformée et dans le cylindre, la somme des surfaces des petites zones de la première l'emportera sur la somme de celles des petites zones du second; donc enfin, ce qui est la même chose, la surface libre de la figure déformée sera plus étendue que celle du cylindre.

Ainsi, de quelque nature que soit la petite déformation, si elle est telle que les aires des sections parallèles aux bases n'aient pas changé, elle augmente l'étendue de la surface libre de la masse; en d'autres termes, la surface du cylindre est un minimum par rapport à toutes les petites déformations de cette espèce.

Parmi ces mêmes déformations, se trouve évidemment celle qui consiste en une simple flexion, et nous avons vu, en effet, qu'un cylindre liquide légèrement fléchi

revient spontanément à la forme de révolution.

§ 415. Supposons maintenant une petite déformation qui change les aires des sections parallèles aux bases. Alors, puisque le volume total, ou la somme des volumes de toutes les tranches, est invariable, il faut nécessairement que, parmi les sections, les unes aient des aires plus grandes et les autres des aires plus petites que l'aire d'une section du cylindre; il faut conséquemment que la figure ait des portions renflées et des portions amincies. Voyons donc si, dans cet état, la surface de la figure doit encore excéder celle du cylindre, ou si elle peut être moindre.

Afin de rendre la question accessible au calcul, imaginons que la figure déformée soit elle-même de révolution, et qu'elle ait pour ligne méridienne une sinusoïde. Comme la déformation doit être supposée finie, bien que très petite, on comprend que l'axe de cette sinusoïde ne pourra coïncider avec la génératrice du cylindre: pour que le volume soit demeuré le même, les renflements devront saillir moins en dehors de la surface cylindrique primitive que les étranglements ne s'enfoncent en dedans; l'axe de la courbe sera donc un peu plus rapproché de l'axe de révolution que la génératrice du cylindre; nous désignerons par μ la petite différence de ces deux distances. Alors, en prenant pour axe des abscisses l'axe de révolution, et en plaçant l'origine au pied de l'origine donnée de l'un des points où la sinusoïde coupe son axe et où commence un arc convexe, si l est la longueur des cordes des arcs, β la flèche de ces mêmes arcs, et r le rayon du cylindre originaire, on trouvera aisément que l'équation de notre sinusoïde est:

$$y = r - \mu = \beta \sin \frac{\pi}{l} x. \quad (1)$$

Cherchons d'abord la relation entre μ et β nécessaire pour que le volume n'ait pas changé. Notre figure liquide étant terminée à deux disques solides, supposons que du premier de ces disques parte un renflement, et que sur le second s'appuie un étranglement; nous pourrions alors partager, par des sections de même diamètre que les disques, la figure en un nombre entier de parties égales contenant chacune une portion renflée et une portion étranglée; seulement, par suite de la non coïncidence entre l'axe de la sinusoïde et la génératrice du cylindre, on comprend que, dans chacun des couples ainsi formés, la portion renflée ne constitue pas un renflement complet, et qu'à l'extrémité de la portion étranglée s'ajoute le commencement du renflement qui la suit. Or tous ces couples étant égaux, et la somme de leurs volumes représentant le volume total de la masse, il s'ensuit que le volume de chacun d'eux est égal à celui de la portion du cylindre primitivement comprise entre les mêmes sections; il suffira donc, pour établir que le volume total n'a pas changé, de chercher l'expression du volume d'un couple, et de l'égaliser à celle du volume de la portion correspondante du cylindre.

Mais on peut substituer au couple en question un autre couple terminé par deux sections ayant pour rayon la distance $r - \mu$ de l'axe de la sinusoïde à l'axe de révolution, sections dont la première passe par le point où naît un arc convexe, et dont la seconde passe par celui où finit l'arc concave suivant; on voit, en effet, qu'en agissant ainsi, on ajoute une petite portion à la première extrémité du couple considéré d'abord, mais qu'on retranche à l'autre extrémité une portion identique. Ce nouveau couple se composera ainsi exactement d'un renflement complet et d'un étranglement complet, et se prêtera sans difficulté au calcul.

L'expression générale du volume d'un corps de révolution terminé à deux sections perpendiculaires à l'axe, est, comme on sait $\pi \int y^2 dx$. Pour l'appliquer à notre couple,

il suffira d'y remplacer y par la valeur que donne l'équation [1] on a de cette manière

$$\begin{aligned}\pi \int y^2 dx &= \pi \int \left(r - \mu + \beta \sin \frac{\pi}{l} x \right)^2 dx \\ &= \pi \left\{ \left[(r - \mu)^2 + \frac{\beta^2}{2} \right] x - \frac{2\beta l}{\pi} (r - \mu) \cos \frac{\pi}{l} x - \frac{\beta^2 l}{4\pi} \sin \frac{2\pi}{l} x \right\} + C.\end{aligned}$$

Prenons maintenant cette intégrale entre les limites du couple en question, c'est-à-dire de $x = 0$ à $x = 2l$; nous obtiendrons

$$2\pi \left\{ (r - \mu)^2 \frac{\beta^2}{2} \right\} = 2\pi r^2 l + \pi l (2\mu^2 - 4r\mu + \beta^2).$$

Telle est donc l'expression du volume du couple; or celui de la portion de même longueur $2l$ prise dans le cylindre est $2\pi r^2 l$; pour que ces deux volumes soient égaux, il faut conséquemment que l'on ait

$$2\mu^2 - 4r\mu + \beta^2 = 0.$$

Résolvant par rapport à μ , il vient:

$$\mu = r \pm \sqrt{r^2 - \frac{\beta^2}{2}}.$$

Observant que, comme μ doit être très petit, il faut prendre le radical avec le signe —, développant ce radical, et négligeant les puissances de β supérieures à la deuxième à cause de la petitesse de cette quantité, on a enfin

$$\mu = \frac{\beta^2}{4r}. \quad (2)$$

C'est la relation cherchée²⁴⁷ entre μ et β .

Passons à la surface. Celle-ci est, comme on le sait encore, représentée d'une manière générale, dans le cas des corps de révolution, par $2\pi \int y ds = 2\pi \int y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$; or y est donné par, l'équation [1], équation d'où l'on déduit aussi $\frac{dy}{dx} = \frac{\beta\pi}{l} \cos \frac{\pi}{l} x$. On aura donc

$$2\pi \int y ds = 2\pi \int \left(r - \mu + \beta \sin \frac{\pi}{l} x \right) \sqrt{1 + \frac{\beta^2 \pi^2}{l^2} \cos^2 \frac{\pi}{l} x} \cdot dx.$$

Mais, à cause de la petitesse de β , on peut développer le radical et se borner aux deux premiers termes de la série; avec cette simplification, on trouve:

$$2\pi \int y ds = 2\pi \int \left(r - \mu + \beta \sin \frac{\pi}{l} x \right) \left(1 + \frac{\beta^2 \pi^2}{2l^2} \cos^2 \frac{\pi}{l} x \right) \cdot dx.$$

Effectuant la multiplication, négligeant le terme en β^2 , et intégrant aussi entre les limites $x = 0$ et $x = 2l$, on obtient:

$$2\pi \int_0^{2l} y ds = 4\pi l (r - \mu) \left(1 + \frac{\beta^2 \pi^2}{4l^2} \right),$$

²⁴⁷ Cette relation montre que si l'on suppose la déformation, et, par suite, la flèche infiniment petite, comme nous l'avons fait dans le calcul du § 406, la quantité μ , c'est-à-dire l'intervalle entre l'axe de la sinusoïde et la génératrice du cylindre, est du deuxième ordre, et conséquemment disparaît devant β ; c'est pourquoi, dans le calcul que nous venons de citer, nous avons fait coïncider les deux droites dont il s'agit.

expression dans laquelle il faut introduire la condition [2] relative au volume; faisant donc $\mu = \frac{\beta^2}{4r}$, et négligeant le terme en β^4 , il vient enfin, pour la valeur de la surface de notre couple,

$$4\pi r l + \pi \beta^2 \left\{ \frac{\pi^2 r}{l} - \frac{l}{r} \right\}. \quad (3)$$

Or la surface de la portion de même longueur prise dans le cylindre est $4\pi r l$; la surface de notre couple sera donc plus grande ou plus petite que celle de la portion de cylindre, suivant qu'on aura

$$\frac{l}{r} < \frac{\pi^2 r}{l} \quad \text{ou} \quad \frac{l}{r} > \frac{\pi^2 r}{l},$$

inégalités d'où l'on tire les suivantes:

$$2l < 2\pi r \quad \text{ou} \quad 2l > 2\pi r.$$

Mais $2l$ est la longueur du couple, et $2\pi r$ la circonférence du cylindre; si donc la longueur du couple excède la circonférence du cylindre, la surface de ce couple sera moindre que la portion de cylindre ayant même longueur; or la surface de notre couple étant égale à celle du couple primitivement considéré, et la figure déformée entière se composant de couples identiques à ce dernier, il s'ensuit que, dans la condition ci-dessus, la surface libre totale de la figure déformée sera moindre que la surface libre totale du cylindre.

§ 416. Ainsi, quand le cylindre est suffisamment long par rapport à son diamètre, sa surface est un maximum à l'égard de la petite altération qui partagerait la figure en portions alternativement renflées et étranglées, de forme et de longueur convenables; or nous savons que tel est, en effet, le mode de transformation spontanée d'un cylindre liquide instable; la théorie et l'expérience se vérifient donc encore mutuellement.

A la vérité, nous ne sommes pas certains qu'au commencement de la transformation d'un cylindre liquide dépassant sa limite de stabilité, la ligne méridienne de la figure soit rigoureusement une sinusoïde; mais cette condition n'est pas indispensable: quand la dernière inégalité du paragraphe précédent existe, la surface totale de la figure a diminué d'une quantité finie, bien que très petite, et dès lors on peut évidemment, sans annuler tout à fait la différence ou la faire passer en sens contraire, modifier jusqu'à un certain point la ligne méridienne de façon qu'elle ne constitue plus une sinusoïde exacte.

En outre, on peut, sans que l'inégalité en question cesse d'avoir lieu, attribuer au couple toutes les longueurs supérieures à la circonférence du cylindre, pourvu qu'elles soient en même temps des parties aliquotes de la distance des deux bases; par conséquent, lorsque le cylindre dépasse suffisamment sa limite de stabilité, si, d'une part, il y a (§ 414) une infinité de petites déformations à l'égard desquelles sa surface est encore un minimum, il y a, d'autre part, plusieurs petites déformations à l'égard desquelles cette surface est un maximum.

§ 417. Supposons actuellement la longueur du cylindre assez peu considérable pour que la transformation spontanée ne donne lieu qu'à un seul couple, c'est-à-dire ne partage la figure entière qu'en une seule portion renflée et une seule portion étranglée. Dans ce cas, $2l$ représentera la longueur totale du cylindre; si donc cette longueur l'emporte sur la circonférence, la surface du cylindre sera un maximum à l'égard de la petite déformation, et cette déformation progressera. Si, au contraire, la longueur du cylindre est moindre que sa circonférence, la surface de ce cylindre sera un minimum

à l'égard de la petite déformation, et celle-ci devra s'effacer d'elle-même. Enfin si le cylindre a une longueur égale à sa circonférence, la déformation, pourvu qu'on la suppose extrêmement peu, ou, avec plus d'exactitude, infiniment peu prononcée, n'altérera pas l'étendue de la surface, et conséquemment n'aura aucune tendance à progresser ou à s'effacer; or nous savons, en effet, qu'un cylindre liquide dont la longueur est égale à la circonférence est précisément à sa limite de stabilité, et de ce qu'en deçà de cette longueur il est stable, nous devons conclure qu'alors sa surface est un minimum à l'égard de toute espèce de déformation très petite.

§ 418. La discussion contenue dans les paragraphes précédents établit donc, relativement au cylindre liquide, les principes suivants:

1° Quelque grand que soit l'intervalle des bases solides par rapport à leur diamètre, la surface du cylindre compris entre elles est toujours *minimæ areæ* à l'égard de certaines petites déformations.

2° Pour tout intervalle des bases excédant leur circonférence, la surface du cylindre, quoique *minimæ areæ* à l'égard des petites déformations ci-dessus, est, au contraire, *maximæ areæ* à l'égard de certaines autres petites déformations, parmi lesquelles est celle qui progresse d'après l'expérience.

3° Pour tout intervalle des bases moindre que leur circonférence, la surface du cylindre est *minimæ areæ* d'une manière complète, c'est à l'égard de toute espèce de petite déformation.

L'analogie des phénomènes observés permet évidemment d'étendre ces principes aux autres figures d'équilibre, et nous en déduisons cette conclusion générale:

Lorsqu'une figure d'équilibre a une limite de stabilité, c'est seulement en deçà de cette limite que sa surface est *minimæ areæ* d'une manière complète, c'est-à-dire qu'elle est moindre que toutes les surfaces voisines comprenant le même volume et terminées au même système solide; au delà de la limite dont il s'agit, la surface de la figure est encore *minimæ areæ* à l'égard de certaines déformations, mais elle est *maximæ areæ* par rapport à une autre au moins, que les forces moléculaires font progresser.

Il faut donc restreindre dans ce sens le principe admis par la généralité des géomètres relativement aux surfaces dont la courbure moyenne est constante: la plupart de ces surfaces ne sont complètement *minimæ areæ* qu'entre certaines limites, au delà desquelles elles sont *minimæ areæ* à l'égard de certaines variations, et *maximæ areæ* à l'égard d'autres variations.

Il est à peine nécessaire de faire remarquer que si, dans le calcul du § 415 et dans ce qui le suit, j'ai supposé la déformation finie quoique extrêmement peu prononcée, c'est que je raisonnais au point de vue physique, c'est-à-dire à celui des figures liquides réalisées; mais il est clair qu'au point de vue purement mathématique, rien n'empêche de supposer la déformation infiniment petite, et qu'on arriverait encore aux mêmes conclusions; seulement, dans le cas du cylindre, la ligne méridienne de la figure altérée devrait alors être une sinusoire exacte, ce qui est indifférent pour la théorie, et le terme $\pi\beta^2 \left\{ \frac{\pi^2 r}{l} - \frac{l}{r} \right\}$ de l'expression [3] du paragraphe cité représenterait la variation seconde de la surface.

§ 419. Si donc on voulait traiter a priori, et uniquement par le calcul, la question des limites de stabilité des figures d'équilibre liquides, le problème consisterait à chercher, pour chacune des surfaces représentées par l'équation $\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = C$, les limites entre lesquelles elle est *minimæ areæ* d'une manière complète, c'est-à-dire moindre que toute autre surface voisine comprenant le même volume et ayant les mêmes terminaisons; ces terminaisons devraient d'ailleurs être caractérisées d'avance d'une manière suffisante. Si le calcul est praticable, on aura ainsi une méthode générale pour

la détermination des limites de stabilité dont il s'agit.

Cette recherche ne me paraît pas dénuée d'intérêt, même au point de vue purement mathématique; elle présenterait probablement des difficultés très grandes, et je laisse aux géomètres le soin de l'essayer. On a vu, dans ce chapitre, qu'en s'aidant à la fois de l'expérience et de la théorie, la question se résout nettement et d'une manière simple dans plusieurs cas, au moyen de méthodes particulières.

Ajoutons qu'il est facile de se rendre raison maintenant de la stabilité de la sphère (§ 357); on sait, en effet, que la surface de ce corps est, d'une manière absolue, la plus petite surface possible qui puisse envelopper un volume donné. Quant au plan, sa stabilité est, ainsi que je l'ai montré (§ 358), une conséquence nécessaire de celle de la sphère.

§ 420. Un point reste à examiner. On a vu que la surface d'un cylindre liquide suffisamment long par rapport à son diamètre, est *maximæ areæ* à l'égard de plusieurs petites déformations, et l'analogie permet de penser que la même chose a lieu pour d'autres figures d'équilibre; en outre, nous savons qu'une figure d'équilibre quelconque excédant sa limite de stabilité éprouve toujours la même déformation spontanée dans les mêmes circonstances expérimentales; il faut donc reconnaître, tout au moins dans le cylindre, l'existence d'une condition théorique qui détermine le choix de la masse parmi toutes les déformations qui diminueraient sa surface.

On serait tenté de croire, au premier abord, que puisque la surface tend incessamment à décroître, les forces moléculaires choisissent la déformation qui rend ce décroissement le plus grand possible. Mais il n'en est pas ainsi; en effet, la déformation qui produirait le plus grand décroissement de la surface doit être unique pour une figure donnée; or, dans la transformation spontanée du cylindre, la longueur des couples varie, nous le savons, pour un même diamètre et une même distance des bases, avec les viscosités du liquide et les autres résistances. D'ailleurs l'expression [3] du § 415 montre qu'au commencement de la transformation, la plus grande diminution de la surface correspondrait au cas où la valeur de l serait la plus grande possible, et conséquemment à celui où, quel que fût l'écartement des bases relativement à leur diamètre, il ne se formerait entre elles qu'un seul renflement et un seul étranglement; et l'on ne peut objecter que cela tient à la nature de la courbe que j'ai prise pour ligne méridienne, et qui n'est peut-être pas la véritable; j'ai effectué un calcul analogue à celui du § 415 sur deux autres lignes, savoir, en premier lieu, sur une ligne brisée qui engendrerait une suite de cônes tronqués égaux réunis alternativement par leurs grandes et- par leurs petites bases, et, en second lieu, sur une ligne composée d'arcs de cercle égaux alternativement convexes et concaves vers l'extérieur, c'est-à-dire sur la ligne méridienne supposée par M. Hagen (§ 394); or, dans les deux cas, j'ai trouvé encore que la plus grande diminution correspondait à la plus grande longueur de chaque portion renflée ou étranglée; il est donc bien probable que ce résultat est général, et qu'ainsi il a lieu pour la véritable ligne méridienne.

§ 421. La condition qui fixe le choix entre toutes les petites déformations d'où résulterait une diminution de la surface, doit, par conséquent, être cherchée ailleurs, et l'on y arrive, je pense, par les considérations suivantes:

Lorsque, par une cause quelconque, une masse liquide soumise aux seules actions moléculaires ne constitue pas une figure d'équilibre, et qu'ainsi les pressions correspondantes aux différents points de sa surface sont inégales, elle tend nécessairement à égaliser ces pressions, et alors le liquide est chassé incessamment des points de plus forte pression vers ceux de moindre pression, jusqu'à ce que les inégalités aient complètement disparu. La figure se modifie donc de telle manière qu'à chaque instant les

pressions soient aussi peu différentes que le permettent les conditions du phénomène; en d'autres termes, à chaque instant de celui-ci, la forme de la masse a toujours le plus d'analogie possible avec une forme d'équilibre.

Maintenant supposons une figure liquide dépassant sa limite de stabilité et réalisée entre des terminaisons solides. Elle aura nécessairement une foule de petites irrégularités imperceptibles à l'oeil, et provenant à la fois du procédé même de sa formation, quel qu'il soit, des petits mouvements inséparables de ce procédé, etc., de sorte qu'elle ne constituera une figure d'équilibre qu'en apparence, et se trouvera, en réalité, dans le cas ci-dessus. Or, parmi ces irrégularités, les unes seront telles que, si elles existaient seules, elles augmenteraient la surface, et d'autres seront telles qu'elles la diminueraient; conséquemment les premières tendront à s'effacer, et les secondes, au contraire, tendront à progresser; mais, en vertu de ce qui précède, les forces moléculaires choisiront parmi ces dernières celles qui permettront à la masse modifiée de s'écarter le moins possible d'une autre figure d'équilibre, et les feront progresser en les régularisant.

On peut encore exprimer ce principe autrement: puisque les forces qui produisent la transformation sont les différences de pression, on peut dire que le phénomène se dispose de manière à s'accomplir avec la moindre dépense possible de force.

§ 422. Appliquons ces considérations au cylindre. Supposons un cylindre liquide d'une longueur considérable relativement au diamètre, réalisé par un moyen quelconque entre deux bases solides. Nous avons vu qu'une irrégularité consistant dans le partage de la figure en portions alternativement plus épaisses et plus minces, pouvait diminuer la surface; d'un autre côté, la figure d'équilibre la plus voisine du cylindre est l'onduloïde, qui se compose de portions alternativement renflées et étranglées; si donc notre principe est vrai, les forces moléculaires choisiront, parmi toutes les petites irrégularités du cylindre, les amincissements suffisamment espacés, elles les régulariseront, en les prononçant de plus en plus, et elles disposeront la figure de manière à l'approcher le plus possible d'un onduloïde. D'après cela, si le liquide était complètement exempt de viscosité, et qu'il y eût en même temps absence de résistances extérieures, de manière que la transformation pût s'effectuer avec une entière liberté, enfin si la distance des bases était un multiple exact de leur circonférence, le phénomène marcherait comme s'il avait pour origine un onduloïde infiniment peu différent du cylindre.

Or j'étais déjà arrivé (§ 405) à ce dernier résultat, en m'appuyant sur l'expérience et sur des raisonnements d'une autre nature; deux méthodes essentiellement différentes concourent donc à l'établir, et dès lors le principe exposé dans le paragraphe précédent, principe à peu près évident en lui-même et dont le résultat en question découle immédiatement, peut, je pense, être regardé comme suffisamment démontré.

§ 423. Si l'intervalle des bases solides n'est pas un multiple exact de leur circonférence, de sorte que les couples ne puissent prendre la longueur qui convient à l'onduloïde, c'est-à-dire leur longueur minima, ou bien s'il s'agit d'un liquide réel, auquel cas il y a des résistances, les couples seront plus allongés, nous le savons; mais, toujours en vertu de notre principe, la figure, à l'origine de la transformation, approchera autant que possible d'un onduloïde, et l'on peut admettre qu'elle sera ce que deviendrait un onduloïde si celui-ci était simplement étiré dans le sens de sa longueur. S'il en est effectivement ainsi, la ligne méridienne originaire, sera encore une sinusoïde, comme nous l'avons supposé, et, par conséquent, la longueur des renflements sera encore rigoureusement égale à celle des étranglements.

Dans son second Mémoire, Beer énonce, au sujet des modifications par lesquelles

passé progressivement un long cylindre une idée, analogue à celle que j'ai émise plus haut; il pense que, pendant toute la durée de la transformation, la masse, qui ne peut plus affecter une figure d'équilibre, se façonne de manière, non pas à s'éloigner toujours le moins possible d'une telle figure, mais à présenter constamment un ensemble de figures d'équilibre; en d'autres termes, selon lui, pendant l'accomplissement du phénomène, la figure se compose de portions renflées d'onduloïde alternant avec des portions cylindriques, ces dernières diminuant de plus en plus en diamètre tandis qu'elles augmentent en longueur, et les premières se renflant davantage en se raccourcissant, jusqu'à ce que, dans les portions cylindriques, il y ait égalité entre la longueur et la circonférence; ces mêmes portions constituant alors des cylindres instables, se transforment à leur tour; de là les sphères et les sphérules.

Cette idée, difficilement admissible a priori, est d'ailleurs, en désaccord avec ce que montrent les expériences du § 400 dans celles-ci, quand le rapport entre l'écartement et le diamètre des bases solides égale ou surpasse très peu la limite de la stabilité, de manière que la transformation s'effectue avec assez de lenteur pour qu'on puisse bien observer les changements de la ligne méridienne, cette dernière forme toujours une courbe parfaitement continue, jusqu'à ce que, le milieu de l'étranglement n'ait plus qu'une petite épaisseur; alors seulement on voit se développer avec rapidité le filet cylindrique. Aussi Beer, à qui j'avais fait part de mes remarques, a-t-il reconnu son erreur²⁴⁸

§ 424. Les assemblages de lames liquides ont aussi leurs conditions de stabilité, et l'on a vu (§ 210) comment M. Lamarle à soumis ce sujet à une théorie précise. Je terminerai ce chapitre par le résumé d'un travail de M. Duprez²⁴⁹ sur un phénomène dans lequel les pressions capillaires combinées avec l'action de la pesanteur produisent des effets curieux de stabilité et d'instabilité.

On savait qu'un vase plein de liquide et dont le goulot est suffisamment étroit, peut être renversé, l'orifice ouvert, sans que le liquide s'en échappe, et l'on attribuait simplement ce fait à la pression atmosphérique exercée de bas en haut à l'orifice; or M. Duprez à reconnu qu'avec des précautions convenables, on peut maintenir le liquide ainsi suspendu dans un vase dont l'orifice n'est nullement étroit: il est parvenu à soutenir l'eau à un orifice de 19mm,85 de diamètre. Pour obtenir ce résultat, il faut que la surface du liquide à l'orifice soit plane et bien horizontale, condition que M. Duprez réalise au moyen d'un appareil ingénieux.

Il était difficile de comprendre comment les physiciens s'étaient arrêtés à l'idée de la pression atmosphérique comme cause unique des phénomènes de ce genre; en effet, si cette pression seule soutenait le liquide à un orifice étroit, elle devrait évidemment le soutenir à un orifice d'un diamètre quelconque; pourquoi donc y a-t-il une limite que l'on ne peut dépasser?

A l'époque où M. Duprez faisait ses observations, je m'occupais déjà des questions relatives à la stabilité des surfaces liquides; je ne tardai pas à trouver les principes qui servent de base à l'explication complète du phénomène dont il s'agit ici et à la détermination théorique du diamètre limite, et je suggérai ces principes à M. Duprez, comme il se plaît à le reconnaître dans son Mémoire.

Supposons la surface du liquide à l'orifice mathématiquement plane et horizontale, et écartons toute cause accidentelle de trouble; il est clair que le liquide demeurera soutenu par la pression atmosphérique, quelque grand que soit le diamètre de l'orifice.

²⁴⁸ *Ueber die Transformation des flüssigen Cylinders* (ANN. DE M. POGGENDORFF, vol. CII, p. 320).

²⁴⁹ *Sur un cas particulier de l'équilibre des liquides* (MÉM. DE L'ACAD. DE BELGIQUE, t. XXVI, 1851, et t. XXVIII, 1854).

Imaginons maintenant que la surface liquide éprouve une déformation excessivement petite qui la rende concave sur une moitié environ de son étendue, et, par suite, convexe sur l'autre moitié; dès lors l'équilibre ne pourra plus avoir lieu au point de vue de la pesanteur: à cause de la différence de niveau, le liquide de la portion convexe tendra à tomber et à laisser entrer l'air par la portion concave; mais, d'autre part, une surface plane est, nous le savons, stable au point de vue des forces moléculaires, quelle que soit sa grandeur, de sorte que, sous l'action de ces mêmes forces, la petite déformation tendra à s'effacer; en d'autres termes, les pressions capillaires correspondantes à la portion convexe l'emporteront sur celles qui appartiennent à la portion concave, et tendront conséquemment à rétablir la surface plane; il y aura donc lutte entre la pesanteur et pressions capillaires.

Or, pour une même différence de niveau, les courbures des deux portions de la surface, et conséquemment les différences de pression capillaire, seront évidemment d'autant plus faibles que le diamètre de l'orifice sera plus grand; il y a donc nécessairement une limite de diamètre en deçà de laquelle les pressions capillaires prédominent, de façon que la surface liquide est stable, tandis qu'au delà c'est la pesanteur qui l'emporte et détermine ainsi l'écoulement du liquide.

D'après cela, pour arriver à une valeur théorique du diamètre limite, il suffirait de connaître, pour une petite différence de niveau, les rayons de courbure de deux sections normales rectangulaires aux sommets respectifs de la portion convexe et de la portion concave, en fonction du diamètre de l'orifice; avec ces éléments, on calculerait la différence des pressions capillaires correspondantes aux deux sommets en question, on l'égalerait au terme représentant l'action de la pesanteur, et l'on résoudrait l'équation par rapport au diamètre.

Mais comment se procurer ces données? Quand le diamètre de l'orifice est assez grand pour que le liquide refuse de se maintenir suspendu, l'échange entre ce liquide et l'air s'effectue d'une manière si rapide qu'il est impossible d'observer l'altération originaire de la surface. M. Duprez surmonte la difficulté en employant mon procédé de l'immersion de l'huile dans le liquide alcoolique : un vase cylindrique en verre de 8 centimètres de diamètre intérieur et de 7 de hauteur, est introduit, l'ouverture en bas, dans le liquide alcoolique, puis exactement rempli d'huile à l'aide de moyens que M. Duprez indique; ce vase est soutenu à une certaine hauteur dans le liquide ambiant, de façon que la surface de l'huile à l'orifice soit libre, et la quantité d'huile est telle que cette surface est plane. Si les densités des deux liquides sont égales, la surface de l'huile conserve, on le comprend, sa forme plane; mais si l'on ajoute au liquide ambiant un excès croissant d'alcool, on atteint un point où la pesanteur reprend ses droits, sur l'huile, et où la stabilité n'est plus possible; or il est aisé de rendre l'excès d'alcool assez petit pour que la déformation s'effectue avec une excessive lenteur, et qu'ainsi on puisse l'examiner parfaitement.

En opérant de cette manière, M. Duprez a constaté que la déformation consiste effectivement dans le partage de la surface en une seule portion convexe et une seule portion concave, et il a pu, à l'aide de moyens convenables, déterminer avec une approximation suffisante les éléments indiqués plus haut, ce qui le conduit à la formule

$$D = 5,485\sqrt{h},$$

dans laquelle D est le diamètre limite, et h la hauteur à laquelle le liquide s'élèverait dans un tube capillaire d'un millimètre de rayon.

M. Duprez en déduit, pour l'eau distillée à la température ordinaire, $D = 21\text{mm}, 13$. Or, avant de recourir à la méthode ci-dessus, il était arrivé à la valeur approchée du diamètre limite relatif au même liquide, par une voie essentiellement différente: avec un

diamètre inférieur au diamètre limite, le liquide peut demeurer suspendu en présentant, à l'orifice, une surface convexe ou une surface concave; mais si, par un moyen approprié on augmente jusqu'à un certain point cette convexité ou cette concavité, le liquide s'écoule. M. Duprez a mesuré, pour un nombre suffisant de diamètres, les flèches respectives des surfaces convexes et concaves à l'instant de la rupture de l'équilibre, et il les nomme *flèches de rupture*. Avec ces données, il lie d'une manière générale la flèche de rupture au diamètre correspondant par une équation empirique, et égalant, dans celle-ci, la flèche à zéro, il obtient le diamètre limite pour le cas d'une surface plane. Il trouve ainsi, à l'égard de l'eau distillée, la valeur 21mm,44, valeur bien peu différente de celle qui résulte de la méthode théorique.

L'accord si satisfaisant de ces deux valeurs, obtenues par des méthodes qui n'ont absolument rien de commun, ne peut laisser aucun doute sur la légitimité de la formule mentionnée plus haut, formule d'après laquelle le diamètre limite est proportionnel à la racine carrée de la hauteur capillaire du liquide.

Ces mêmes valeurs surpassent un peu le diamètre 19mm,85 trouvé par l'expérience directe; mais cela doit être, car, dans cette expérience, il est impossible d'éviter de petites causes de trouble qui, lorsqu'on approche de la limite, suffisent pour amener la destruction de l'équilibre. M. Duprez soumet la formule à de nouvelles vérifications, en l'appliquant à trois autres liquides, l'alcool, l'huile d'amande douce et l'éther sulfurique : il cherche également, pour chacun de ceux-ci, le diamètre limite par la méthode des flèches de rupture et par la formule, et il arrive encore à des résultats concordants. Voici, en effet, ces résultats:

Alcool	{	par les flèches, 13mm,14,
		par la formule, 13mm,48.
Huile d'amande	{	par les flèches, 15mm,00,
		par la formule, 15mm,03.
Éther	{	par les flèches, 12mm,02,
		par la formule, 12mm,48.

L'accord est moins satisfaisant pour l'éther, mais, à l'égard de ce liquide, M. Duprez n'a mesuré les flèches de rupture que dans un seul tube.

Enfin M. Duprez étend les mêmes principes à l'explication du fait bien connu, qu'il est impossible de verser un liquide dans un vase à goulot étroit: le liquide prend, dans l'orifice, une surface assez stable pour que l'échange avec l'air intérieur au vase ne puisse s'opérer.

CHAPITRE XI.

Applications des propriétés des cylindres liquides instables, ou, plus généralement, des figures liquides dont une dimension est considérable relativement aux deux autres: théorie de la formation des gouttes au bord de certaines lames; théorie de l'explosion des bulles; théorie de la constitution des veines liquides lancées par des orifices circulaires.

§ 425. J'ai averti (§ 153) que je donnerais l'explication de la génération des gouttes au bord des disques liquides de Savart. Disons auparavant que Magnus, dans le passage de ses *Recherches hydrauliques* relatif aux disques dont il s'agit (§ 333), a essayé de résoudre la question : il regarde, ainsi qu'on l'a vu, la lame comme allant toujours en diminuant d'épaisseur de la partie centrale jusqu'au bord; il suppose qu'à ce bord la lame devenue très mince éprouve des déchirures, et que les portions ainsi séparées se contractent, par l'attraction de leurs molécules, en autant de petites masses, lesquelles constitueraient les gouttes.

Ces idées ne s'accordent pas avec les résultats de M. Hagen (§ 153), si fortement appuyés, comme on a pu s'en convaincre, et suivant lesquels le minimum d'épaisseur ne serait pas au contour du disque; d'ailleurs elles ne rendent raison ni de la présence du bourrelet observé par Savart à ce contour, ni, de la vitesse plus grande des gouttes lancées par les bords de l'échancrure que produit dans la lame l'introduction d'un obstacle solide, ni des directions tangentielles de ces dernières gouttes.

§ 426. Abordons actuellement l'explication annoncée. Considérons ce qui se passe immédiatement après l'ouverture des deux orifices d'où s'échappent, les veines opposées (§ 232), pendant que le disque liquide croît en diamètre. Ce disque constitue une figure de révolution, dont la section méridienne présente évidemment une courbure très forte à son équateur, c'est-à-dire au bord même de la nappe; or cette forte courbure détermine nécessairement une pression capillaire énergique dirigée suivant le rayon du disque et en sens contraire du mouvement; au bord du disque, le liquide se trouve donc sollicité par deux forces opposées, dont l'une tend à l'éloigner du centre et l'autre à l'en rapprocher; et de là doit résulter un effet analogue à celui qui a lieu à la rencontre des deux veines, où deux forces opposées sont également en présence, c'est-à-dire que le liquide doit éprouver un déplacement latéral; en d'autres termes, pendant que le disque se développe, le liquide refoulé doit former un bourrelet tout le long de son contour. Cela posé, pendant que le disque va en augmentant, ce bourrelet tend, d'une part, à grossir par les causes mêmes qui lui donnent naissance, et, d'autre part, à s'amincir par suite de son extension suivant la circonférence croissante du disque, et l'on peut admettre que ces deux effets se neutralisent plus ou moins, de façon que le bourrelet varie peu en grosseur jusqu'à ce que le disque ait atteint son plus grand diamètre. Or ce même bourrelet ayant la forme d'une sorte de cylindre qu'on aurait courbé en anneau, constitue une figure liquide instable, et doit de toute nécessité se résoudre, pendant son développement, en masses isolées, comme l'anneau d'huile du § 368. A la vérité, il tient, par son bord intérieur, à la lame liquide; mais de là naît simplement une légère résistance, qui, d'après ce qu'on a vu à l'égard des cylindres, doit se borner à rendre les divisions un peu plus longues, sans empêcher la transformation.

Maintenant le bourrelet, en vertu de l'inertie de sa masse totale, ne peut perdre complètement sa vitesse en même temps que la portion de la lame à laquelle il adhère immédiatement; les petites masses dans lesquelles il s'est converti se sépareront donc du contour de la lame, et seront lancées avec leur petit excès de vitesse acquise. En ce moment, la pression capillaire doit reformer rapidement un nouveau bourrelet, qui se résout bientôt, comme le premier, en masses isolées, et ainsi de suite. Telle est, j'en

suis convaincu, la véritable théorie de la génération et de la projection des gouttes, et elle s'applique également aux gouttes lancées par le bord des lames ouvertes et sans auréole du premier Mémoire de Savart (§ 230).

Voyons si cette théorie, qui rend ainsi raison des phénomènes généraux, satisfait de même à tous les détails observés par Savart, par M. Hagen et par Magnus.

Dès que les petites masses dans lesquelles se résout l'un des bourrelets successifs se séparent les unes des autres, chacune des portions du bord comprises entre elles n'ayant plus que la petite épaisseur de la lame elle-même, se trouve aussitôt soumise, par suite de sa forte courbure transversale, à une pression capillaire très énergique; cette pression agissant sur des points où le liquide n'a plus qu'une faible vitesse de translation, doit déterminer un retrait vers le centre du disque, et un commencement de bourrelet; mais comme les petites masses sont encore adhérentes au disque par leurs bases et continuent, en vertu de leur inertie, leur mouvement de translation, les portions intermédiaires du bord doivent paraître creusées, et chaque petite masse doit se montrer au sommet d'un angle saillant. Or c'est précisément l'aspect que décrit Savart dans son premier Mémoire, à l'égard des lames ouvertes et sans auréole, « dont le contour libre, *légèrement dentelé*, lance un grand nombre de gouttelettes, *qui partent des angles saillants des dentelures*. »

Savart ne fait pas la même description du contour des lames de son second Mémoire; il dit seulement (§ 232) que « les nappes sont constamment entourées d'un petit bourrelet arrondi d'où s'échappent une multitude de gouttelettes »; mais M. Hagen avance que les gouttes *étirent fortement la lame*; or c'est là précisément l'apparence qui doit résulter de l'ensemble de leur petit mouvement en avant et du petit retrait des portions intermédiaires.

A l'instant où une série de gouttes quitte complètement le disque, les angles saillants dont je viens de parler doivent s'effacer brusquement et se convertir en des portions de bourrelet; celles-ci constituent alors, avec les portions précédemment formées, un bourrelet continu, qui poursuit son mouvement de retrait jusqu'à ce que, grossissant toujours et diminuant ainsi de courbure méridienne, sa pression capillaire cesse de l'emporter sur le reste de force qui pousse en avant la portion de la lame à laquelle il adhère; alors il recommence à marcher lui-même en avant pendant qu'il effectue sa transformation en masses isolées; puis les phénomènes précédents se reproduisent, et ainsi de suite; le diamètre du disque doit donc manifester une succession rapide d'accroissements et de diminutions, comme l'a observé M. Hagen. Ajoutons que tous ces phénomènes ne peuvent s'accomplir avec une parfaite uniformité tout le long du contour: le bourrelet, on le comprend, n'a pas, en général, la même épaisseur dans toute son étendue, de sorte que sa transformation ne s'effectue pas en même temps partout; de là les irrégularités signalées par M. Hagen.

Quand, au moyen d'un fil transversal, on détermine une échancrure dans le disque liquide, la pression capillaire doit également refouler les deux bords de celle en y formant des bourrelets, bien que la présence de ces derniers ne soit point signalée par M. Hagen et par Magnas. Chacun de ces bourrelets constitue aussi une figure allongée qui doit, pendant le trajet du liquide dont elle est formée, se résoudre en petites masses, et ces masses, dès qu'elles sont libres, doivent s'échapper dans les directions mêmes, de leurs mouvements de translation; de là les gouttes lancées par les bords de l'échancrure, et leurs directions tangentielles. En outre, dans ces mêmes bourrelets, il n'y a point d'extension du liquide, et conséquemment la tension ne peut amoindrir la vitesse; celle-ci, on le comprend, n'est que faiblement altérée par l'adhérence latérale des bourrelets avec la lame, et les gouttes qui prennent leur origine dans ces bourrelets doivent ainsi

être projetées beaucoup plus loin que les autres, comme l'a observé Magnus.

Enfin on peut montrer aux yeux un bourrelet se formant au bord libre d'une lame, son retrait rapide et sa conversion subséquente en masses isolées; il suffit, pour cela, de s'arranger, dans l'expérience du § 368, de manière que, l'une au moins des deux lames planes d'huile ait une assez grande épaisseur; alors son retrait, quand on l'a crevée, s'effectue avec assez peu de rapidité pour qu'on distingue parfaitement un bourrelet tout le long du bord de l'ouverture, bourrelet qui, parvenu à l'anneau métallique, y constitue l'anneau liquide régulier que nous connaissons, et qui ne tarde pas à se résoudre en petites masses.

Dans cette expérience, il est vrai, la lame est formée d'un liquide en repos et le bourrelet marche du centre à la circonférence, tandis que, dans les expériences de Savart, le liquide de la lame est en mouvement, et le retrait s'effectue de la circonférence vers le centre; mais ces différences n'ont évidemment aucune portée théorique dans la question.

§ 427. Il est clair que, toutes les fois qu'une lame présentera un bord libre, la forte pression capillaire à ce bord y déterminera, comme dans les cas ci-dessus, la formation d'un bourrelet, et que celui-ci se résoudra de même en masses isolées c'est ce qui arrive, par exemple, ainsi que je l'ai dit (§ 235), à l'égard des lames qu'on développe en lançant le liquide obliquement en l'air. Dans certaines circonstances, le liquide qui constitue le bourrelet est animé d'un mouvement de translation dans le sens de la longueur de ce bourrelet, comme aux deux bords de l'échancrure produite dans un disque liquide de Savart, aux bords des lames résultant de la rencontre de deux veines qui forment un angle entre elles (§ 234), etc.

§ 428. Les mêmes principes vont nous servir à rendre raison d'un fait mystérieux décrit d'abord par Hooke (§ 318), puis par Leidenfrost (§ 321), et que Fusinieri a cherché à expliquer (§ 324) en partant de sa théorie; je veux parler de l'explosion des bulles. Il résulte des observations, que le phénomène est le plus prononcé quand la lame est arrivée à une très grande minceur alors, comme on l'a vu, elle fait entendre en éclatant un bruit perceptible, et se convertit en une sorte de poussière liquide qui est emportée à plus d'un mètre de distance.

On ne peut admettre qu'à l'instant même où la lame se perce en un point, tout le reste de cette lame se change simultanément en minimes gouttelettes: une semblable transformation échapperait à tout principe théorique; d'ailleurs il suit du résultat du § 121 que la pression exercée sur l'air intérieur par une bulle de savon de 5 centimètres de diamètre, comme celles de Leidenfrost, équivaut à la pression d'une colonne d'eau n'ayant qu'environ 0mm,04 de hauteur²⁵⁰; or cette addition si faible à la pression atmosphérique extérieure ne peut déterminer qu'une diminution insensible du volume de l'air contenu dans la bulle, et conséquemment, si la lame se transformait en globules sur toute son étendue à la fois, l'air intérieur, si peu comprimé, et trouvant, en outre, une infinité d'issues en même temps, ne pourrait prendre, eu se détendant, qu'un mouvement presque nul; dès lors pas d'explosion et pas de transport notable des globules.

Il faut donc, de toute nécessité, que la conversion en globules s'effectue successivement, à partir d'un premier point, où la rupture s'est faite. D'après cela, voyons comment les choses doivent se passer. Dès qu'une petite ouverture s'est formée, elle s'accroît rapidement par le retrait de la lame; mais, en même temps, un autre effet se produit, savoir la génération d'un bourrelet tout le long du bord de l'ouverture, ainsi

²⁵⁰Dans le § 121, il s'agit du liquide glycérique, et non de l'eau de savon; mais les tensions de ces deux liquides ne différant pas sensiblement (§ 299), il en est de même, à égalité de diamètre, des pressions exercées par leurs bulles respectives.

que nous l'avons vu dans la lame d'huile du § 426; et comme, à cause de la grande minceur de la lame d'eau de savon, les dimensions transversales de ce bourrelet sont excessivement minimes, il doit se transformer en globules avec une extrême vitesse. Si, dans l'expérience de la lame d'huile, on ne voit pas le bourrelet se transformer avant qu'il ait atteint l'anneau métallique, c'est que le phénomène est considérablement ralenti (§ 379) par la viscosité de l'huile et surtout par la présence du liquide alcoolique ambiant.

Maintenant, dans notre bulle, les deux effets ci-dessus sont accompagnés d'un troisième: aussitôt qu'une ouverture existe, la bulle, nous le savons, commence à diminuer de diamètre, en chassant au dehors l'air qu'elle contenait; et, bien que la force qui agit ainsi soit faible, elle expulse l'air avec rapidité, parce qu'elle est continue et croissante, et que, d'autre part, l'ouverture va en grandissant: on a la preuve de cette rapidité dans une expérience de M. Henry (§ 151); or l'air ainsi vivement expulsé emporte au loin les globules ci-dessus. Mais dès que cette première série de globules est enlevée, un nouveau bourrelet se reforme au bord de l'ouverture agrandie, puis se résout également en globules qui sont emportés comme les précédents, et ainsi de suite. En conséquence de la ténuité de la lame, toutes ces générations de séries de globules, bien que successives, s'accomplissent en un clin d'oeil, de sorte que l'observateur ne peut constater que le résultat final, savoir la présence et le mouvement de la poussière liquide dans l'air environnant.

On le voit, cette explication, qui repose sur des principes et des faits bien établis, rend compte de toutes les particularités du phénomène.

§ 429. Du reste, pour la mettre hors de doute, je l'ai soumise à une épreuve expérimentale: je me suis dit que si, dans une bulle qui éclate, la production des globules s'effectue en réalité par séries successives, il devait en être de même à l'égard d'une lame plane; or, dans ce dernier cas, la chose pouvait se vérifier, car il suffisait que la lame, lors de sa rupture, fût très voisine d'une surface plane, sur laquelle les globules ou gouttelettes iraient marquer leurs traces.

D'après cela, on a opéré ainsi qu'il suit: on plaçait, sur une tablette plane et horizontale, une feuille d'un papier légèrement absorbant et coloré en brun pâle (papier de paille); ensuite on développait une lame de liquide glycérique dans le grand anneau en fil de fer qui avait servi, aux expériences des §§186bis et 392, cet anneau avec sa lame était maintenu alors pendant quelques moments dans une position verticale, afin que l'excès de liquide vînt s'accumuler en gouttes a point le plus bas; ces gouttes enlevées, on posait doucement l'anneau, les pieds en l'air, sur le papier. Le fil de fer qui constitue cet anneau ayant 3mm d'épaisseur la lame se trouvait à 1mm,5 du papier. Les choses étant ainsi préparées, on crevait la lame, et, afin que le retrait de celle-ci eût à parcourir un plus grand espace, la rupture était produite généralement en un point très rapproché du contour intérieur de l'anneau. Pour cette dernière opération, on n'a pas employé, comme dans les autres expériences où il fallait briser des lames, une pointe de papier à filtre, parce que celle-ci aurait pu déprimer la lame et l'amener en contact avec le papier; on a fait usage d'une aiguille à coudre rougie à la lampe: la lame éclate dès que la pointe de cette aiguille la touche.

Aussitôt la lame brisée, on enlevait l'anneau pour mieux observer les traces des gouttelettes; or, à travers les irrégularités qu'elles présentaient, on a nettement reconnu leur disposition en plusieurs séries distinctes, placées les unes derrière les autres par rapport au point de rupture. L'expérience a été répétée quinze fois, et presque toujours avec des résultats du même ordre, plus ou moins bien accusés; c'est à peine si deux d'entre eux ont dû être écartés.

On a procédé de différentes manières d'abord, après avoir formé la lame, on la tenait verticalement jusqu'à ce qu'il s'y montrât des zones horizontales rouges et vertes bien caractérisées, et, quand l'anneau était posé sur le papier, on crevait la lame au point où ces zones indiquaient la plus grande épaisseur. En second lieu, on ne laissait la lame verticale que pendant un temps beaucoup moindre, puis on inclinait successivement l'anneau dans différents sens pour faire disparaître les zones naissantes. Lorsque l'anneau est posé, la lame est légèrement bombée; c'est que, pendant qu'on descend l'anneau vers le papier, la résistance de l'air fait rester le milieu de la lame un peu en arrière, et que le contact de l'anneau mouillé avec le papier est assez intime pour que l'excès d'air emprisonné ne puisse s'échapper; on lui donnait issue en soulevant un peu l'anneau d'un côté; dès que celui-ci était remplacé, la lame se montrait plane. En troisième lieu, on laissait subsister la convexité, et l'on attendait une minute; on voyait alors se développer des anneaux concentriques de diverses couleurs; enfin on crevait la lame soit en son milieu, soit près de son bord. Je reproduis ici (fig. 104 et 105), au quart de leur grandeur, les deux meilleurs résultats; celui de la fig. 104 a été obtenu par le second procédé, et celui de la fig. 105, par le troisième; le point de rupture est en *a*.

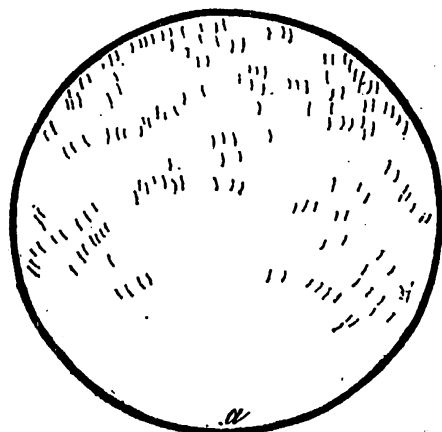


Fig. 104

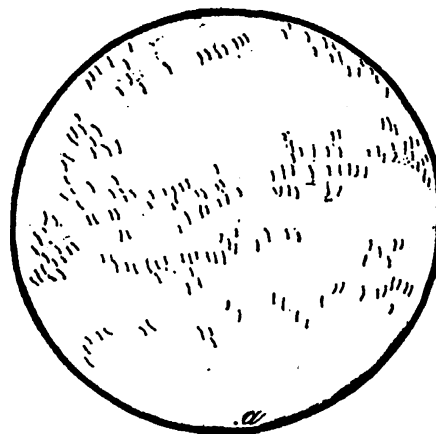


Fig. 105

Chaque série de gouttelettes se formant pendant le retrait rapide de la lame, participe de la vitesse de ce mouvement; les gouttelettes vont donc rencontrer le papier sous une très obliquité, de sorte que leurs traces ne sont pas rondes, mais allongées dans le sens du retrait; de plus, quand on les observe immédiatement après leur production, on reconnaît que la plupart présentent une suite de renflements et d'étranglements; c'est qu'en vertu de leur forme allongée, elles ont commencé à éprouver la transformation spontanée de semblables figures, et que cette transformation a été arrêtée par l'adhérence croissante avec le papier qu'elles imbibent. Quant aux irrégularités et aux interruptions de ces ensembles de traces, elles proviennent évidemment de ce que la

lame n'a pas une épaisseur égale partout²⁵¹.

§ 430. Dans le Mémoire résumé au § 167, M. Van der Mensbrugge tire de notre principe de la transformation spontanée des figures liquides allongées, l'explication d'un fait qui se montre dans certains cas d'étalement d'un liquide sur un autre : par exemple, comme l'a observé M. Tomlinson²⁵², une gouttelette d'huile de lavande déposée sur l'eau distillée s'étale d'abord en une lame vivement colorée, puis, après quelques secondes, cette lame se subdivise en un grand nombre de filaments déliés, qui dessinent de petits polygones curvilignes dont l'ensemble rappelle l'aspect d'une fine dentelle; or ces filaments ne tardent pas à se résoudre en séries de petites lentilles.

§ 431. Nos principes expliquent de même complètement un autre phénomène, savoir la constitution des veines liquides lancées par des orifices circulaires, constitution que Savart a si admirablement étudiée au point de vue expérimental. Nous allons exposer notre théorie avec détail, en la mettant constamment en parallèle avec les observations de l'illustre physicien. Considérons une veine liquide s'écoulant librement sous l'action de la pesanteur par un orifice circulaire percé en mince paroi dans le fond horizontal d'un vasé. Les molécules du liquide intérieur au vase, qui affluent de tous les côtés vers l'orifice, conservent encore, comme on sait, immédiatement après leur sortie, des directions obliques au plan de cet orifice, d'où résulte un rétrécissement rapide de la veine à partir de l'orifice jusqu'à une section horizontale que l'on désigne improprement sous le nom de section contractée. Arrivées à cette section, qui est peu éloignée de l'orifice, les molécules tendent à prendre toutes une direction verticale commune, avec la vitesse correspondante à la hauteur du liquide dans le vase, et elles sont, en outre, sollicitées dans cette même direction verticale par leur pesanteur individuelle. Il

²⁵¹ Depuis que mon ouvrage est à l'impression, MM. Marangoni et Stetani ont fait paraître le Mémoire que j'ai inscrit au § 508 sous le n° 38. Ils ont étudié aussi, mais par un procédé tout différent du mien, et très ingénieux, ce qui se passe lors de la rupture des bulles. Ce procédé consiste essentiellement à rendre le liquide fluorescent par l'addition d'une substance convenable, telle que de l'esculine, et à provoquer la rupture de la bulle pendant que celle-ci est exposée à l'éclairement intermittent des étincelles d'un appareil de Ruhmkorff. Lorsque plusieurs bulles sont successivement soumises à l'expérience, il arrive, on le comprend, que pour l'une ou l'autre d'entre elles, une étincelle jaillit pendant la courte durée de la destruction de la lame; la persistance, bien que très minime, de l'impression sur la rétine permet donc d'observer la bulle dans une phase du phénomène de sa rupture.

Les auteurs ont constaté ainsi, en premier lieu, que lorsqu'une bulle éclate en un point, il s'y forme simplement une ouverture, qui grandit rapidement jusqu'à s'étendre à toute la lame; en second lieu, que le bord de cette ouverture est garni d'un bourrelet dentelé, analogue à celui des lames de Savart, et que l'angle saillant de chaque dentelure se prolonge en un filet incurvé vers l'extérieur.

Jusqu'ici tout est parfaitement d'accord avec ma théorie et avec mon expérience: les sphérules dans lesquelles se convertit le bourrelet, sphérules chassées à l'extérieur par le mouvement de l'air, étirent le bourrelet, et y produisent les angles saillants, dont elles se détachent avec des effilements. Mais les auteurs ajoutent que les filets sont terminés par des ramifications, lesquelles se résolvent en gouttelettes extrêmement minimes.

Si ces ramifications étaient réelles, si les auteurs n'ont pas été trompés par quelque illusion due à l'instantanéité de l'observation, le fait s'expliquerait bien difficilement; en effet, le bourrelet ne peut, semblait-il, présenter ainsi, en différents points de sa longueur, des angles saillants se prolongeant en filets, que s'il est étiré par de petites masses, ou sphérules, projetées à l'extérieur; et il n'est guère admissible que ce soit chacune de ces sphérules qui se subdivise ainsi pour donner lieu aux ramifications dont il s'agit. Je suis porté à croire qu'au moment de l'observation, les sphérules étaient déjà détachées et éloignées de la bulle, et que les auteurs portant surtout leur attention sur les dentelures et les filets, n'ont pas remarqué les sphérules disséminées dans l'air. Comme, après la projection des sphérules, les filets qu'elles laissent derrière elles doivent se convertir eux-mêmes en sphérules excessivement petites, c'est peut-être ce dernier phénomène que les auteurs ont pris pour des ramifications qui se transforment.

Je dois dire, cependant, que les auteurs ont répété un grand nombre de fois l'expérience, et qu'ils ne mentionnent d'autre variation dans l'aspect du phénomène, que celle de l'étendue de la portion de lame qui subsiste encore à l'instant de l'observation.

²⁵² *On the cohesion-figures of liquids* (PHILOS. MAGAZ. 4me Série, 1861, t. XXII, p. 249).

résulte de là que, l'orifice étant supposé circulaire, la veine tend à constituer, à partir de la section contractée, un cylindre sensiblement parfait et d'une longueur quelconque; mais cette forme est modifiée, comme on le sait encore par l'accélération que la pesanteur imprime à la vitesse du liquide, et le diamètre de la veine, au lieu d'être partout le même, va en décroissant plus ou moins à mesure qu'on s'éloigne de la section contractée.

Si les causes que nous venons de rappeler agissaient seules, la veine se montrerait donc simplement de plus en plus effilée à mesure qu'on la considérerait plus loin de la section contractée, sans perdre ni sa limpidité ni sa continuité. Mais il résulte de nos expériences et de nos principes, qu'une semblable figure liquide, dont la forme approche de celle d'un cylindre très allongé, doit se transformer en une série de sphères isolées ayant leurs centres rangés sur l'axe de la figure. A la vérité, il s'agit ici d'un liquide soumis à l'action de la pesanteur; mais il est évident que, pendant la chute libre d'un liquide, la pesanteur ne met plus aucun obstacle au jeu des attractions moléculaires, et que celles-ci doivent alors exercer sur la masse les mêmes actions figuratrices que si cette masse était sans pesanteur et à l'état de repos; c'est ainsi, par exemple, que les gouttes de pluie prennent, dans leur chute, la forme sphérique. Seulement, pour que la conclusion précédente fût tout à fait rigoureuse, il faudrait que toutes les parties de la masse fussent animées de la même vitesse, ce qui n'a pas lieu pour la veine; mais on comprend que, si cette différence peut apporter quelques modifications au phénomène, elle ne saurait empêcher la production de celui-ci.

Le liquide de la veine devra donc nécessairement arriver par degrés, pendant son mouvement, à constituer une série de sphères isolées.

Mais ce liquide se renouvelant continuellement, le phénomène de la transformation doit aller aussi en se renouvelant toujours. En second lieu, chaque portion du liquide commençant à être soumise aux forces figuratrices dès qu'elle fait partie du cylindre imparfait que tend à constituer la veine, c'est-à-dire dès l'instant où elle franchit la section contractée, et demeurant ensuite, pendant son trajet, sous l'action continue de ces forces, on voit que chacune des *divisions* de la veine doit commencer à se dessiner à partir de la section contractée, et descendre, emportée par le mouvement de translation du liquide, en se modifiant par degrés pour arriver à l'état de sphère isolée. Or il suit de là qu'à un instant donné, les divisions de la veine doivent se trouver dans une phase d'autant plus avancée de la transformation qu'on les considère à une distance plus grande de la section contractée, du moins jusqu'à celle où la transformation en sphères est complètement effectuée. De l'orifice à la distance où a lieu la séparation des masses, la veine doit évidemment être continue; mais à une distance plus grande, les portions de liquide qui passent, doivent être isolées les unes des autres.

Si donc les mouvements du liquide, tant celui de translation que celui de transformation, étaient assez lents pour qu'on pût les suivre des yeux, on verrait la veine formée de deux parties distinctes, l'une supérieure continue, l'autre inférieure discontinue. La surface de la première présenterait une suite de renflements et d'étranglements qui descendraient avec le liquide, en se renouvelant continuellement, et qui, imperceptibles à leur origine et jusqu'à une certaine distance de la section contractée, se prononceraient de plus en plus pendant leur mouvement de translation, les renflements devenant plus saillants et les étranglements plus profonds; enfin, ces divisions de la veine arrivant l'une après l'autre, dans leur plus grand développement, à l'extrémité inférieure de la partie continue, on les verrait s'en détacher, et tendre ensuite vers la forme sphérique. Or on sait, depuis les belles observations de Savart²⁵³ que telle est, en effet, la consti-

²⁵³ *Mémoire sur la constitution des veines liquides lancées par des orifices circulaires en mince paroi* (ANN.

tution réelle de la veine.

Ajoutons que, dans la même hypothèse du ralentissement des mouvements, on verrait la séparation de chacune des masses précédée de la formation d'un filet qui se résoudrait en masses plus petites. Si les choses se passaient exactement comme dans les cylindres, ces petites masses seraient des sphérules inégales, de sorte que chaque sphère isolée serait suivie de semblables sphérules; la partie discontinue de la veine se montrerait donc composée de sphères isolées de même volume et de sphérules inégales rangées dans les intervalles des premières, les unes et les autres étant emportées par le mouvement de translation, et se renouvelant sans cesse à l'extrémité de la partie continue. Mais l'accélération de la descente allonge les divisions et, par suite, les étranglements, pendant leur trajet; dès lors, en vertu de ce qui a été exposé au § 383, les filets doivent, en général, être assez épais, et les plus grosses des masses dans lesquelles ils se résolvent peuvent ne pas être très-inférieures en diamètre aux masses principales, auquel cas la dénomination de sphérules ne leur est pas applicable. C'est effectivement, ainsi qu'on le verra (§ 478), ce que l'expérience a constaté.

§ 432. Maintenant, le mouvement de translation étant trop rapide pour que les phénomènes qui se produisent dans la veine soient saisissables par l'observation directe, il doit résulter de là certaines apparences particulières. Rappelons ici que lorsqu'un cylindre liquide se résout en sphères, la vitesse avec laquelle la transformation s'effectue est accélérée, et commence par être extrêmement petite. A cause donc de cette petitesse originaire, et de la rapidité du mouvement de translation dans la veine, les effets de la transformation graduelle ne pourront devenir perceptibles qu'à une distance plus ou moins grande de la section contractée. Jusqu'à cette distance, le passage rapide des renflements et des étranglements devant l'oeil ne pourra donner lieu à aucun effet sensible; de sorte que cette portion de la veine se montrera sous la forme qu'elle affecterait si elle n'avait aucune tendance à se diviser. A partir de cette même distance, les renflements commençant à prendre un développement notable, la veine paraîtra aller en s'élargissant, jusqu'à une autre distance au delà de laquelle le diamètre se montrera à peu près constant.

Telle est, en effet, comme l'ont encore montré les observations de Savart, la forme que présente à l'observation directe une veine soustraite à toute influence étrangère.

Enfin on sait qu'à partir de l'orifice jusqu'au point où elle commence à paraître s'élargir, la veine se montre limpide, tandis qu'au delà elle paraît plus ou moins trouble; et Savart a parfaitement expliqué ces deux aspects différents, ainsi que d'autres apparences curieuses que présente la partie trouble quand on n'a pas écarté les influences étrangères : la limpidité de la portion supérieure est due au peu de développement des renflements et des étranglements qui s'y propagent, et le trouble ainsi que les autres apparences du reste de la veine, résultent du passage rapide devant l'oeil, d'abord des renflements et des étranglements devenus plus prononcés, puis, plus bas, des sphères isolées et des masses plus petites interposées.

§ 433. Mais nous pouvons aller plus loin. Deux conséquences découlent immédiatement de notre explication de la constitution de la veine. En premier lieu, les divisions se transformant pendant leur descente, il est clair que l'espace parcouru par une division pendant le temps qu'elle met à effectuer une partie donnée de sa transformation, sera d'autant plus grand qu'elle descendra plus vite, ou, en d'autres termes, que la charge, c'est-à-dire la hauteur du liquide dans le vase, sera plus considérable; d'où il suit évidemment que, pour un même orifice, la longueur de la partie continue de la veine doit croître avec la charge. Or c'est ce que confirment les observations de

Savart. En second lieu, puisque la transformation d'un cylindre est d'autant plus lente que le cylindre a un plus grand diamètre, le temps qu'emploiera une division de la veine pour effectuer une même partie de sa transformation, sera d'autant plus long que la veine aura plus d'épaisseur; d'où il suit que, si la vitesse d'écoulement ne change pas, l'espace que parcourra la division pendant ce temps, se d'autant plus considérable que le diamètre de l'orifice sera plus grand; par conséquent, pour une même charge, la longueur de la partie continue doit croître avec le diamètre de l'orifice, et c'est encore ce que vérifient les observations rapportées dans le Mémoire cité.

Quant aux lois qui régissent ces variations de la longueur de la partie continue, Savart déduit de ses observations, qui ont été faites en employant des veines d'eau, que, pour un même orifice, cette longueur est à peu près proportionnelle à la racine carrée de la charge, et que, pour une même charge, elle est à peu près proportionnelle au diamètre de l'orifice.

Nous allons examiner si ces deux lois elles-mêmes découlent aussi de notre explication.

§ 434. Imaginons, pour un instant, que la pesanteur cesse d'agir sur le liquide dès que celui-ci franchit la section contractée. Alors, à partir de cette section, la vitesse de translation sera simplement celle qui est due à la charge, et qui a, comme on sait, pour valeur $\sqrt{2gh}$, g désignant la pesanteur, et h la charge. Cette vitesse sera uniforme, et, par conséquent, si la veine n'avait pas de tendance à se diviser, elle demeurerait exactement cylindrique sur une étendue quelconque (§ 431). Maintenant, toutes les parties du liquide étant animées de la même vitesse de translation, ce mouvement commun ne pourra influer sur l'effet des actions figuratrices; de sorte que, par exemple, les modifications graduelles que subira chacun des étranglements, et le temps qu'il mettra à les accomplir, seront indépendants de la vitesse de translation.

Cela posé, considérons la tranche liquide infiniment mince qui doit constituer le cercle de gorge d'un étranglement, à partir de l'instant où elle quitte la section contractée. Cette tranche descendra avec une vitesse constante, et, en même temps, son diamètre ira en diminuant, jusqu'à ce que l'étranglement auquel elle appartient se transforme en filet, et alors la tranche dont il s'agit occupera le milieu de ce filet; puis le filet se désunira pour se convertir en sphérules. Comme nous l'avons fait voir ci-dessus, le temps employé à l'accomplissement de ces phénomènes, et pendant lequel la tranche liquide que nous avons considérée à parcouru la distance comprise entre la section contractée et le lieu qu'occupe le milieu du filet à l'instant précis de la rupture, est indépendant de la vitesse de translation, et, par conséquent, si le diamètre de l'orifice ne change pas, ce temps sera constant quelle que soit la charge. Or, dans un mouvement uniforme, l'espace parcouru pendant un temps déterminé étant proportionnel à la vitesse, la distance ci-dessus sera proportionnelle à $\sqrt{2gh}$, et, par suite, à \sqrt{h} . Comme nous aurons souvent à faire usage de cette même distance, nous la représenterons, pour abrégé, par D .

Maintenant, il est aisé de comprendre que, dans notre veine, la longueur de la partie continue ne diffère pas sensiblement de la distance D . En effet, la partie continue se termine à l'endroit précis où vient se produire, dans chaque filet, le plus élevé des points de rupture de celui-ci: car, à l'instant où la rupture s'effectue, tout ce qu'il y a au-dessus du point dont il s'agit se trouve dans des phases moins avancées de la transformation (§ 431), et possède, par conséquent, encore la continuité, tandis que tout ce qu'il y a au-dessous de ce même point est nécessairement déjà discontinu. Ainsi, d'une part, la partie continue de la veine commence à l'orifice et se termine à l'endroit où vient se produire le point de rupture le plus élevé de chaque filet; et, d'autre part, la distance D

commence à la section contractée et se termine au point correspondant au milieu de la longueur de chacun des filets à l'instant de leur rupture. La partie continue prend donc son origine un peu plus haut, mais aussi se termine un peu moins bas, que la distance D ; la différence des origines de ces deux grandeurs et celle de leurs terminaisons doivent, par conséquent, se compenser en partie; et comme ces différences sont toutes deux fort petites, l'excès de l'une sur l'autre sera, à plus forte raison, très de sorte que les deux grandeurs auxquelles elles se rapportent pourront, ainsi que je l'ai dit, être regardées sans erreur sensible comme égales entre elles.

En vertu de cette égalité, la longueur de la partie continue de la veine que nous considérons suivra donc sensiblement la même loi que la distance D , c'est-à-dire qu'elle sera à fort peu près proportionnelle à \sqrt{h} .

Ainsi, dans le cas imaginaire d'une vitesse de translation uniforme, nous retrouvons la première des lois données par Savart. Or il est clair que, dans une veine réelle, la vitesse s'écartera d'autant moins de l'uniformité que la charge sera plus considérable; d'où l'on peut inférer que, pour des charges suffisamment grandes, la longueur de la partie continue de la veine réelle devra encore suivre sensiblement cette loi. C'est d'ailleurs ce que nous allons démontrer d'une manière rigoureuse.

§ 435. Plaçons-nous donc dans le cas réel, c'est-à-dire considérons une veine soumise à l'action de la pesanteur, et dans laquelle, par conséquent, le mouvement de translation est accéléré. Alors, la vitesse que possède, après un temps t quelconque, une tranche horizontale du liquide emportée par le mouvement de translation, aura pour valeur $\sqrt{2gh} + gt$, le premier terme représentant la portion de la vitesse due à la charge, le second la portion due à l'action de la pesanteur sur la veine, et t étant compté à partir du moment où la tranche liquide franchit la section contractée. Rappelons ici qu'en vertu de l'accélération de la vitesse, la veine, si elle ne se divisait point, irait en s'amincissant indéfiniment de haut en bas (§ 431).

Cela posé, concevons que, sous la même charge et par un autre orifice de même diamètre, s'écoule, en même temps que la veine réelle dont il s'agit, une autre veine de même liquide placée dans la condition imaginaire du paragraphe précédent. Soit θ le temps employé dans cette seconde veine à parcourir la distance que nous avons désignée par D , c'est-à-dire celui qui se trouve compris entre l'instant où la tranche liquide qui doit constituer le cercle de gorge d'un étranglement passe à la section contractée, et l'instant de la rupture du filet dans lequel cet étranglement s'est transformé. Faisons, dans l'expression de la vitesse relative à la première veine, $t = \theta$, ce qui donne, pour cette vitesse après le temps θ , la valeur $\sqrt{2gh} + g\theta$ en d'autres termes, considérons la vitesse d'une tranche liquide appartenant à la veine réelle, après le temps nécessaire pour qu'une tranche appartenant à la veine imaginaire ait parcouru la distance D . D'après ce que nous avons vu dans le paragraphe précédent, si l'orifice demeure le même, ce temps est constant, quelle que soit la charge, en sorte que, dans l'expression ci-dessus, le terme $g\theta$ reste invariable quand on fait varier h . Nous pourrions donc, quelle que soit la valeur de θ , supposer la charge h assez considérable pour que le terme $\sqrt{2gh}$ soit très grand relativement au terme $g\theta$, et que ce dernier puisse, par conséquent, être négligé sans erreur sensible. Pour une valeur de θ qui réalisera cette condition, et, à plus forte raison, pour toutes les valeurs plus grandes encore, la vitesse d'une tranche de la veine réelle pendant le temps θ pourra être regardée comme constante et égale à celle d'une tranche de la veine imaginaire de sorte que, dans tout l'espace parcouru par la première pendant ce même temps à partir de la section contractée, la veine réelle, si elle ne se divisait pas, diminuerait fort peu en diamètre, et pourrait être regardée comme identique avec la veine imaginaire supposée également sans divisions.

Maintenant, il suit nécessairement de cette quasi-identité, que, pendant le temps θ , tout se passera sensiblement de la même manière dans les deux veines; par conséquent, le temps θ sera aussi à fort peu près celui qu'emploiera, dans la veine réelle, la tranche liquide correspondante au cercle de gorge d'un étranglement, pour accomplir les modifications que nous avons considérées, et l'espace qu'elle parcourra pendant ces modifications, pourra être regardé comme égal à la distance D relative à la veine imaginaire.

Or, puisque la partie continue de la veine réelle se termine un peu moins bas que cet espace, et se trouve, par suite, comprise dans la même portion de la veine, il suit encore de l'identité approchée ci-dessus, que cette partie continue différera à peine en longueur de celle de la veine imaginaire, et que, par conséquent, à partir de la moindre des charges considérées plus haut, les longueurs des parties continues des deux veines devront être régies à fort peu près par la même loi.

Nous arrivons donc enfin à cette conclusion, que, pour un même orifice, et à partir d'une charge inférieure suffisamment grande, la longueur de la partie continue de la veine réelle doit être sensiblement proportionnelle à la racine carrée de la charge.

En conséquence de la démonstration précédente, la charge inférieure dont il s'agit est celle sous laquelle le mouvement de translation du liquide commence à demeurer presque uniforme dans toute la partie continue de la veine réelle.

Ainsi, sous la condition d'une charge inférieure suffisante pour produire cette uniformité approchée, condition toujours réalisable, la loi indiquée par Savart comme établissant la relation entre la longueur de la partie continue et la charge, découle d'une manière nécessaire des propriétés des cylindres liquides.

Pour découvrir si cette loi doit encore être vraie lors qu'on emploie des charges plus faibles, il faut partir d'autres considérations; mais nous voyons dès à présent que si, dans ce dernier cas, la loi est différente, elle doit du moins nécessairement converger vers la proportionnalité dont il s'agit à mesure qu'on augmente la charge.

Remarquons ici que, pour un liquide donné, la charge sous laquelle la veine commence à se trouver dans la condition que nous avons déterminée, doit être d'autant moins considérable que le diamètre de l'orifice est plus petit. En effet, puisque, toutes choses égales d'ailleurs, la transformation d'un cylindre liquide s'effectue d'autant plus rapidement que le diamètre du cylindre est moindre, il en résulte que la valeur de θ diminuera avec le diamètre de l'orifice, et que, par conséquent, plus celui-ci sera petit, moins la valeur de h devra être considérable pour que, dans l'expression $\sqrt{2gh} + g\theta$ posée au commencement de ce paragraphe, le terme $g\theta$ soit négligeable à côté du terme $\sqrt{2gh}$ et, par suite, pour que la veine se trouve dans la condition dont il s'agit.

En outre, comme le temps θ varie avec la nature du liquide, il en sera nécessairement de même de la charge que nous considérons.

§ 436. Occupons-nous actuellement de la seconde loi, c'est de celle qui établit la proportionnalité approchée entre la longueur de la partie continue de la veine et le diamètre de l'orifice lorsque la charge demeure la même.

Reprenons, pour un instant, le cas imaginaire d'un mouvement de translation absolument uniforme. Alors la veine constituera, abstraction faite de ses divisions, un cylindre exact à partir de la section contractée, cylindre qui sera formé dans l'air, et libre sur toute sa surface convexe; en outre, le mouvement de translation du liquide étant sans influence sur l'effet des actions figuratrices, et aucune cause étrangère ne tendant à modifier la longueur des divisions, celles-ci prendront nécessairement leur longueur normale. On voit donc que, sauf la non simultanéité de la formation de ses divisions, notre veine imaginaire se trouvera précisément dans les mêmes conditions que

les cylindres auxquels se rapportent les lois récapitulées dans le § 384; par conséquent, si nous considérons en particulier l'un des étranglements de cette veine, il devra passer par les mêmes formes, et accomplir ses modifications dans le même temps, que l'un quelconque des étranglements qui résulteraient de la transformation d'un cylindre de même diamètre que la veine, formé du même liquide, et placé dans les conditions dont il s'agit.

Maintenant, le temps compris entre l'origine de la transformation et l'instant de la rupture des filets, est, d'après l'une de nos lois, exactement ou sensiblement proportionnel au diamètre du cylindre; et il est clair que cette loi s'applique tout aussi bien à l'un des étranglements en particulier, ou même simplement à son cercle de gorge, qu'à l'ensemble de la figure. Conséquemment, dans notre veine imaginaire, le temps qu'emploiera le cercle de gorge de chacun des étranglements pour arriver à l'instant de la rupture du filet, sera exactement ou sensiblement proportionnel au diamètre qu'aurait la veine s'il ne s'y produisait pas de divisions, c'est-à-dire à celui de la section contractée. Or la forme cylindrique de la veine supposée sans divisions ne commençant qu'à la section contractée, ce n'est aussi qu'à partir de là que commencent les actions figuratrices provenant de l'instabilité de cette même forme cylindrique. Il faut donc admettre que la tranche liquide qui doit constituer le cercle de gorge d'un étranglement, ne commence à éprouver les modifications qui résultent de la transformation, qu'à partir de l'instant où elle franchit la section contractée; ainsi, le temps que nous considérons prend naissance à ce même instant.

Mais ce temps compris entre l'instant où passe à la section contractée la tranche liquide qui doit constituer le cercle de gorge d'un étranglement et l'instant de la rupture du filet dans lequel cet étranglement se convertit, est celui que nous avons désigné par θ , et pendant lequel la tranche liquide parcourt la distance D ; dans notre veine imaginaire, le temps θ sera donc proportionnel au diamètre de la section contractée. D'un autre côté, le mouvement de translation étant supposé uni forme, la distance D sera proportionnelle au temps θ employé à la parcourir. Donc, en vertu de ces deux lois, la distance D sera proportionnelle au diamètre de la section contractée. Enfin, puisque la distance D ne diffère pas sensiblement de la longueur de la partie continue de la veine, cette longueur sera également proportionnelle au diamètre de la section contractée.

Maintenant on sait que, dans une veine liquide, le diamètre de la section contractée peut être considéré comme proportionnel à celui de l'orifice quand ce dernier surpasse dix millimètres, et qu'au-dessous de cette limite, la proportionnalité ne s'altère d'une manière bien notable, que lorsque le diamètre de l'orifice devient inférieur à un millimètre²⁵⁴. D'ailleurs, comme cette altération est attribuée à l'influence qu'exerce l'épaisseur, quoique très petite, des bords de l'orifice, il est probable qu'on la rendra moindre encore, en employant, ainsi que l'a fait Savart, des orifices évasés extérieurement, orifices qui peuvent être taillés de manière à avoir leurs bords fort tranchants. Ainsi, avec des orifices convenablement travaillés, on pourra sans doute, à partir d'un diamètre égal au plus à un millimètre, admettre, sans erreur notable, que le diamètre de la section contractée est proportionnel à celui de l'orifice.

D'après cela, puisque la longueur de la partie continue de notre veine imaginaire est proportionnelle au diamètre de la section contractée, elle sera également proportionnelle au diamètre de l'orifice, du moins à partir d'une valeur inférieure de ce dernier,

²⁵⁴ En effet, on déduit des résultats obtenus par Hachette (*Ann. de chim. et de phys. de Paris*, t. III, p. 78), que, pour un diamètre d'orifice égal ou supérieur à 10mm, le rapport entre le diamètre de la section contractée et celui de l'orifice est, en moyenne, 0,78; qu'en passant de 10mm à 1mm, le rapport n'augmente que jusqu'à 0,83; et enfin, que, pour un diamètre égal à 0mm,55, le rapport devient 0,88.

qui ne soit pas de beaucoup au-dessous d'un millimètre.

Si actuellement de la veine imaginaire nous passons à la veine réelle, nous n'avons qu'à supposer à la charge constante une valeur assez considérable pour que, dans toute l'étendue que nous assignerons aux variations du diamètre de l'orifice, la condition posée dans le paragraphe précédent soit satisfaite, de manière que, pour chacune des valeurs données à ce diamètre, la partie continue de la veine réelle ait sensiblement la même longueur que celle de la veine imaginaire correspondante; alors la loi qui régit cette longueur pourra être regardée comme la même dans les deux espèces de veines. D'après la première des deux remarques qui terminent le paragraphe précédent, on voit que si la charge commune remplit la condition dont il s'agit à l'égard de la plus grande des valeurs que l'on assigne au diamètre de l'orifice, elle la remplira, à plus forte raison, à l'égard de toutes les autres.

Nous sommes donc conduits à cette conclusion définitive : si, pour une même charge, on donne au diamètre de l'orifice des valeurs croissantes, depuis une valeur peu inférieure à un millimètre jusqu'à une autre valeur déterminée quelconque, et si la charge commune est suffisamment grande, la longueur de la partie continue de la veine sera proportionnelle au diamètre de l'orifice.

Ainsi la seconde des lois données par Savart découle encore, d'une manière nécessaire, des propriétés des cylindres liquides; et l'on voit, de même, que si, dans le cas d'une charge commune peu considérable, la loi se modifie, elle doit converger vers celle de Savart à mesure qu'on donnera à cette charge une valeur plus grande.

§ 437. Plaçons-nous maintenant en deçà de la limite à partir de laquelle la veine réelle peut être assimilée, dans sa partie continue, à la veine imaginaire correspondante; en d'autres termes, supposons la charge assez peu considérable ou le diamètre de l'orifice assez grand, pour que, dans l'étendue de la partie continue de la veine réelle, le mouvement de translation ne soit plus sensiblement uniforme. Alors aussi la veine tendra à s'amincir du haut en bas, et cet amincissement deviendra visible sur la portion limpide. La question des lois qui doivent, dans ces circonstances, régir la longueur de la partie continue, est assez compliquée; nous allons cependant tâcher de l'éclaircir.

Considérons une division de la veine à l'instant où son extrémité supérieure passe à la section contractée. Les deux tranches liquides entre lesquelles la division dont il s'agit se trouve comprise, partent de cette position avec des vitesses différentes: car, dans le petit trajet qu'a parcouru la tranche inférieure, sa vitesse s'est déjà un peu accrue par l'action de la pesanteur. Or il suit de cet excès de vitesse et de l'accélération du mouvement, que les deux tranches iront en s'éloignant de plus en plus l'une de l'autre à mesure qu'elles descendront, ou, en d'autres termes, que la portion de liquide comprise entre elles s'allongera graduellement pendant son mouvement de translation. Par conséquent, ainsi que je l'ai déjà indiqué au § 431, chacune des divisions, emportée avec la vitesse accélérée du liquide, augmentera graduellement en longueur jusqu'à l'instant de la rupture du filet, et conservera pendant sa descente un volume constant.

Dans ce cas, il est aisé de reconnaître deux genres d'influences, agissant en sens opposés sur la loi qui régit la longueur de la partie continue quand on fait varier la charge.

D'abord rappelons-nous que si le mouvement de translation était uniforme, la proportionnalité à la racine carrée de la charge serait toujours satisfaite, même à partir de charges très faibles (§ 434). Maintenant, si les divisions descendent avec la vitesse accélérée du liquide, et si l'on suppose qu'il ne résulte de là aucun changement dans la durée de leur transformation, elles parcourront pendant cette durée un espace plus considérable, en sorte que la partie continue sera plus longue, que si l'accélération

n'existait pas, et l'excès, comparé à la longueur qu'aurait la partie continue dans le cas du mouvement uniforme, sera notable sous une charge faible ou modérée, tandis qu'il sera négligeable sous une charge très forte, celle-ci rendant le mouvement, de translation dans la partie continue sensiblement uniforme. D'après cela, quand on passera de la première de ces deux charges à la seconde, le rapport des longueurs des parties continues qui leur correspondent respectivement sera plus rapproché de l'unité qu'il ne le serait si l'accélération était nulle, c'est-à-dire plus rapproché de l'unité que celui des racines carrées des charges.

Mais, ainsi qu'on l'a vu plus haut, les divisions ne peuvent descendre d'un mouvement accéléré sans s'allonger en même temps, et de là naît, nous le savons (§§381 et 407), une cause de diminution dans la durée de la transformation. Cette deuxième influence, savoir la diminution dans la durée de la transformation, diminution qui doit être d'autant plus prononcée que la vitesse de translation approche moins de l'uniformité, ou que la charge est plus faible, agit évidemment pour rendre la loi plus rapide que la proportionnalité à la racine carrée de la charge, et elle est conséquemment opposée à la première.

§ 438. En résumé donc, pour des charges moins considérables que celles qui rendraient le mouvement de translation du liquide sensiblement uniforme dans la partie continue de la veine, deux genres opposés d'influences agissent sur la loi suivant laquelle la longueur de cette partie continue varie avec la charge, le premier tendant à faire croître cette même longueur moins rapidement que la racine carrée de la charge, et le second tendant, au contraire, à la faire croître plus rapidement. Or, en vertu de leur opposition, ces deux genres d'influences se neutraliseront mutuellement en plus ou moins grande proportion; mais on doit regarder comme très peu vraisemblable que la neutralisation soit complète; ce qui nous conduit à cette première conclusion, que, sous des charges suffisamment faibles, la loi dont nous nous occupons s'écartera très probablement de celle de Savart; seulement il serait impossible de décider a priori dans quel sens.

En deuxième lieu, les influences que nous avons signalées ayant leur cause dans l'accélération du mouvement du liquide, il est clair que l'action de chacune d'elles, considérée isolément, décroît à mesure que l'on augmente la charge, et devient négligeable à partir de la première des charges sous lesquelles le mouvement du liquide devient sensiblement uniforme dans la partie continue. Or ce qui reste de la neutralisation mutuelle des deux actions opposées est nécessairement moindre, et probablement de beaucoup, que chacune d'elles en particulier, d'où il est à croire que cet excès deviendra négligeable à partir d'une charge beaucoup moins grande. Nous arrivons donc à cette seconde conclusion, que la première loi de Savart commencera sans doute à être vraie à partir d'une charge qui laissera encore au mouvement de translation du liquide dans la partie continue une accélération très notable.

Enfin, ce résultat combiné avec un principe que nous avons établi en terminant le § 435, nous fournit une troisième conclusion, savoir que la charge à partir de laquelle la veine commence en réalité à satisfaire à la première loi de Savart, sera d'autant plus faible que l'orifice sera plus petit: car il est évident qu'en passant d'un orifice à un autre, cette charge doit varier dans le même sens que celle à partir de laquelle l'accélération du mouvement du liquide devient négligeable. Mais je dis, de plus, que la variation dont il s'agit aura très probablement lieu dans un rapport beaucoup plus grand que celui des diamètres des orifices. En effet, soit h' la charge sous laquelle commence, pour un orifice et un liquide donnés, l'uniformité approchée du mouvement de translation, et θ' la valeur correspondante de θ . La charge h' devra être telle,

comme nous l'avons vu, que $\sqrt{2gh'}$ soit très considérable relativement à $g\theta'$, ou, en d'autres termes, que le rapport $\frac{\sqrt{2gh'}}{g\theta'}$ soit très grand. Prenons maintenant un orifice d'un diamètre moindre, et désignons par h'' la charge qui remplit, à l'égard de ce second orifice, la même condition que h' à l'égard du premier; soit aussi θ'' ce que devient θ pour le nouvel orifice. Si nous voulons que, dans la partie continue de la veine qui s'écoule par celui-ci, le mouvement du liquide ait le même degré d'uniformité que dans la partie continue de la précédente, nous devons évidemment poser

$$\frac{\sqrt{2gh'}}{g\theta'} = \frac{\sqrt{2gh''}}{g\theta''},$$

ce qui donne

$$\frac{\sqrt{h'}}{\sqrt{h''}} = \frac{\theta'}{\theta''},$$

et, par conséquent,

$$\frac{h'}{h''} = \frac{\theta'^2}{\theta''^2}.$$

Mais le temps θ est proportionnel au diamètre de la section contractée, et, par suite, à celui de l'orifice (§ 436); donc, au rapport $\frac{\theta'}{\theta''}$, on peut substituer celui des carrés des diamètres des deux orifices; d'où il résulte qu'en passant d'un orifice déterminé à un orifice moindre, la charge que nous considérons décroîtra comme le carré du diamètre de l'orifice. Or on doit regarder comme bien probable que la charge beaucoup plus faible à partir de laquelle la loi de Savart commence à se réaliser, de croîtra d'une manière analogue, c'est-à-dire dans un rapport de beaucoup supérieur à celui des diamètres.

§ 439. Passons à l'autre loi, c'est-à-dire à celle qui régit la longueur de la partie continue quand on fait varier le diamètre de l'orifice. Je dis, en premier lieu, que cette loi coïncidera avec la seconde de celles de Savart, lorsqu'on donnera à la charge commune la valeur à partir de laquelle la veine sortant par le plus grand des orifices employés commencerait en réalité à satisfaire à la première de ces lois.

En effet, remarquons d'abord que, sous la charge dont il s'agit, charge que nous désignerons par h_1 les veines sortant par tous les orifices moindres se trouveront, à plus forte raison, dans les conditions effectives de la première loi c'est ce qui résulte de la troisième conclusion du paragraphe précédent. Par conséquent, si nous substituons, pour un instant, à cette charge h_1 une charge assez considérable pour rendre la vitesse du liquide sensiblement uniforme dans toutes les parties continues, et si nous repassons de cette seconde charge à la précédente, les longueurs respectives des parties continues décroîtront toutes dans un même rapport, savoir dans celui des racines carrées des deux charges. Or, sous la plus grande de celles-ci, les longueurs dont il s'agit étaient entre elles comme les diamètres des orifices correspondants (§ 436); donc il en sera encore de même sous la charge h_1 , et, par conséquent, sous cette charge, la seconde loi de Savart sera satisfaite.

En deuxième lieu, je dis que sous une charge inférieure à h_1 , il n'en sera plus ainsi. Pour le faire voir, soit h_2 cette nouvelle charge, et désignons par h_3 la charge qui remplit, à l'égard de la veine sortant par le plus petit orifice, le même rôle que remplit h_1 , à l'égard de celle qui sort par le plus grand. Rappelons-nous que h_3 est inférieure à h_1 , et supposons h_2 comprise entre ces deux dernières. Alors, par conséquent, sous les charges h_1 et h_2 la veine sortant par le plus petit orifice se trouvera encore dans les conditions effectives de la première loi de Savart, tandis que, pour la veine qui sort

par le plus grand orifice, ces conditions ne commencent qu'à partir de h_1 ; si donc nous passons de h_1 à h_2 , la partie continue de la première veine décroîtra dans le rapport des racines carrées de ces deux charges; mais celle de la dernière veine décroîtra dans un rapport différent. Or, sous la charge h_1 , ces deux longueurs étaient entre elles comme les diamètres des orifices correspondants; donc, sous la charge h_2 elles se trouveront dans un autre rapport, et, par conséquent, la seconde loi de Savart ne sera plus satisfaite, du moins quant à ces deux veines extrêmes de la série comparées entre elles.

De tout cela résultent ces nouvelles conclusions: sous une charge commune suffisamment faible, la proportionnalité entre la longueur de la partie continue et le diamètre de l'orifice n'a plus lieu dans l'étendue totale que l'on assigne aux variations de ce diamètre; mais elle commence à se manifester lorsqu'on donne à la charge commune la valeur pour laquelle la veine sortant par le plus grand des orifices commence à se trouver dans les conditions effectives de la première loi de Savart.

Or nous allons voir que ces conclusions, ainsi que celles du paragraphe précédent, sont d'accord avec les résultats de l'expérience.

§ 440. Savart a fait, sur des veines d'eau soustraites à toute action étrangère, deux séries d'observations, l'une avec un orifice de six millimètres de diamètre, et l'autre avec un orifice de trois millimètres; les charges successives étaient les mêmes dans les deux séries. Les deux tableaux ci-dessous reproduisent les résultats obtenus, c'est-à-dire les longueurs de la partie continue correspondantes aux charges successives; ces longueurs ainsi que les charges sont exprimées en centimètres. J'ai placé, dans chaque tableau, une troisième colonne renfermant, en regard de chacune des longueurs de la partie continue, le rapport de celle-ci à la racine carrée de la charge correspondante.

DIAMÈTRE DE L'ORIFICE, 6mm.		
CHARGES	LONGUEURS de la PARTIE CONTINUE.	RAPPORTE à la RACINE CARRÉE DE LA CHARGE.
4,5	107	50,4
12	126	36,4
27	143	27,5
47	158	23,0

DIAMÈTRE DE L'ORIFICE, 3mm.		
CHARGES	LONGUEURS de la PARTIE CONTINUE.	RAPPORTE à la RACINE CARRÉE DE LA CHARGE.
4,5	24	11,3
12	39	11,3
27	58	11,2
47	78	11,4

Avant de discuter ces tableaux, remarquons ici que toutes les longueurs de la partie continue sont exprimées en nombres entiers, ce qui montre que Savart a pris pour chacune d'elles le nombre entier de centimètres le plus approchant, sans tenir compte de la fraction; d'ailleurs, ainsi que nous le verrons (§ 487), dans de semblables veines, la partie continue éprouve incessamment de petites variations de longueur; il résulte donc

de là que les longueurs données dans ces mêmes tableaux ne peuvent être en général qu'approximatives.

Cela posé, commençons par examiner le tableau relatif à l'orifice de 6mm. On voit que le rapport entre la longueur de la partie continue, et la racine carrée de la charge décroît considérablement de la première charge à la dernière; d'où il suit que, dans le cas d'une veine d'eau sortant par un orifice de 6mm de diamètre, si l'on ne fait croître la charge que jusqu'à 47 centimètres, la première loi de Savart est loin d'être satisfaite. Ainsi, la première conclusion du § 438 est conforme à l'expérience. De plus, le décroissement du rapport établit le sens dans lequel la loi réelle s'écarte de la loi de Savart, en deçà de la limite où celle-ci commence à être suffisamment approchée: on voit qu'alors la longueur de la partie continue augmente moins rapidement que la racine carrée de la charge.

En second lieu, d'après la marche du rapport dont il s'agit, on reconnaît que celui-ci converge vers une certaine limite, qui doit être peu au-dessous de 23, c'est-à-dire de la valeur correspondante à la charge de 47 centimètres. En effet, tandis que la charge reçoit des accroissements successifs de 7,5, de 15, et de 20 centimètres, le rapport diminue successivement de 14, de 8,9, et de 4,5 unités, et cette dernière différence est déjà assez peu considérable relativement à la valeur du dernier rapport; d'où l'on doit présumer que si l'on augmentait encore la charge, le décroissement ultérieur du rapport serait fort petit, et que l'on atteindrait bientôt une limite sensiblement constante, limite à partir de laquelle la première loi de Savart serait satisfaite.

D'après cela, cherchons quel est, pour la veine qui s'écoule sous la charge de 47 centimètres, le rapport entre les vitesses de translation du liquide à l'extrémité de la partie continue et à la section contractée. En négligeant le petit intervalle compris entre l'orifice et la section contractée, nous aurons pour la vitesse dont il s'agit à une distance quelconque l de cette section, la valeur $\sqrt{2g(h+l)}$; si donc l désigne la longueur de la partie continue, le rapport des vitesses à l'extrémité de cette longueur et à la section contractée sera exprimé d'une manière générale par $\frac{\sqrt{2g(h+l)}}{\sqrt{2gh}}$, ou plus simplement par $\sqrt{\frac{h+l}{h}}$. Maintenant, en substituant dans cette expression pour h et l les valeurs relatives à la veine dont nous nous occupons, savoir 47 et 158, nous trouvons pour le rapport entre les vitesses extrêmes, la valeur 2,1. Ainsi, bien que, sous une charge de 47 centimètres, la veine sortant par un orifice de 6mm soit probablement près de se trouver dans les conditions effectives de la première loi de Savart, la vitesse à l'extrémité de sa partie continue est encore plus que double de la vitesse à la section contractée, de sorte que le mouvement de translation du liquide est encore très notablement accéléré. La seconde conclusion du § 438 paraît donc jusqu'ici s'accorder, comme la première, avec les résultats de l'expérience.

Passons au tableau relatif à l'orifice de 3mm. Ici, comme on voit, le rapport entre la longueur de la partie continue et la racine carrée de la charge est, à fort peu près, le même pour toutes les charges; d'où il suit qu'avec cet orifice, la veine commence déjà à se trouver dans les conditions effectives de la première loi de Savart, sous une charge de 4,5 centimètres. Mais, d'après ce qui précède, avec l'orifice de 6mm, la veine n'entre dans ces mêmes conditions que sous une charge au moins égale à 47 centimètres; donc la charge à partir de laquelle la première loi de Savart commence à se réaliser, user, augmente et diminue avec le diamètre de l'orifice, et beaucoup plus rapidement que ce diamètre; or, c'est en cela que consiste la troisième conclusion du § 438.

Enfin, si, dans l'expression générale du rapport des vitesses extrêmes trouvée plus

haut, nous remplaçons h et l par les valeurs 4,5 et 24 relatives à la première veine du tableau dont nous nous occupons, nous trouverons, pour ce rapport, la valeur 2,5; ce qui montre qu'avec la charge, 4,5, sous laquelle la veine est déjà dans les conditions effectives de la loi de Savart, la vitesse de translation du liquide est encore très notablement accélérée. D'après cela, il ne peut plus demeurer aucun doute sur la légitimité de la seconde conclusion du § 438.

Calculons maintenant, pour chacune des quatre charges, le rapport entre les longueurs des parties continues respectivement correspondantes aux deux orifices; nous formerons ainsi le tableau suivant :

CHARGES.	RAPPORTS.
4,5	4,46
12	3,23
27	2,46
47	2,03

Ce tableau montre que, pour des charges inférieures à 47 centimètres, le rapport entre les longueurs respectives des parties continues de deux veines d'eau sortant, l'une par un orifice de 6 millimètres de diamètre, et l'autre par un orifice d'un diamètre moitié moindre, est loin d'être le même que celui des diamètres; d'où il suit que, sous ces charges, la seconde loi de Savart n'est pas satisfaite. Mais on voit, en même temps, que ce rapport converge vers celui des diamètres à mesure qu'on augmente la charge, et que, sous la charge de 47 centimètres, il est près de l'atteindre; or, d'après ce que nous avons vu plus haut, sous cette même charge de 47 centimètres, la veine sortant par le plus grand des deux orifices est très probablement près d'atteindre les conditions effectives de la première loi de Savart. Les conclusions du paragraphe précédent paraissent donc s'accorder, comme celles du § 438, avec les résultats de l'observation. Nous allons voir, du reste, cet accord confirmé par les résultats obtenus avec des veines d'eau non soustraites aux actions étrangères.

§ 441. Ces actions étrangères, dont nous reparlerons au § 455, et qui consistent dans certains mouvements vibratoires plus ou moins réguliers transmis aux veines, paraissent ne pas altérer les lois dont nous nous occupons considérées dans leur généralité; mais elles déterminent un raccourcissement des parties continues, et produisent en cela le même effet qu'une diminution des diamètres des orifices, de sorte que, sous leur influence, les lois de Savart commencent à se réaliser à partir de charges plus faibles.

Je viens de dire que les lois complètes qui régissent la partie continue, paraissent ne pas être changées par les actions étrangères dont il s'agit; c'est ce que l'on reconnaîtra aisément, si, pour chacune des séries faites par Savart sous l'influence de ces mêmes actions, séries dans lesquelles les orifices, les charges et le liquide sont les mêmes que précédemment, on forme le tableau des rapports entre la longueur de la partie continue et la racine carrée de la charge. A travers les petits écarts provenant des irrégularités inhérentes aux actions étrangères, on verra: 1^o qu'avec l'orifice de le rapport commence encore par décroître, et converge vers une certaine limite; seulement ici le décroissement est moindre par la raison que j'ai donnée plus haut, et la limite paraît être atteinte sous une charge inférieure à 47 centimètres; 2^o qu'avec l'orifice de 3mm, le rapport est sensiblement constant.

D'après cela, les séries dont il s'agit peuvent donc servir aussi à la discussion des lois qui régissent la longueur de la partie continue. Je me bornerai à reproduire ici deux de ces mêmes séries: ce sont celles que Savart a prises pour type, et d'où il a déduit ses lois; voici les tableaux qui s'y rapportent:

DIAMÈTRE DE L'ORIFICE, 6mm.		
CHARGES	LONGUEURS de la PARTIE CONTINUE.	RAPPORTE à la RACINE CARRÉE DE LA CHARGE.
4,5	40	18,9
12	59	17,0
27	82	15,8
47	112	16,3

DIAMÈTRE DE L'ORIFICE, 3mm.		
CHARGES	LONGUEURS de la PARTIE CONTINUE.	RAPPORTE à la RACINE CARRÉE DE LA CHARGE.
4,5	16	7,5
12	25	7,2
27	41	7,9
47	55	8,0

et l'on voit, par le premier, qu'avec l'orifice de 6mm le rapport entre la longueur de la partie continue et la racine carrée de la charge paraît avoir déjà atteint sa limite sous la charge de 27 centimètre le petit accroissement qui se manifeste pour la charge suivante, est dû sans doute aux causes d'irrégularité que j'ai signalées. Calculons encore, pour ces deux séries, les rapports entre les longueurs respectivement correspondantes aux deux orifices, ce qui nous donne le tableau suivant:

CHARGES.	REPORTS.
4,5	2,50
12	2,36
27	2,00
47	2,04

C'est donc aussi sous la charge de 27 centimètres, que le rapport entre les longueurs des parties continues se trouve avoir atteint celui des diamètres des orifices, ce qui achève d'établir la conformité des conclusions du § 439 avec les résultats de l'observation.

Enfin Savart a fait, avec l'orifice de 3mm, une série d'observations correspondantes à quatre charges plus considérables que les précédentes, et le rapport entre la longueur de la partie continue et la racine carrée de la charge s'est encore montré sensiblement constant; la première de ces nouvelles charges était de 51 et la dernière de 459 centimètres.

§ 442. Ainsi qu'on le sait d'après le travail de Savart, la veine fait entendre un son soutenu, résultant principalement du choc périodique des masses isolées dont se compose la partie discontinue contre le corps sur lequel elles tombent, et l'on peut faire acquérir à ce son une grande intensité, en recevant la partie discontinue sur une membrane tendue. En comparant les sons ainsi produits par des veines d'eau sous différentes charges et avec des orifices de différents diamètres, Savart a trouvé que, pour un même orifice, le nombre de vibrations exécuté dans un temps donné est proportionnel à la racine carrée de la charge; et que, pour une même charge, ce nombre est en

raison inverse du diamètre de l'orifice. Or nous allons voir ces deux lois dériver encore de nos principes.

Recourons de nouveau à la considération des veines imaginaires. Dans une semblable veine, la longueur des divisions est égale, comme nous l'avons vu, à la longueur normale de celles d'un cylindre de même liquide, formé dans les conditions de nos lois, et ayant pour diamètre celui de la section contractée de la veine; ainsi, cette longueur ne dépend que du diamètre de l'orifice et de la nature du liquide, et ne varie pas avec la vitesse d'écoulement. Or de là résulte que, pour un même liquide et un même orifice, le nombre des divisions qui passent, dans un temps donné, à la section contractée, est proportionnel à cette vitesse, c'est-à-dire à $\sqrt{2gh}$ et par suite, à \sqrt{h} . Mais chacune de ces divisions fournit plus bas une masse isolée, et chacune de celles-ci vient ensuite choquer la membrane; donc le nombre des chocs produits dans un temps donné est égal à celui des divisions qui passent, dans ce même temps, à la section contractée, et, par conséquent, est proportionnel à la racine carrée de la charge. Maintenant, il est aisé de voir que chacun des chocs fait naître deux vibrations: car le petit enfoncement qu'il détermine dans la membrane est suivi d'un petit relèvement, ce qui donne deux ondes; donc le nombre de vibrations correspondant au son produit est double de celui des chocs, et, par conséquent, est également proportionnel à la racine carrée de la charge.

En second lieu, puisque la longueur normale des divisions d'un cylindre supposé dans les conditions de nos lois et formé d'un liquide donné est proportionnelle au diamètre de ce cylindre, il s'ensuit que, pour un même liquide, la longueur des divisions de la veine imaginaire est proportionnelle au diamètre de la section contractée, et, par suite, sensiblement proportionnelle à celui de l'orifice. Or, pour une vitesse d'écoulement déterminée, le nombre des divisions qui passent, dans un temps donné, à la section contractée, est évidemment en raison inverse de la longueur de ces divisions; donc, si le liquide demeure le même, ce nombre est sensiblement en raison inverse du diamètre de l'orifice. Mais, d'après ce que nous avons vu ci-dessus, le nombre de vibrations correspondant au son produit est double du précédent; donc, lorsque la charge et la nature du liquide ne changent pas, ce nombre de vibrations est de même, sensiblement en raison inverse du diamètre de l'orifice.

Ainsi, les deux lois qui, d'après Savart, régissent les sons rendus par les veines, seraient nécessairement satisfaites à l'égard de nos veines imaginaires.

Passons aux veines réelles. Pour un orifice déterminé, à mesure qu'on augmente la charge, la constitution de la veine approche de plus en plus de ce qu'elle serait s'il n'y avait point d'accélération, et conséquemment la longueur de ses divisions naissantes converge vers celle qu'elles prendraient dans le même cas; d'où il suit, en vertu de ce qui précède, qu'à partir d'une moindre charge suffisamment forte, les lois de Savart seront nécessairement satisfaites.

§ 443. Les expériences d'où Savart a déduit la proportionnalité, pour un même orifice, entre le nombre de vibrations et la racine carrée de la charge, vont nous permettre de vérifier un résultat que nous avons simplement présenté comme probable (§ 373), savoir que, dans la transformation d'un cylindre liquide libre sur toute sa surface convexe et d'une longueur telle que les divisions puissent prendre leur longueur normale, le rapport entre cette longueur normale et le diamètre du cylindre serait, dans les différents liquides, peu éloigné de 4.

Voici d'abord le tableau des résultats obtenus par Savart; les charges sont encore exprimées en centimètres.

DIAMÈTRE DE L'ORIFICE, 3mm.	
CHARGES	NUMBRES de VIBRATIONS PAR SECOND.
51	600
102	853
153	1024
459	1843

Considérons maintenant une division immédiatement après son passage à la section contractée, c'est-à-dire à l'instant où son extrémité supérieure franchit cette section; c'est ce que nous nommons une division naissante. On admettra sans peine qu'avec l'orifice de 3mm employé par Savart, et même sous la moindre des charges ci-dessus, charge qui est déjà forte, la veine, abstraction faite de ses divisions, s'écartait extrêmement peu de la forme cylindrique, et qu'en outre, dans la petite longueur correspondante à une division naissante, l'accélération du mouvement de translation pouvait être regardée comme négligeable; conséquemment, sous cette moindre charge, et, à plus forte raison, sous les charges suivantes, les divisions naissantes devaient prendre à très peu près la longueur normale de celles d'un cylindre d'eau libre sur toute sa surface convexe.

Cela posé, si λ désigne la longueur d'une division naissante, t le temps qu'a employé son cercle de gorge inférieur à parcourir cette longueur depuis la section contractée, et h la charge, on aura sensiblement:

$$\lambda = t\sqrt{2gh}.$$

Soit, en outre, n le nombre de divisions qui passent en une seconde à la section contractée; le temps t mesurant évidemment la durée du passage de l'une d'elles, on aura, en prenant la seconde pour unité de temps, $t = 1/n$, et, par suite,

$$\lambda = \frac{1}{n}\sqrt{2gh}.$$

Soit enfin k le diamètre de la section contractée correspondante au même orifice; on aura, pour représenter le rapport entre la longueur des divisions naissantes et ce diamètre, la formule

$$\frac{\lambda}{k} = \frac{1}{kn}\sqrt{2gh}. \quad (d)$$

Il est inutile de faire remarquer que les valeurs de h , k et g devront être rapportées à une même unité de longueur. En prenant pour cette unité le centimètre la valeur de h sera donnée immédiatement par le tableau ci-dessus, et il faudra faire $g = 980,9$; quant à k , on peut conclure des résultats rappelés dans la note du §436, que lorsque le diamètre de l'orifice est de 3mm, celui de la section contractée en est à bien peu près exactement les 0,8; par conséquent, si nous conservons le centimètre comme unité de longueur, ce qui donnera 0,3 pour la valeur du diamètre de l'orifice dont il s'agit, nous aurons $k = 0,24$.

Substituant dans la formule [a] ces Valeurs de k et de g , ainsi que celles de h tirées du tableau et celles de n obtenues en prenant (§ précéd.) les moitiés respectives des nombres de vibrations contenus dans le même tableau, nous trouverons, pour le rapport λ/k , les quatre nombres suivants

4,39
4,37
4,46
4,29,

et l'on voit qu'en effet, ces nombres sont très rapprochés les uns des autres, et s'éloignent peu de 4.

La moyenne de ces mêmes nombres, savoir 4,38, ou plus simplement 4,4, nous donne donc, avec une grande approximation, le rapport entre la longueur normale des divisions et le diamètre, dans la transformation d'un long cylindre d'eau supposé sans pesanteur et libre sur toute sa surface convexe.

En déterminant par l'expérience, pour un autre liquide quelconque, le nombre de vibrations correspondant à un orifice donné et à une charge suffisante également donnée, on obtiendra de même, à l'aide de la formule [a], la valeur de λ/k relative à ce liquide; or Savart dit que la nature du liquide paraît être sans influence sur le nombre de vibrations correspondant à une charge et à un orifice donnés, et l'on peut en conclure que la valeur de λ/k serait sensiblement la même, en général, à l'égard des différents liquides. Par conséquent, dans de longs cylindres respectivement formés de ces liquides, supposés sans pesanteur et libres sur toute leur surface convexe, le rapport entre la longueur normale des divisions et le diamètre serait aussi sensiblement le même, et s'éloignerait peu de 4, comme nous l'avons avancé.

Cependant Savart n'indique pas quels sont les liquides qu'il a comparés, et l'on doit présumer que si l'on soumettait à l'expérience un liquide à forte viscosité intérieure, tel que la glycérine, ou à très forte viscosité superficielle, tel qu'une solution de saponine, on obtiendrait des rapports un peu plus grands.

§ 444. La durée partielle de la transformation d'un cylindre pouvant évidemment, ainsi que nous l'avons déjà fait remarquer, être comptée en ne considérant que l'un des étranglements de la figure, ou même simplement le cercle de gorge de celui-ci, et, d'autre part, cette durée variant, pour un même diamètre, avec la nature du liquide, il s'ensuit que, dans la veine, le temps compris entre l'instant où la section superficielle qui doit constituer le cercle de gorge d'un étranglement passe à la section contractée et l'instant de la rupture du filet dans lequel cet étranglement se convertit, variera aussi, toutes choses égales d'ailleurs, avec la nature du liquide. Or de là résulte nécessairement que, pour une même charge et un même orifice, la longueur de la partie continue de la veine changera d'un liquide à un autre; et cette conclusion est encore conforme aux résultats de l'expérience. En effet, Savart a mesuré la partie continue de quatre veines s'écoulant dans des circonstances identiques, et formées respectivement d'éther sulfurique, d'alcool, d'eau, et d'une solution d'ammoniaque caustique, et il a trouvé les longueurs suivantes:

Éther.....	90,
Alcool.....	85,
Eau.....	70,
Ammoniaque...	46.

§ 445. Nous ne nous sommes occupé jusqu'ici que des veines lancées verticalement de haut en bas. Les veines lancées dans des directions différentes de la verticale sont incurvées par l'action de la pesanteur, et, par conséquent, ne peuvent plus être comparées à des cylindres; mais elles constituent des figures allongées suivant une de leurs dimensions, et dès lors il doit également (§ 368) s'y former des divisions passant graduellement à l'état de sphères isolées; ainsi la constitution des veines lancées soit

horizontalement, soit obliquement, doit être analogue à celle des veines lancées verticalement de haut en bas, conclusion qui s'accorde, en effet, avec les observations de Savart.

On doit croire que cette analogie de constitution s'étend à la partie ascendante des veines lancées verticalement de bas en haut; seulement, dans le cas de ces dernières veines, les phénomènes sont probablement troublés par le liquide qui retombe.

§ 446. En exposant (§ 239) les phénomènes qui se manifestent lorsqu'un liquide s'écoule par une fente rectiligne verticale et étroite percée dans la paroi latérale du réservoir depuis le fond de celui-ci jusqu'au-dessus du niveau du liquide, et en décrivant le bourrelet qui garnit le bord supérieur de la lame ainsi engendrée, j'ai dit que, dans les meilleures conditions de l'expérience, c'est-à-dire avec une fente de 2mm de largeur, ce bourrelet, à partir du milieu environ de sa longueur, se change, à droite et à gauche, en gerbes de gouttelettes. Or mon fils, en observant, à travers le disque percé de fentes radiales et tournant avec une vitesse convenable, la portion de ce même bourrelet antérieure au lieu où s'opérait la résolution en gouttes, l'a vue comme consistant en un faisceau de veines de petit diamètre, dont chacune présente une suite de renflements et d'étranglements, et qui ont un léger mouvement d'oscillation dans le sens transversal. On comprend, d'après cela, la génération des gouttes, lesquelles ne sont autre chose que les renflements ci-dessus passés à l'état de masses isolées; on comprend aussi que le mouvement oscillatoire des veines en question empêche qu'on ne distingue nettement celles-ci à l'oeil nu. Quant à la cause de cette bizarre constitution en faisceau de veines, elle m'échappe complètement.

Remarquons, en passant, que les bourrelets rappelés au § 427 peuvent être considérés comme constituant aussi des veines dans lesquelles la transformation en masses isolées s'effectue progressivement pendant le mouvement de translation du liquide.

§ 447. L'influence qu'exercent sur la veine les mouvements vibratoires communiqués au vase, influence que nous mettrons bientôt en rapport avec notre théorie, a conduit Savart à regarder la constitution de la veine comme étant elle-même le résultat de certains mouvements vibratoires inhérents au phénomène de l'écoulement. Partant de là, Savart a essayé de faire comprendre comment le genre d'ébranlement occasionné dans la masse du liquide par l'émission de celui-ci, pourrait effectivement donner naissance à des vibrations dirigées normalement au plan de l'orifice; voici en quels termes il s'exprime à ce sujet:

« On conçoit, en effet, qu'à l'instant où l'orifice est ouvert, la colonne de liquide qui est immédiatement placée au-dessus de lui, étant la première à s'écouler, le niveau de la partie centrale du liquide doit tendre à s'abaisser un peu, et qu'au contraire la partie la plus extérieure de la masse du fluide se trouvant refoulée, son niveau doit s'élever d'une petite quantité, et que, par conséquent, toute la masse doit devenir le siège d'oscillations analogues à celles qui ont lieu sous la seule influence de la pesanteur dans un siphon dont les branches sont redressées. »

Savart a montré que ces oscillations, qui produiraient des *pulsations* à l'orifice, entraîneraient la formation alternative de renflements et d'étranglements dans la veine, parce que la portion de cette dernière qui sortirait pendant la durée d'une pulsation dirigée de dedans en dehors éprouverait une compression qui en augmenterait l'épaisseur, tandis que la portion qui sortirait pendant la durée d'une pulsation dirigée de dehors en dedans, éprouverait, au contraire, une traction qui l'amincirait.

On a vu, d'après l'exposé de notre théorie, que la constitution de la veine est une conséquence nécessaire des propriétés des cylindres liquides, propriétés que nous avons étudiées par l'expérience et par le calcul; nous pouvons donc, je crois, nous dispenser

d'une discussion détaillée à l'égard des idées ingénieuses que nous venons de rappeler, idées pour l'intelligence complète desquelles nous renvoyons au Mémoire même de Savart. Nous ferons seulement remarquer qu'il est difficile d'admettre le genre d'ébranlement supposé par Savart; que, d'ailleurs, on ne voit pas bien comment les pulsations dont il s'agit, après avoir dessiné sur la surface de la veine une division naissante, détermineraient le développement ultérieur de celle de manière à la faire passer graduellement, pendant sa descente, à l'état de masse isolée; qu'enfin, si l'on voulait faire abstraction de ces difficultés, il faudrait encore recourir à des hypothèses additionnelles pour arriver aux lois qui régissent la longueur de la partie continue et à celles que suivent les nombres de vibrations correspondants aux sons produits par le choc de la partie trouble. Du reste, c'est en empruntant à Savart l'une de ses idées, qui devient applicable lorsque, par une cause extérieure, des vibrations sont en réalité excitées dans le liquide, que nous trouverons les éléments nécessaires pour expliquer la curieuse influence de ces vibrations sur la veine.

§ 448. Occupons-nous donc de ce sujet; et d'abord rappelons, en résumé, quelles sont, d'après les recherches de Savart, les modifications que reçoit la veine dans les circonstances en question, c'est-à-dire lorsqu'elle est sous l'influence des mouvements vibratoires. Dans les quatorze premiers nombres qui suivent, il s'agit des veines verticalement descendantes.

1° La partie continue se raccourcit.

2° L'épaisseur de la portion limpide paraît augmentée.

3° Chacune des masses qui s'isolent à l'extrémité inférieure de la partie continue se trouve d'abord aplatie dans le sens vertical, et, par suite, son diamètre horizontal est plus grand que celui de la sphère qu'elle tend à constituer.

4° Les masses étant ainsi abandonnées à elles-mêmes sous une forme aplatie et tendant à prendre la forme sphériques elles dépassent ensuite cette dernière par l'effet de l'inertie, et s'allongent dans le sens vertical, pour s'aplatir de nouveau, puis s'allonger encore, et ainsi de suite; de sorte que leur diamètre horizontal, qui d'abord est supérieur à celui de la sphère de même volume, devient ensuite moindre que ce dernier, puis de nouveau plus grand, etc.

Ces variations périodiques du diamètre horizontal des masses ayant lieu pendant que celles-ci sont emportées par le mouvement de translation, l'impression laissée dans l'oeil par le passage rapide de l'une quelconque de ces masses doit être celle d'une figure offrant une suite régulièrement disposée de maxima et de minima d'épaisseur, les premiers correspondant aux lieux par lesquels a passé la masse dans ses instants de plus grand développement horizontal, et les seconds aux lieux par lesquels elle a passé dans ses instants de plus grande contraction horizontale; et comme les masses successives passent soit exactement, soit à peu près, par les mêmes lieux dans les mêmes phases de leurs oscillations de forme, les impressions qu'elles produisent individuellement se superposent plus ou moins complètement, et la partie trouble de la veine présente d'une manière permanente les différences d'épaisseur dont il s'agit; en d'autres termes, cette partie trouble se montre composée d'une suite régulière de ventres allongés et de noeuds occupant des positions fixes.

Quand la superposition ci-dessus est imparfaite, chaque ventre offre l'apparence d'un assemblage de lames, dont chacune constitue une espèce de cône ayant pour axe celui de la veine. La moitié environ du premier ventre est formée par le passage des renflements du bas de la partie continue, de sorte que cette partie continue se termine vers le milieu de la longueur de ce même ventre.

5° La longueur et le diamètre des ventres sont d'autant plus considérables que la

charge est plus forte et que le diamètre de l'orifice est plus grand. Il en est de même du diamètre des noeuds.

6° L'ensemble de ces phénomènes se manifeste déjà lorsque la veine est abandonnée à elle-même dans les circonstances ordinaires, c'est-à-dire lorsqu'on n'excite point à dessein de mouvements vibratoires dans le liquide. Cela provient, d'une part, de ce que le choc de la partie discontinue contre le liquide dans lequel elle tombe, fait naître des vibrations qui se transmettent au vase par l'intermédiaire de l'air et des supports, et, d'autre part, de ce que le vase reçoit aussi, par les supports, les petites vibrations dues aux bruits extérieurs et propagées dans le sol. Ce n'est qu'en soustrayant, par certains procédés, le vase à ces deux influences, que la veine prend l'aspect qui lui est propre.

7° Mais tous les phénomènes indiqués dans les cinq premiers numéros précédents deviennent beaucoup plus prononcés et plus réguliers, lorsque, à l'aide d'un instrument, on produit, dans le voisinage de l'appareil, un son à l'unisson de celui qui résulterait du choc de la partie discontinue de la veine contre une membrane tendue. Alors la partie continue se raccourcit considérablement; le diamètre de la portion limpide se montre encore augmenté; les ventres s'élargissent en se ramassant davantage sur eux-mêmes, de sorte que les noeuds qui les séparent sont plus allongés; enfin ces noeuds paraissent d'un moindre diamètre.

8° Outre l'unisson ci-dessus, d'autres sons, produits de même par un instrument dans le voisinage de l'appareil, agissent sur la veine d'une manière analogue, mais avec beaucoup moins d'énergie.

Enfin il est des sons qui n'exercent aucune influence.

9° Dans le cas particulier où le son de l'instrument s'éloigne fort peu de l'unisson, la partie continue de la veine s'allonge et se raccourcit alternativement, et l'oreille perçoit des battements qui coïncident avec ces variations de longueur.

10° Quand on reçoit la partie discontinue de la veine sur un corps qui ne peut rendre qu'un son déterminé, il arrive fréquemment que les vibrations de ce corps modifient le son propre à la veine; mais cela ne paraît possible que si l'écart entre ce dernier son et celui qui convient au corps choqué n'excède pas une tierce mineure.

Lorsque le son de la veine est ainsi modifié par un son étranger, il suffit souvent, pour le faire revenir au ton qui lui appartient, d'un léger choc imprimé à l'appareil ou d'un changement de position du corps choqué, et c'est toujours par sauts brusques que ce retour s'opère.

Quand l'écart entre les deux sons est très petit, ils peuvent se faire entendre périodiquement, ou même simultanément.

11° Les modifications que subit la veine sous l'influence des mouvements vibratoires augmentent encore, et acquièrent une régularité parfaite, lorsque l'instrument sonore (n° 7), au lieu d'être tenu à une certaine distance de l'appareil, est mis en contact avec les parois du vase, et qu'il rend un son très intense et bien exactement à l'unisson de celui qui est propre à la veine. Alors la partie continue se raccourcit tellement, que l'extrémité supérieure du premier ventre touche presque à l'orifice, et, d'autre part, la superposition des ventres formés par les masses individuelles (n° 4) est exacte, de sorte qu'on n'aperçoit plus aucune apparence de lames.

12° Cette extrême régularité permet de distinguer nettement la figure apparente que produit de son côté le passage des sphérules interposées entre les masses, figure qui occupe l'axe de la veine depuis l'extrémité de la partie continue; on y remarque aussi des ventres et des noeuds, mais plus courts que ceux qui sont dus au passage des masses.

13° Au moyen d'un instrument ainsi mis en contact avec les parois du vase, presque

tous les sons peuvent déterminer des effets analogues à ceux de l'unisson du ton propre à la veine; mais ces effets sont d'autant moins prononcés que le son de l'instrument s'éloigne davantage de l'unisson dont il s'agit.

14° En outre, dans cette même condition, lorsque le son qui est naturel à la veine n'est pas à l'unisson de celui de l'instrument, il peut y être amené, même quand l'écart entre les nombres de vibrations serait assez grand pour constituer un intervalle de quinte en dessus du son propre à la veine, et de plus d'une octave en dessous.

15° Si la veine, au lieu de s'écouler verticalement de haut en bas, est lancée horizontalement, et qu'elle se trouve dans les circonstances ordinaires, ou, en d'autres termes, qu'elle ne soit point sous l'influence d'un instrument sonore, mais qu'elle aille frapper le liquide du vase qui la reçoit, sa partie trouble présente des ventres et des noeuds, comme en offre, dans les mêmes circonstances, celle des veines verticales descendantes (n° 6), et les vibrations d'un instrument la modifient aussi de la même manière.

Si la veine est lancée obliquement de bas en haut, les mêmes phénomènes s'observent encore, tant que l'angle qu'elle forme avec l'horizon n'excède pas 20° à 25°.

16° Mais au delà de ce terme, et jusqu'à 45° à 50°, la partie discontinue prend d'autres aspects: quand la veine n'est point sous l'influence du son d'un instrument, cette partie discontinue se montre éparpillée dans un même plan vertical en une sorte de gerbe. Sous l'action de vibrations d'une période déterminée, il peut arriver que la gerbe se résolve en deux jets bien distincts, ayant chacun leurs ventres et leurs noeuds régulièrement formés; il peut même se faire que, pour un autre son déterminé, la gerbe se trouve remplacée par trois jets; enfin il y a toujours un son qui réduit la veine entière à un seul jet présentant un système de ventres et de noeuds parfaitement réguliers, et ce son est aussi celui qui produit le plus grand raccourcissement de la partie continue.

17° Pour une même charge et un même orifice, le nombre de vibrations correspondant au son qui exerce le maximum d'effet sur la longueur de la partie continue et sur les dimensions des ventres de la veine, est d'autant moindre que la direction suivant laquelle cette dernière est lancée fait un angle plus grand avec la verticale descendante menée à partir de l'orifice. La différence entre les nombres de vibrations qui conviennent au cas où le jet tombe verticalement et à celui où il est lancé horizontalement, est peu considérable; mais elle devient très grande entre ce dernier cas et celui où le jet est vertical ascendant.

§ 449 Cherchons actuellement la raison de ces phénomènes bizarres. Tout ce que nous dirons, d'ici au § 468, se rapportera aux veines lancées suivant la verticale descendante; il faudra donc, jusque-là, se représenter toujours de semblables veines.

On peut admettre, nous le savons (§§405 et 423), qu'à l'origine, tout au moins, de la transformation d'un cylindre liquide, la longueur d'un étranglement est égale à celle d'un renflement; or ce résultat est évidemment applicable aux étranglements et aux renflements naissants de la veine, et il s'ensuit que les durées respectives des passages d'un de ces étranglements et d'un de ces renflements à la section contractée sont égales; d'un autre côté, une division d'un cylindre ou d'une veine étant comprise entre les milieux de deux étranglements voisins, et se composant ainsi d'un renflement et de deux demi étranglements, la durée du passage d'une division de la veine à la section contractée équivaut nécessairement à la somme de celles des passages d'un renflement et d'un étranglement; et puisque ces deux dernières sont égales, nous arrivons à cette première conséquence, que la durée du passage soit d'un étranglement, soit d'un renflement, à la section contractée, est égale à la moitié de celle du passage d'une division.

Mais le nombre de vibrations par seconde correspondant au son que rend le choc

de la partie discontinue de la veine contre une membrane tendue est, comme nous le savons (§ 442), double de celui des masses isolées qui viennent, dans le même intervalle de temps, heurter cette membrane, et ce dernier nombre est (ibid.) toujours égal à celui des divisions qui passent, dans le même temps aussi, à la section contractée; donc la durée de chacune des vibrations dont il s'agit est, comme la durée du passage d'un étranglement ou d'un renflement, égale à la moitié de celle du passage d'une division, et nous en déduisons enfin cette conclusion fondamentale:

La durée de chacune des vibrations correspondantes au son propre à la veine est égale à celle du passage d'un étranglement ou d'un renflement la section contractée.

§ 450. Maintenant supposons qu'à l'aide des moyens indiqués par Savart, on ait soustrait la veine à l'influence des vibrations provenant de la chute du liquide dans le vase qui le reçoit, et à celle des bruits extérieurs; puis que, la veine étant ainsi abandonnée à la seule action des forces figuratrices, on transmette au vase d'où elle s'échappe un son exactement à l'unisson de celui que rendrait le choc de la partie discontinue contre une membrane. Le liquide qui afflue de l'intérieur du vase vers l'orifice, traverse celui-ci en accomplissant ses vibrations; si donc ces dernières sont dirigées dans le sens vertical, chaque portion de la veine qui passera à la section contractée en exécutant une vibration descendante, sera animée de la vitesse $\sqrt{2gh}$ augmentée de toute celle de cette vibration, et conséquemment elle contiendra plus de liquide que la portion qui aurait passé dans le même temps en l'absence des vibrations. L'excès de vitesse tendra, à la vérité, à se communiquer à la partie de la veine située au-dessous de celle que nous considérons; mais, en faisant pour un moment abstraction des forces figuratrices, nous devons admettre du moins que cette partie inférieure opposera une certaine résistance en vertu de son inertie, et que, par suite, l'excès de liquide amené par l'excès de vitesse tendra à se répartir dans le sens horizontal, ou, en d'autres termes, à renfler la portion à laquelle il appartient.

Cela posé, si la figure à peu près cylindrique que prendrait la veine par les seuls effets du mouvement de translation du liquide et de la forme circulaire de l'orifice était une figure d'équilibre stable, la portion qui, par l'action de la vibration descendante, se renfle pendant qu'elle passe à la section contractée, exercerait en même temps un effort pour revenir à sa forme première; d'où il suit nécessairement que, dans l'hypothèse dont il s'agit, à mesure que le renflement se forme, il se propagerait aux tranches sous et constituerait sur la surface de la veine une onde renflée d'une certaine longueur, laquelle marcherait avec une vitesse qui serait la somme de celle de sa propagation et de celle du liquide. Alors aussi la portion de la veine qui passerait ensuite à la section contractée en exécutant une vibration ascendante, et qui, par conséquent, franchirait cette section avec la vitesse $\sqrt{2gh}$ diminuée de celle de la vibration, produirait, par les raisons contraires, une onde étranglée de même longueur que l'onde renflée, et qui marcherait derrière celle-ci avec la même vitesse; puis viendrait une nouvelle onde renflée suivie d'une nouvelle onde étranglée, et ainsi de suite, tant que durerait la communication des mouvements vibratoires.

Mais, en vertu de l'instabilité de la figure cylindrique et de la tendance de la veine à la transformation en sphères isolées, les choses se passeront d'une tout autre manière. Imaginons que l'extrémité inférieure de l'un des renflements qui se formeraient par l'action seule des forces figuratrices dues à l'instabilité, franchisse la section contractée au moment précis où commence dans le liquide une vibration descendante. Alors, puisque les forces figuratrices poussent d'une manière continue dans cette portion de la veine un excès de liquide qui la renfle sans qu'elle ait aucune tendance à revenir sur elle-même, on voit que la quantité de liquide amenée en même temps par la vitesse

additionnelle due à la vibration descendante pourra se répartir dans le sens horizontal, et contribuer à la formation du renflement, sans avoir à surmonter une tendance contraire. En outre, puisque la durée de la vibration est égale au temps qu'emploie à passer à la section contractée la portion de la veine dont les forces figuratrices feraient à elles seules un renflement naissant, l'extrémité supérieure de cette portion franchira la section contractée au moment précis où la vibration finira, de sorte que l'action immédiate de celle-ci se sera exercée sur toute la portion dont il s'agit, et seulement sur cette portion. Enfin, puisque le renflement produit par les actions combinées dont nous venons de parler n'a aucune tendance à s'effacer, il ne se propagera point aux parties sousjacentes, et, par conséquent, il ne donnera point lieu à une onde. Ainsi la portion considérée de la veine sera plus renflée, dès sa formation, qu'elle ne l'eût été en l'absence des mouvements vibratoires; mais elle aura la même longueur et descendra avec la même vitesse que dans ce dernier cas.

Après la vibration descendante viendra une vibration ascendante, et celle-ci diminuant la vitesse du passage à la section contractée, il en résultera, comme nous l'avons déjà dit, dans la portion de la veine qui passe sous son influence, une diminution de volume, de sorte que cette portion tendra à s'amincir; mais les forces figuratrices tendant à faire de cette même portion un étranglement naissant, l'amincissement dû à la vibration s'effectuera aussi sans rencontrer de tendance opposée, et, par conséquent, sans donner lieu à la formation d'une onde. On voit donc que, de même que le renflement qui le précède, l'étranglement ainsi formé par la double action des forces figuratrices et de la vibration sera plus prononcé, mais aura la même longueur, et descendra avec la même vitesse, que si la veine était abandonnée à la seule action des forces figuratrices.

Enfin la même chose aura lieu à l'égard de tous les autres renflements et étranglements: en vertu de l'égalité entre le temps qu'emploie chacune de ces portions de la veine à passer à la section contractée et la durée de chaque vibration, tous les renflements coïncideront avec les vibrations descendantes, et tous les étranglements avec les vibrations ascendantes; les uns et les autres conserveront conséquemment leur longueur et leur vitesse de translation, mais tous quitteront la section contractée plus prononcés, ou, en d'autres termes, dans une phase plus avancée de la transformation, que si l'on n'eût point produit les mouvements vibratoires.

§ 451. Mais l'action de ces mouvements ne se bornera point là: en effet, les vitesses des vibrations descendantes et ascendantes, vitesses qui, ainsi que nous l'avons fait voir, changent de directions dans les renflements et étranglements pour produire un plus grand développement transversal des premiers et un plus grand amincissement des seconds, ne peuvent s'anéantir, dans chacune de ces portions, au moment où elle a achevé son passage à la section contractée; ces vitesses ainsi changées en vitesses transversales continueront donc, comme vitesses acquises, à s'ajouter à celles qui résultent des forces figuratrices.

§ 452. Pour que des vibrations transmises exercent avec toute leur intensité sur les divisions naissantes de la veine l'action décrite dans les deux paragraphes précédents, il faut qu'à l'orifice elles soient, comme nous l'avons imaginé, dirigées dans le sens vertical. Il serait sans doute difficile de faire voir à priori qu'en se propageant jusqu'à l'orifice les vibrations y prennent réellement cette direction; mais Savart, qui s'est tant occupé de la communication des mouvements vibratoires, admet le fait implicitement: en effet, d'une part, il suppose que ces vibrations ne font que renforcer celles qui naissent, selon lui, de l'écoulement même et qui seraient nécessairement verticales, et, d'autre part, il ne dit point que, pour obtenir le maximum d'action, il faille donner à l'instrument sonore une position particulière. Du reste, si l'on trouvait là

quelque difficulté, il suffirait de remarquer que, quelle que soit la direction réelle suivant laquelle les molécules liquides exécutent, en franchissant l'orifice, les vibrations qui leur sont transmises, on pourra toujours, sauf dans le cas tout exceptionnel où cette direction serait exactement horizontale, décomposer chaque vibration en deux autres, dont l'une horizontale n'influera point sur la transformation des divisions de la veine, et dont l'autre verticale exercera toute son action. D'ailleurs, comme nous le verrons (§ 487), Magnus a montré que l'effet exercé sur la veine par les vibrations transmises dépend surtout de celles qu'exécute le fond du vase, et ces dernières sont naturellement verticales.

Nous avons supposé, en outre, que le moment où commence chaque vibration descendante soit aussi celui où passe à la section contractée l'extrémité inférieure de chaque renflement; mais si, dans les premiers instants où les vibrations se font sentir, cette coïncidence n'a pas lieu, il y aura lutte entre les actions des forces figuratrices et celles des vibrations, et l'on comprend que dès lors la transformation de la veine, qui, n'étant qu'un phénomène d'instabilité, peut se déplacer par des causes légères, fera reculer ou avancer l'ensemble des renflements et des étranglements, de manière à établir bientôt la coïncidence ci-dessus et à permettre ainsi le concours et la pleine liberté des deux systèmes d'actions.

§ 453. Ces principes établis, nous allons en voir sortir une à une les modifications qu'éprouve la veine par l'influence des vibrations.

Rappelons-nous d'abord que lorsque la veine est abandonnée à la seule action des forces figuratrices, la vitesse avec laquelle s'effectue la transformation demeure fort petite jusqu'à une distance assez considérable de la section contractée, ce qui donne à la portion correspondante de la veine un aspect calme et limpide; en second lieu, que, plus loin, les renflements prenant un développement notable et plus rapide, la veine paraît s'élargir, jusqu'au point où les masses s'isolent; et enfin qu'au-delà de ce point, le diamètre de la veine, diamètre qui est celui de ces mêmes masses, est sensiblement uniforme (§ 432).

Figurons-nous une semblable veine, et produisons, à proximité de l'appareil, le son considéré dans tout ce qui précède. Sous l'influence de ce son, chaque division quittant la section contractée dans une phase plus avancée de la transformation, et, en outre, la transformation partant de cette phase avec une vitesse plus grande qu'elle ne l'eût fait sous la seule action des forces figuratrices, il en résulte nécessairement que cette même transformation s'achètera en moins de temps; conséquemment chaque division atteindra l'état de masse isolée à une distance moindre de l'orifice, et ainsi la partie continue se raccourcira.

Et puisque les renflements sont plus développés dès leur origine, on voit, en second lieu, que l'épaisseur apparente de la portion limpide de la veine, épaisseur qui, en chaque point de la longueur de cette portion limpide, est évidemment celle qu'ont acquise les renflements au moment où ils y passent, se montrera augmentée.

En troisième lieu, l'excès de vitesse transversale que la transformation reçoit des vibrations et qui persiste comme vitesse acquise, doit nécessairement faire dépasser au diamètre horizontal des masses successives celui des sphères que ces masses tendent à constituer, en sorte que ces mêmes masses s'aplatiront dans le sens vertical. Mais on comprend que cette extension horizontale et cet aplatissement vertical rendent la pression capillaire, au pourtour de la masse, supérieure à celle des points voisins de l'axe, et que de là naît une résistance croissante qui finit par détruire la vitesse transversale. Alors les différences de pression agiront librement et la masse reviendra sur elle-même pour atteindre sa figure d'équilibre, c'est-à-dire la figure sphérique; mais le

phénomène s'effectuant avec une vitesse accélérée, ne pourra s'arrêter à cette dernière figure, et la masse se contractera dans le sens horizontal, en s'allongeant dans le sens vertical, jusqu'à ce que la résistance croissante qui résulte des nouvelles inégalités entre les pressions ait anéanti la vitesse acquise; puis la masse, sollicitée par les différences de pression qui ont produit cette résistance, reviendra encore vers la figure sphérique, qu'elle dépassera de nouveau pour s'étendre une seconde fois dans le sens horizontal et s'aplatir dans le sens vertical, après quoi elle recommencera la même série de modifications et continuera ces oscillations de forme tant que durera sa chute.

Ainsi s'expliquent très simplement, pour le cas de l'unisson avec le son que ferait naître le choc de la partie discontinue, les faits rappelés dans les n^{os} 1, 2, 3 et 4 du § 448.

Seulement, puisque l'extrémité de la partie continue de la veine se trouve vers le milieu de la longueur du premier ventre, et conséquemment est peu éloignée, du point correspondant au premier des maxima d'épaisseur de la partie trouble, il faut admettre que chaque masse atteint sa première phase de plus grand développement horizontal un peu avant de se détacher complètement, et au moment sans doute où elle ne tient plus à celle qui la suit que par un filet. Quant aux systèmes de lames dont les ventres offrent l'apparence lorsque les phénomènes ne sont point tout à fait réguliers, c'est évidemment, ainsi que Savart l'a reconnu, le résultat de l'inexacte superposition de plusieurs des ventres individuellement produits par les masses successives: ces ventres se voient alors simultanément et paraissent comme au travers les uns des autres, par l'effet de la persistance de leurs impressions sur la rétine.

§ 454. Il est clair que le temps compris entre deux phases de plus forte contraction horizontale, ou, en d'autres termes, celui qu'emploie chaque masse à exécuter une oscillation complète de forme, est indépendant de la vitesse de translation; par conséquent le trajet que parcourt une masse pendant le temps dont il s'agit est d'autant plus grand que la vitesse de translation est plus considérable; mais ce trajet est évidemment la distance qui sépare les milieux de deux noeuds, ou la longueur d'un ventre²⁵⁵; cette longueur doit donc augmenter avec la charge.

Supposons, pour un instant, que la veine ne se divise pas; alors, sous des charges faibles, elle s'effilera beaucoup, et, même dans la petite longueur qui correspondrait à une division naissante, son diamètre diminuera déjà à partir de la section contractée, d'une quantité appréciable; de plus, la longueur dont il s'agit se trouvera elle-même diminuée, car, on le comprend, elle doit être intermédiaire entre les longueurs normales des divisions de deux cylindres ayant respectivement pour diamètres celui de la section contractée et celui de la section inférieure de la portion que nous considérons. En présence des forces figuratrices, c'est-à-dire dans le cas réel, le volume des divisions naissantes est donc, par la double raison ci-dessus, moindre sous des charges faibles que sous des charges fortes; mais chaque division naissante fournissant plus bas une masse isolée, le volume de ces masses doit croître de même avec la charge.

Or plus ces masses ont de volume, plus leur diamètre horizontal doit être grand dans ses maxima et minima successifs; mais ces diamètres maxima et minima sont respectivement les diamètres des ventres et des noeuds; donc les diamètres des ventres et ceux des noeuds doivent également augmenter avec la charge. Seulement l'augmentation des masses isolées tend vers une limite peu étendue: car le plus grand volume qu'elles puissent acquérir est évidemment celui qu'elles prendraient si le mouvement de translation

²⁵⁵ C'est ainsi que Savart paraît considérer les ventres toutes les fois qu'il s'occupe de leur longueur, et nous nous sommes conformé à ses expressions; mais, en réalité, il est visible que l'espace en question se compose d'un ventre et de deux demi-noeuds.

du liquide était uniforme, c'est-à-dire celui des sphères dans lesquelles se résoudrait un cylindre indéfini formé du même liquide, et ayant un diamètre égal à celui de la section contractée.

Du reste, l'air que traverse la veine a sans doute aussi quelque influence: il ne peut être qu'imparfaitement entraîné dans le mouvement du liquide, et oppose ainsi une certaine résistance qui croît nécessairement avec la vitesse de translation, et, par suite, avec la charge; or cette résistance doit augmenter le maximum d'aplatissement des masses isolées, et entraver plus ou moins leur allongement subséquent; elle doit donc contribuer à faire croître les diamètres des ventres et des noeuds quand on augmente la charge.

Maintenant, si la charge ne varie pas, mais que l'on emploie un orifice plus grand, le volume des divisions de la veine, et, par suite, celui des masses isolées, sera aussi plus considérable; or plus ces masses sont grosses, moins leurs oscillations de forme doivent être rapides, et conséquemment plus elles doivent parcourir d'espace, dans leur descente, pendant une de ces oscillations; ainsi la longueur des ventres doit croître avec le diamètre de l'orifice. Quant aux diamètres respectifs des ventres et des noeuds, il est évident, d'après ce que nous avons fait remarquer plus haut, qu'ils croîtront en même temps.

On voit donc, par le contenu de ce paragraphe, que les faits du n° 5 du § 448 sont encore des conséquences nécessaires de la théorie, toujours dans le cas de vibrations de même période que celles du son propre à la veine. Passons aux faits des n^{os} 6 et 7.

§ 455. Lorsque la veine n'est point sous l'influence d'un instrument sonore, mais qu'elle est reçue dans un vase simplement posé sur le sol, la principale cause des mouvements vibratoires transmis par l'air et les supports au vase d'où elle s'échappe est le choc des masses isolées contre le liquide dans lequel elles tombent; on comprend donc que, dans ces mouvements, doivent dominer des vibrations de même période que celles qui résulteraient du choc des masses dont il s'agit contre une membrane tendue, et conséquemment l'action exercée sur la veine s'explique par ce que nous avons exposé dans les paragraphes qui précèdent. Seulement les vibrations ainsi produites n'ayant pas une grande intensité, les modifications de la veine ne pourront acquérir tout le développement dont elles sont susceptibles; en outre, ces mêmes vibrations étant peu régulières et se trouvant accompagnées des petites vibrations plus irrégulières encore qui proviennent des bruits extérieurs, les phénomènes doivent se ressentir de ces irrégularités, et c'est en effet dans ces circonstances que Savart décrit l'apparence de lames dans l'intérieur des ventres.

Savart a mesuré approximativement, dans ces mêmes circonstances, sur des veines d'eau lancées par deux orifices différents et sous des charges différentes, les longueurs et les diamètres des ventres ainsi que les diamètres des noeuds. Nous ne croyons pas inutile, de reproduire ici les résultats de ces mesures; ils sont exprimés en prenant le centimètre pour unité:

Orifice de 6 millimètres de diamètre.

CHARGES.	LONGUEURS de la PARTIE CONTINUE.	LONGUEURS des VENTRES.	DIAMÈTRES des VENTRES.	DIAMÈTRES des NŒUDS.
4,5	40	25	0,9	0,70
12	59	30	1,0	0,75
27	82	39	1,1	0,80
47	112	60	1,2	0,90

Orifice de 3 millimètres de diamètre.

CHARGES.	LONGUEURS de la PARTIE CONTINUE.	LONGUEURS des VENTRES.	DIAMÈTRES des VENTRES.	DIAMÈTRES des NŒUDS.
4,5	16	7,8	0,50	0,28
12	25	9	0,52	0,32
27	41	13	0,55	0,36
47	55	16	0,60	0,40

Nous ferons remarquer ici que la longueur d'un ventre étant l'espace parcouru par une masse pendant la durée d'une oscillation de forme, et cette durée étant constante dans une même veine, les ventres appartenant à celle-ci doivent augmenter en longueur à partir du premier, à cause de l'accélération de la descente. Il est donc singulier que Savart, qui, en un autre endroit de son Mémoire, parle de cette augmentation à propos d'une expérience particulière, ait donné, dans les tableaux ci-dessus, les longueurs dont il s'agit comme absolues; on doit présumer qu'elles se rapportent au premier ventre de chaque veine. A la vérité, l'expérience particulière dans laquelle Savart a observé l'augmentation de longueur des ventres devait rendre l'effet plus apparent, parce que le premier ventre naissait très près de l'orifice.

§ 456. Si, la veine tombant de même librement dans le liquide du vase qui la reçoit, on fait résonner à proximité de l'appareil un instrument qui rende l'unisson, comme nous l'avons supposé jusqu'ici, alors, sous l'action de ces vibrations plus intenses et parfaitement régulières, les modifications de la veine seront nécessairement plus prononcées c'est-à-dire que la portion limpide paraîtra encore un peu plus épaisse, que la partie continue subira un nouveau raccourcissement, que les ventres s'élargiront et que les noeuds s'aminciront. En outre, les ventres formés individuellement par chacune des masses se superposeront d'une manière plus exacte, et ainsi se dépasseront moins les uns les autres vers leurs extrémités, en sorte que les ventres qui résultent de leur ensemble seront plus ramassés sur eux-mêmes, et que les noeuds qui séparent ces derniers sembleront s'être allongés. Or tel est en réalité, comme on le voit par le n^o 7 du § 448, l'état de la veine sous l'influence dont il s'agit.

Les phénomènes seraient beaucoup plus réguliers encore si la veine était primitivement soustraite à toute influence étrangère; et, en effet, Savart parle de la grande régularité des ventres qui se montrent lorsqu'une semblable veine est reçue sur une membrane tendue, laquelle sert alors d'instrument sonore donnant l'unisson.

§ 457. Quand l'instrument que l'on fait résonner dans le voisinage de l'appareil rend un son autre que l'unisson de celui qui est propre à la veine, les vibrations ne se succédant plus aux mêmes intervalles que les passages des renflements et des étranglements dus aux forces figuratrices, il ne peut plus y avoir concours incessant entre les deux espèces d'action; cependant, puisque l'unisson produit des effets si prononcés, on comprend a priori que des sons différents doivent déterminer des effets analogues, mais moins intenses, et d'autant moins que le son employé s'écarte davantage de l'unisson.

Pour tâcher de démêler, jusqu'à un certain point, ce qui se passe alors dans la veine, supposons celle-ci préalablement abandonnée à ses seules forces figuratrices, et prenons d'abord le cas le plus accessible au raisonnement, savoir celui où le son excité à proximité est très voisin de l'unisson. Saisissons par la pensée l'instant où le milieu d'un étranglement dû aux forces figuratrices franchit la section contractée précisément au milieu de la durée d'une vibration ascendante; alors cette vibration concourra évidemment avec les forces figuratrices pour approfondir l'étranglement. Seulement, si le son de l'instrument est plus aigu que celui de la veine, et qu'ainsi la

vibration a moins de durée que le passage de l'étranglement, une très petite partie du bas de celui-ci aura été en lutte avec la fin de la vibration descendante qui a précédé, et une partie équivalente du haut sera également en lutte avec le commencement de la vibration descendante qui suivra, puisque ces vibrations descendantes tendent à renfler les portions de la veine sur lesquelles elles agissent. Si le son de l'instrument est, au contraire, plus grave que celui de la veine, il est clair que le concours aura lieu pour la totalité de l'étranglement, mais que le commencement de la vibration aura été en lutte avec la partie supérieure du renflement précédent, et que la fin de cette même vibration sera en lutte avec la partie inférieure du renflement suivant.

Il est aisé de voir qu'après un certain nombre de vibrations, un effet identique se reproduira, c'est-à-dire que le milieu d'une vibration ascendante coïncidera de nouveau avec le milieu du passage d'un étranglement, puis qu'il reviendra encore après un nombre de vibrations égal au précédent, et ainsi de suite périodiquement à des intervalles égaux. Si, par exemple, la durée d'une vibration est les 99/100 de celle du passage d'un étranglement ou d'un renflement, la durée totale de 100 vibrations doubles, c'est-à-dire composées chacune d'une vibration ascendante et d'une vibration descendante, équivaldra à la durée totale du passage de 99 étranglements et de 99 renflements; or il est facile de s'assurer que si l'on commence à compter cette durée à l'instant de l'une des coïncidences ci-dessus, elle se terminera aussi à l'instant d'une semblable coïncidence; dans notre exemple, les coïncidences se reproduiront donc successivement après des intervalles égaux à la durée de cent vibrations doubles. Essayons maintenant de suivre les concours et les luttes pendant chacun de ces intervalles, ou, en d'autres termes, entre une coïncidence et la suivante.

Pour cela examinons ce qui a lieu au moment où finit la première moitié de l'un de ces mêmes intervalles. Dans l'exemple que nous avons pris, nous serons alors évidemment encore au milieu d'une vibration ascendante; mais, si nous réfléchissons que l'intervalle commence au passage de l'origine d'une division, et comprend exactement le passage de 99 divisions entières, nous reconnaitrons que la fin de sa première moitié est l'instant du passage du milieu d'une division, et, par suite, du milieu d'un renflement; il y aura donc, pour cette vibration tout entière, opposition avec les forces figuratrices: ce sera le maximum de la lutte, et il est visible que celle-ci aura été jusque-là en augmentant, c'est-à-dire en occupant des portions de plus en plus grandes des vibrations successives, pour diminuer ensuite par les mêmes degrés.

Ces principes posés, voyons ce qu'on peut en déduire:

Chacun des étranglements pour lesquels il y aura coïncidence quittera la section contractée dans une phase plus avancée de la transformation, et ainsi se rompra à une moindre distance de l'orifice, que si l'on ne produisait pas de mouvements vibratoires; mais l'étranglement suivant, qui n'est déjà plus dans des conditions si favorables, ne pourra se rompre qu'un peu au-delà, et les ruptures subséquentes s'effectueront de même de plus en plus loin de l'orifice, jusqu'à celle de l'étranglement pour lequel la lutte entre les deux actions est à son maximum; après quoi les choses marcheront en sens inverse, c'est-à-dire que les lieux de rupture successifs remonteront, jusqu'à ce que revienne de nouveau un étranglement à coïncidence, puis tout recommencera dans le même ordre.

Dans une semblable veine, la partie continue doit donc aller en se raccourcissant et s'allongeant périodiquement; mais, à cause de la presque égalité entre les durées respectives d'une vibration et du passage d'un étranglement ou d'un renflement, ce ne sera évidemment qu'après un temps notable que le maximum de lutte se présentera, en sorte que l'allongement graduel de la partie continue s'effectuera avec assez de

lenteur pour qu'on puisse le suivre des yeux; enfin il en sera nécessairement de même du raccourcissement subséquent, et ainsi de suite. Or ces conclusions sont nettement vérifiées par le fait du n° 9 du § 448.

Quant aux battements, ils résultent de la réaction mutuelle du son de l'instrument et de celui de la veine; car, bien que Savart ne le dise pas en propres termes, on peut conclure de la manière dont il expose le fait en question, que la veine sur laquelle il opérait tombait sur une membrane tendue; dans ce qui précède, il est vrai, nous avons supposé la veine uniquement soumise à ses forces figuratrices et aux vibrations dues au son de l'instrument; mais le raisonnement demeure évidemment le même dans le cas où l'effet des forces figuratrices est activé par l'unisson résultant du choc contre une membrane.

Bien que l'aspect général du phénomène soit d'accord avec les principes que je viens d'exposer, je pense néanmoins que les choses n'ont pas lieu, en réalité, d'une manière tout à fait aussi simple; dans les divisions naissantes où la lutte est notable, la réaction mutuelle des deux causes opposées produit sans doute des effets plus compliqués.

§ 458. Mais c'est surtout lorsque le son de l'instrument s'écarte davantage de l'unisson, que ces effets de réaction doivent se prononcer, car alors, dans aucune des divisions naissantes, il n'y a concours presque complet; partout la lutte est notable; et comme les divisions des cylindres, et, par suite, les divisions naturelles de la veine, sont susceptibles de varier en longueur par des causes assez légères, on doit admettre que les mouvements vibratoires modifieront cette longueur, et qu'ainsi leur influence prédominera plus ou moins sur celle des forces figuratrices; les sons dont il s'agit doivent donc faire éprouver à la veine des changements analogues à ceux que détermine l'unisson, c'est-à-dire que la partie continue doit se raccourcir, que la partie trouble doit présenter des ventres et des noeuds, etc. Seulement il est clair que la prédominance de l'action vibratoire variera avec le rapport entre le son de l'instrument et celui qui est propre à la veine, et qu'en général elle sera d'autant moindre que le premier s'éloignera davantage du second; il est clair aussi que la prédominance s'accroîtra d'autant plus que le son de l'instrument sera plus intense, de sorte que des sons qui, excités à distance, sembleraient sans action sur la veine, pourront devenir efficaces si l'instrument sonore est mis en contact avec les parois du vase. Or toutes ces déductions s'accordent avec les faits des n° 8 et 13 du § 448; et, ce qui les confirme davantage, c'est le fait du n° 14, qui montre que, dans des conditions favorables, l'action des forces figuratrices peut être amenée à coïncider exactement avec celle des vibrations, même pour un écart considérable entre le son de l'instrument et celui qui est propre à la veine.

Dans les expériences de Savart sur l'influence des sons qui s'écartent de l'unisson, la veine n'était pas préalablement livrée à ses seules forces figuratrices; elle tombait librement dans l'eau du vase inférieur, de sorte que l'effet des forces figuratrices se trouvait plus ou moins activé; mais on comprend que cette circonstance ne pouvait annuler les réactions que nous avons considérées, et devait simplement les rendre moins faciles.

Enfin, d'après une observation de Magnus § 487, lors que la charge est très faible, la veine est influencée par tous les sons produits dans son voisinage, à l'exception seulement des Sons très aigus. C'est qu'avec des charges très faibles, le son principal est relativement grave, ainsi que tous ceux qui ne s'en écartent pas trop en dessus, et que, par suite, les vibrations correspondantes à ces sons ont plus d'amplitude, et luttent conséquemment avec plus d'avantage contre les forces figuratrices.

§ 459. Il serait, je crois, inutile, vu la complication des phénomènes, de chercher à

étudier ceux-ci avec plus de précision; d'ailleurs les vérifications expérimentales qu'on pourrait tirer du Mémoire de Savart ne seraient pas suffisamment nettes; voici textuellement les seuls passages de ce Mémoire qui se rapportent aux faits en question :

« Des sons à l'octave et à la quinte graves, à la tierce mineure, à la quarte superflue et à l'octave aiguë de celui que donne le choc de la partie trouble contre un corps renforçant, produisent sur la veine des modifications analogues, à celles que nous venons de décrire²⁵⁶, mais toutefois avec beaucoup moins d'énergie; et il est des sons qui n'agissent en aucune manière sur ses dimensions et l'aspect qu'elle présente. »

Et plus loin, en parlant d'une veine reçue à une très petite distance de l'orifice sur un corps solide épais:

« L'on remarque (de même que quand la veine est entière) que les octaves grave et aiguë ainsi que la quinte et la tierce mineure aiguë du son dont il s'agit²⁵⁷, influent également, mais un moindre degré, sur l'état de la veine.»

Enfin, à propos des modifications qu'éprouve, sous l'influence de l'unisson dû au choc contre une membrane tendue, une veine soustraite à toute autre influence étrangère:

« On obtient des résultats analogues, lorsque avec un instrument à cordes on produit divers sons dans le voisinage du réservoir, mais toujours l'un de ces sons exerce sur la veine une influence plus grande que tous les autres. »

Ces passages signifient-ils que, si l'on s'écarte notablement de l'unisson, il n'y a que l'octave et la quinte graves, la tierce mineure, la quarte superflue et l'octave aigu qui modifient l'état de la veine? Cela est très-vraisemblable, car alors, au lieu de dire : « et il est des Sons qui n'agissent en aucune manière etc. », Savart aurait dit: *et tous les sons autres que les précédents sont sans influence etc.* Doit-on interpréter ces mêmes passages en admettant que les sons qui s'y trouvent signalés sont les plus actifs après l'unisson, et que, parmi les tons restants de la gamme, les uns ont simplement moins d'efficacité, tandis que les autres n'exercent absolument aucune action? Mais, dans ce cas, peut-on croire que Savart se fût exprimé ainsi? Nous ferons remarquer, de plus, que la quarte superflue, indiquée dans le premier passage, est omise dans le second.

Ces énoncés si vagues montrent que Savart a peu étudié l'influence des sons plus ou moins éloignés de l'unisson, du moins dans les circonstances dont il s'agit ici.

§ 460. Pour terminer ce qui concerne l'influence d'un son excité à distance et différent de l'unisson, nous avons encore à rendre raison des faits du n° 10 du § 448.

Lorsque la veine tombe sur un corps qui ne peut rendre qu'un son déterminé, tel qu'un diapason, si l'on suppose, pour un instant, qu'elle n'éprouve aucune modification dans le nombre des masses isolées, les vibrations dues au choc de ces masses seront en général d'une autre période que celles du corps choqué, et conséquemment elles ne pourront provenir que de ce que chaque fois qu'une masse atteint ce corps l'air est expulsé d'entre eux, puis revient, pour être expulsé de nouveau à l'arrivée de la masse suivante et ainsi de suite; or les ondes sonores produites de cette manière sont nécessairement très faibles relativement à celles que font naître les vibrations du corps choqué lui-même; en outre, en faisant varier soit la charge, soit le diamètre de l'orifice, on est maître de diminuer autant qu'on le veut l'intervalle des deux sons.

Les vibrations de l'instrument (ou, dans le cas actuel, du corps choqué), transmises par l'air au vase et au liquide, n'ayant pas la même durée que les passages des étranglements et des renflements naissants dus aux forces figuratrices, il y a, comme nous l'avons exposé, lutte variable entre les deux genres d'action; mais, si les deux sons

²⁵⁶ C'est-à-dire à celles que produit l'unisson.

²⁵⁷ De l'unisson.

ne s'éloignent pas trop l'un de l'autre, la transformation de la veine, phénomène susceptible d'être influencé par des causes étrangères, peut, sous l'action des vibrations, allonger ou raccourcir les étranglements et les renflements naissants, de manière que la durée du passage de chacun d'eux soit précisément égale à celle d'une vibration et que les deux espèces d'actions soient constamment d'accord; ce point atteint, le son de la veine sera nécessairement à l'unisson de celui de l'instrument. Seulement, pour que les vibrations de l'instrument soient capables d'amener ce résultat, il faut évidemment qu'elles aient une énergie suffisante par rapport aux vibrations du son propre à la veine, puisque ces dernières tendent à favoriser l'action normale des forces figuratrices.

Mais cet état de la veine est un état forcé, puisque le mode naturel de la transformation est altéré. D'après cela, si quelque cause trouble brusquement la succession ou la transmission régulière des vibrations, les forces figuratrices devront aussitôt redevenir prépondérantes, et les étranglements et renflements naissants reprendront la longueur qui convient à l'action libre de ces forces. On s'explique donc sans peine cette particularité de l'expérience du n° 10 du § 448, qu'il suffit souvent d'un petit choc donné à l'appareil ou d'un changement de position du corps choqué, pour ramener subitement le son de la veine au ton qui lui est propre.

Nous avons supposé que, dans cette même expérience, le son de la veine se met à l'unisson de celui du corps choqué; cependant, comme on peut le conclure de l'énoncé du numéro en question, Savart ne s'exprime point à cet égard en termes précis: il dit simplement que le son du corps choqué modifie celui de la veine, qu'il en change la période; mais d'autres expériences que nous aurons bientôt à discuter permettent d'attribuer à ces mots le sens que nous leur avons donné.

§ 461. Enfin le n° 10 du § 448 nous apprend encore que lorsque l'écart des deux sons est fort petit, ces deux sons peuvent se faire entendre périodiquement ou même simultanément. Essayons d'expliquer également ces faits.

Supposons, pour fixer les idées, que le son propre à la veine soit quelque peu plus grave que celui du corps choqué. Dans le cas de l'unisson exact, le nombre des impulsions des masses en un temps donné serait la moitié du nombre des vibrations du corps dans le même temps, et conséquemment l'intervalle entre deux impulsions successives serait égal à la durée de deux de ces vibrations; donc, dans la supposition ci-dessus, l'intervalle entre deux impulsions surpassera un peu la durée de deux vibrations, et si la réaction de ces vibrations, sur les étranglements et les renflements naissants n'est pas assez puissante pour en modifier la longueur et amener ainsi l'unisson, le petit excès de durée des intervalles en question se maintiendra.

Cela étant, partons de la première impulsion. Celle-ci fera exécuter au corps une vibration dirigée de haut en bas, laquelle sera suivie d'une vibration de bas en haut; puis, un peu après le commencement d'une nouvelle vibration descendante, la deuxième impulsion arrivera; la troisième agira pendant la troisième vibration descendante, mais dans une phase un peu plus avancée de cette vibration; la quatrième impulsion aura lieu pendant la quatrième vibration descendante, et dans une phase encore un peu plus avancée; et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'une impulsion coïncide sensiblement avec la fin d'une semblable vibration. Sous ces impulsions répétées, l'amplitude des vibrations du corps ira nécessairement en croissant, jusqu'à l'impulsion que nous avons considérée en dernier lieu. Mais, toujours en vertu du petit excès de durée des intervalles, les impulsions qui suivront s'effectueront pendant les vibrations montantes, et de même dans des phases de plus en plus avancées, en sorte qu'après un nombre d'impulsions égal à celui des précédentes, le corps sera frappé aussi au moment de la terminaison d'une vibration; or ce second groupe d'impulsions détruira évidemment tout ce qu'avait fait

le premier, c'est-à-dire diminuera par degrés l'amplitude des vibrations, et finira par l'annuler. Un troisième groupe d'impulsions ravivera ces vibrations, un quatrième les annulera de nouveau, et ainsi indéfiniment. Le son du corps choqué doit donc alternativement se renforcer et s'éteindre; d'un autre côté, le son de la veine doit être plus faible quand les masses atteignent le corps pendant ses vibrations descendantes que quand elles le frappent pendant ses vibrations montantes, à cause de la différence des vitesses relatives, et l'on voit, de plus, que ce dernier son a ses minima pendant les renforcements de celui du corps, et ses maxima pendant les diminutions. Cela posé, si les vibrations du corps acquièrent, dans leurs plus grandes amplitudes, une certaine énergie, et si la vitesse relative des impulsions devient en même temps assez petite, le son de la veine pourra être entièrement masqué dans les instants de plus grande intensité de celui du corps, pour reparaître et dominer à son tour dans les instants intermédiaires; et, par conséquent, les deux sons se feront entendre périodiquement.

Mais si le corps n'est capable d'exécuter que des vibrations de peu d'amplitude, et s'il est tenu à une grande distance de l'orifice, il peut se faire que la vitesse relative des impulsions demeure toujours considérable, de manière que le son de la veine soit sensiblement uniforme, et que celui du corps, dans ses maxima, n'ait point assez d'intensité pour le masquer. Alors le premier ne cessera point d'être perçu, et conséquemment, pendant les périodes de renforcement du second, ils se feront entendre tous les deux à la fois. C'est sans doute dans ce sens qu'il faut interpréter les mots : *ou même simultanément*, qui sont empruntés textuellement à Savart.

§ 462. Reprenons actuellement le cas où l'on fait rendre à un instrument sonore l'unisson exact du son propre à la veine. Si l'instrument, au lieu d'agir à distance, est mis en contact avec les parois du vase d'où la veine s'échappe, il est clair que les vibrations communiquées à ces parois et propagées dans le liquide seront bien plus énergiques, et que, par suite, les modifications de la veine devront être bien plus prononcées; en outre, on comprend que les petites irrégularités dont nous avons parlé au § 455 pourront alors être entièrement effacées. Le contenu du n° 11 du § 448 s'explique donc de lui-même.

§ 463. Alors aussi on observe (fig. 12 du § 448), dans l'axe de la veine, à partir de l'extrémité inférieure de la partie continue, un autre système de ventres et de noeuds plus minces et plus courts, lequel est dû, ainsi que Savart le fait remarquer aux sphérules qui accompagnent les masses. Je dis aux sphérules, car, dans le cas actuel, la partie continue de la veine étant fort raccourcie, l'accélération due à la pesanteur ne peut allonger notablement les étranglements, de sorte que ceux-ci donnent lieu à des filets minces, et, par suite, à de véritables sphérules (§ 383).

Ici se présente une difficulté apparente. Lorsque la veine est soustraite à toute action vibratoire, sa partie trouble est exempte de ventres et de noeuds; il semble donc que, sous l'action des forces figuratrices seules, les masses arrivent à la forme sphérique sans exécuter d'oscillations sensibles, et que les oscillations de forme ont lieu uniquement dans le cas où les forces figuratrices sont activées par des vibrations; or le mode de production des sphérules ne peut en aucune manière être influencé par les vibrations, car celles-ci n'agissent directement qu'à la section contractée; plus bas que cette section, leur effet se borne à des vitesses acquises, qui accélèrent le développement des renflements et l'approfondissement des étranglements, puis la conversion de chacun de ces derniers en un filet, et ce filet ne se transforme ensuite, en fournissant ainsi les sphérules, que par les seules forces figuratrices, qui y naissent comme dans les cylindres liquides instables; cependant ces sphérules exécutent des oscillations de forme, puisque la trace de leur passage devant l'oeil offre des ventres et des noeuds.

Afin d'éclaircir ce point, examinons attentivement quelles sont les circonstances à l'égard des sphérules et à l'égard des grosses masses. D'après ce qui a été dit au § 375, le filet doit généralement se partager en trois parties, dont les deux extrêmes vont se réunir respectivement aux deux grosses masses entre lesquelles ce même filet se trouvait compris, tandis que l'intermédiaire se contracte à la fois et symétriquement du haut et du bas, en se renflant dans le sens horizontal, pour donner la sphérule dont nous nous occupons. En Vertu de cette simultanéité et de cette symétrie d'action, la petite portion de liquide en question atteint la forme sphérique vers laquelle elle tend; mais elle l'atteint avec une vitesse acquise, et la dépasse nécessairement, de manière que son diamètre vertical devient moindre et son diamètre horizontal plus grand que le diamètre de la sphère de même volume; de là les oscillations de forme des sphérules, et, par suite, les ventres et les noeuds qui en résultent.

Les choses ne se passent point identiquement de la même façon dans la grosse masse suspendue au filet et qui s'isole par la rupture de celui-ci: en effet, un instant avant cette séparation, la masse dont il s'agit était déjà rendue libre sa partie inférieure, par la rupture du filet formé entre elle et la masse qui la précède; ici donc les ruptures au-dessous et au-dessus de la masse, et conséquemment les deux contractions qui tendent à aplatir cette dernière dans le sens vertical, ne se font point tout à fait en même temps; mais la différence est nécessairement fort petite, et il en résulte que les grosses masses doivent aussi exécuter des oscillations de forme. Or c'est, en effet, ce que Magnus a constaté (§ 487); mais il a reconnu que les masses successives ne se détachent pas exactement à la même distance de l'orifice, de sorte qu'elles ne passent pas aux mêmes points dans leurs maxima respectifs d'élargissement et d'allongement, et qu'ainsi on ne peut observer de ventres et de noeuds. Il est évident, d'ailleurs, que ces oscillations de forme doivent être beaucoup moins prononcées que lorsque la veine est sous l'influence d'un mouvement vibratoire.

§ 464. Revenons, pour un instant, aux sphérules. Lorsqu'un filet se transforme, les petits étranglements qui s'y produisent se changent eux-mêmes en des filets plus déliés, dont chacun se rompt en deux points, et fournit ainsi, par sa portion moyenne, une sphérule très minime (§ 375). Ces dernières sphérules sont fréquemment rejetées hors de l'axe de la veine, entraînées sans doute par les mouvements de l'air; mais comme leur mode de génération est le même que celui des sphérules moins petites dont il a été question plus haut, elles doivent également exécuter des oscillations de forme, et Savart dit, en effet, que cela a lieu, bien qu'il n'indique point par quel moyen il l'a constaté: la trajectoire décrite par celles de ces sphérules qui sont lancées hors de la veine laisse probablement dans l'oeil une trace suffisante pour qu'on y observe des ventres et des noeuds; peut-être aussi distingue-t-on la figure apparente résultant du passage de celles qui se maintiennent dans l'axe.

§ 465. Maintenant produisons de nouveau un son qui s'écarte de celui de la veine, mais continuons à placer l'instrument sonore en contact avec le vase, de manière à donner plus d'énergie à l'action des vibrations, On voit, par le n° 13 du § 448, que, dans ce cas, presque tous les sons agissent sur la veine. Il semble encore, à la vérité, y avoir quelque vague dans ces mots *presque tous les sons* employés par Savart; mais on ne peut croire qu'ils signifient que des sons inefficaces alternent avec des sons efficaces. En effet, supposons, pour un instant, l'inefficacité de certains sons intermédiaires, et imaginons que le son de l'instrument aille en s'éloignant d'une manière continue de celui de la veine; alors, quand on quittera l'un de ces sons inefficaces, il faudra: ou bien que l'action sur la veine, de nulle qu'elle était pour ce son, augmente graduellement jusqu'à un certain point, ce qui serait contraire à l'énoncé du numéro cité, d'après

lequel l'action diminue à mesure qu'on s'écarte de l'unisson; ou bien que cette action devienne subitement prononcée, ce qui n'est guère admissible. Il est donc très probable que l'idée de sons inefficaces renfermée dans les mots : *presque tous les sons*, se rapporte simplement aux sons par trop distants de celui de la veine, lesquels, en vertu de l'énoncé en question, ne doivent produire qu'une action insensible.

§ 466. Nous avons dit que des vibrations différant en période, entre certaines limites, de celles du son de la veine, peuvent amener ce dernier à l'unisson de celui de l'instrument. Or la condition la plus favorable à la production de ce résultat, doit évidemment être le contact de l'instrument sonore avec les parois du vase, à cause de la transmission plus immédiate des vibrations. Et en effet, tandis que dans le cas du n^o 10 du § 448, le phénomène n'est réalisable que dans un intervalle de tierce mineure, ici, comme on le voit par le n^o 14 du même paragraphe, il s'étend à des intervalles d'une quinte en dessus du son principal et de plus d'une octave en dessous; ajoutons que Savart ne se sert plus, comme dans le premier cas, de termes peu précis: il dit nettement que le son de la veine se met à l'unisson de celui de l'instrument.

§ 467. Une limite supérieure aussi élevée que la quinte semble, au premier abord, être en opposition avec certains résultats de notre étude des cylindres liquides. En effet, pour que le son de la veine monte d'une quinte, il faut nécessairement que le nombre des masses isolées qui vont, dans un temps donné, heurter la membrane tendue, augmente dans le rapport de 2 à 3, et que, par suite, il en soit de même du nombre des divisions naissantes qui passent, dans le même temps, à la section contractée; et comme, sous une charge constante, la longueur des divisions naissantes est évidemment en raison inverse de ce dernier nombre, il s'ensuit que, du son principal à la quinte de celui-ci, les divisions naissantes se raccourcissent dans le rapport de 3 à 2; mais nous savons (§ 443), que lorsqu'une veine d'eau rend le son qui lui est propre, la longueur de ses divisions naissantes est égale à 4,38 fois le diamètre de la section contractée; si donc, par la seule action d'un instrument sonore, le son d'une semblable veine monte d'une quinte, la longueur de ses divisions naissantes se réduira aux $\frac{2}{3}$ de la valeur ci-dessus, c'est-à-dire à 2,92 fois le diamètre de la section contractée; or ce nombre est un peu inférieur à la limite de la stabilité des cylindres liquides, limite qui est, comme nous le savons aussi, égale à 3,14, et cependant nous avons démontré (§ 371) que lorsqu'un cylindre liquide se transforme, la longueur de ses divisions ne peut être moindre que cette même limite.

La difficulté n'est qu'apparente. La démonstration citée suppose que le cylindre commence spontanément à se transformer, et alors elle est rigoureusement vraie; mais elle ne s'applique point au cas où les étranglements et les renflements sont originairement formés par une cause étrangère suffisamment énergique. En effet, la démonstration dont il s'agit consiste essentiellement à faire voir que si, dans les premières phases de la transformation, l'on considère l'ensemble d'un étranglement et d'un renflement, ensemble dont la longueur équivaut à celle d'une division, tout se passe dans cette portion du cylindre comme si ses deux bases étaient solides, en sorte que la transformation ne peut s'établir spontanément qu'avec un écartement de ces bases au moins égal à la limite de la stabilité; mais si, dans un cylindre réalisé entre deux disques solides dont la distance est un peu plus petite que la limite de la stabilité, la transformation ne saurait commencer d'elle-même, nous savons (§§396 et 399 à 401) qu'elle continue d'elle-même si elle a été commencée par une cause étrangère qui a accumulé le liquide en certaine quantité vers l'un des disques, de manière à déterminer artificiellement un renflement et un étranglement suffisamment prononcés. La démonstration que nous avons rappelée ne peut donc plus être invoquée lorsque, dans une veine liquide, les

étranglements et les renflements naissants sont formés par des vibrations énergiques. Alors, si la somme des longueurs de l'un de ces étranglements et de l'un de ces renflements, ou son égale la longueur d'une division, est un peu inférieure à la limite de la stabilité, la transformation pourra partir de ce mode anormal, et plus les vibrations seront intenses, plus le dernier son pour lequel existera la possibilité du phénomène sera élevé au-dessus du son principal.

Si le son étranger est au-dessous du son principal, et tend ainsi à donner aux divisions naissantes une longueur nécessairement supérieure à la limite de la stabilité, il ne rencontrera point l'espèce de résistance que nous venons de signaler en deçà de cette limite, en sorte que la possibilité du phénomène s'étendra beaucoup plus loin, et nous voyons, en effet, que, dans les expériences de Savart, elle embrasse un intervalle de plus d'une octave.

Il y a encore une autre raison pour que le phénomène soit moins limité au-dessous du son principal qu'au-dessus dans un même instrument sonore, l'amplitude des vibrations augmente généralement avec la gravité du son; or on comprend que plus l'amplitude des vibrations transmises est considérable, plus est grand l'excès de liquide que chaque vibration descendante tend à pousser dans la veine pour façonner un renflement naissant, et plus est grande aussi la soustraction de liquide que chaque vibration ascendante tend à opérer pour creuser un étranglement naissant. Si donc, à mesure que le son de l'instrument s'écarte du son principal, soit en dessous, soit en dessus, la longueur des divisions naissantes que les vibrations tendent à former devient de plus en plus supérieure ou de plus en plus inférieure à celle des divisions naissantes que tendent à former de leur côté les forces figuratrices, et si de là naît évidemment une lutte de plus en plus forte avec ces dernières forces, d'autre part, au-dessous du son principal, les vibrations agissent de plus en plus énergiquement pour faire prévaloir le nouveau mode de transformation, et cet accroissement d'action doit compenser plus ou moins l'accroissement de lutte.

Remarquons ici que dans le cas d'un son très grave par rapport au son principal, le nouveau mode de transformation ne s'établit point de la même manière que dans celui d'un son qui ne s'éloigne pas beaucoup du son principal; dans ce dernier cas, en effet, à cause du peu de différence de longueur entre les divisions naissantes des deux espèces, il est bien probable que les forces figuratrices modifient simplement leur propre action, en allongeant ou raccourcissant les divisions naissantes qui leur conviennent, de façon à les faire coïncider avec celles qui conviennent aux vibrations; mais lorsque le son de l'instrument est assez bas pour que la longueur de ces dernières divisions surpasse considérablement celle des autres, lorsque, par exemple, l'instrument rend l'octave grave, et que les vibrations transmises sont assez intenses pour imposer à la veine leur mode de transformation, on doit admettre que l'action des forces figuratrices est complètement détruite, en sorte qu'il n'y a plus modification du premier mode, qui s'adapte au second, mais substitution absolue du second au premier.

Dans le cas de la quinte aigu il y a deux autres raisons qui aident au changement de son de la veine: en premier lieu, après l'action immédiate de chaque vibration, la déformation doit augmenter par les vitesses acquises; et, en deuxième lieu, les divisions, et par suite les étranglements et les renflements, s'allongent pendant leur descente, la somme des longueurs d'un étranglement et d'un renflement, d'abord inférieure à la limite de la stabilité, va aussitôt en se rapprochant de cette limite, en sorte que le progrès de la transformation d'après le mode anormal originellement imprimé devient plus facile.

§ 468. Ainsi, la théorie rend raison de tous les phénomènes résultant de l'action

des vibrations sur les veines lancées suivant la verticale descendante, de tous ceux, du moins, que Savart décrit d'une manière précise; pas sons aux veines lancées dans d'autres directions.

Et d'abord, puisque, dans ces veines, il y a également transformation graduelle en masses isolées, les sons doivent nécessairement exercer sur elles une influence analogue à celle qu'ils exercent sur les veines lancées verticalement de haut en bas; le n^o 15 du § 448 n'a donc pas besoin d'explication.

§ 469. Mais il n'en est pas de même du n^o 16. Si toutes les divisions, en atteignant l'une après l'autre l'extrémité de la partie continue, s'isolaient identiquement de la même manière, et si toutes les masses portaient de là avec la vitesse précisément correspondante au mouvement de translation du liquide en ce point, celles-ci décriraient toutes exactement la même trajectoire, et dès lors la partie discontinue de la veine ne pourrait présenter d'éparpillement ou de gerbe; il y a donc, comme Savart le fait remarquer, des irrégularités dans l'émission des masses isolées de l'extrémité de la partie continue; ces irrégularités, du reste, doivent être fort petites, car la gerbe n'a pas une grande largeur. J'avais pensé d'abord qu'elles provenaient des mêmes causes que celles dont il a été question au § 455. Mais si cela était, la suppression des actions étrangères devrait faire disparaître la gerbe, et réduire ainsi la totalité de la veine à un jet unique; or c'est ce que l'expérience n'a point confirmé: en employant, à l'égard d'une semblable veine, les moyens dont Savart s'est servi dans le cas des veines verticales descendantes, c'est-à-dire en recevant la partie discontinue sur une planche épaisse convenablement inclinée, et en plaçant des corps mous sous le vase d'où la veine s'échappait, sous celui dans lequel elle se rendait et sous les supports, je n'ai pu réussir à faire éprouver à la gerbe une diminution notable. On doit inférer de là que les irrégularités ne sont point dues à des mouvements vibratoires, et que, par conséquent, elles affectent l'action même des forces figuratrices; on comprend, en effet, vu la nature du phénomène de la transformation, que des causes perturbatrices même légères doivent influencer sur la parfaite identité de toutes les divisions qui naissent l'une après l'autre à la section contractée; nous avons vu, par exemple, dans les expériences des § 361 à 369, une cause étrangère altérer l'égalité de longueur des divisions d'un cylindre. Cela posé, nous allons montrer que de petites différences de cette espèce dans les divisions naissantes d'une veine lancée sous une obliquité convenable, doivent nécessairement donner lieu à un certain éparpillement de la partie discontinue.

Considérons en particulier deux des étranglements avec le renflement qu'ils comprennent entre eux. Ainsi que nous le savons, chacun de ces deux étranglements, d'abord très faiblement indiqué lorsqu'il quitte la section contractée, s'approfondit ensuite graduellement dans le trajet de la partie continue, en envoyant la moitié de son liquide dans le renflement; celui-ci reçoit donc, par son extrémité antérieure, du liquide qui y est chassé en sens contraire du mouvement de translation, et, par son extrémité postérieure, du liquide qui y est chassé dans le sens même de ce mouvement, en sorte que sa vitesse de translation tend à être diminuée par le premier de ces afflux et à être augmentée par le second. Maintenant, bien que ces deux actions opposées soit en général inégales, parce que l'étranglement antérieur est, à chaque instant, dans une phase un peu plus avancée de transformation que le postérieur, cependant, si les deux étranglements étaient parfaitement identiques à leurs naissances respectives, et si, par suite, ils ont subi identiquement, quoique non tout à fait aux mêmes instants, les mêmes modifications jusqu'à leurs ruptures respectives, il est évident qu'après ces deux ruptures, c'est-à-dire au moment où le renflement se trouvera à l'état de masse isolée, la somme des quantités de mouvement apportées dans cette masse par l'étranglement

antérieur aura été absolument compensée par celle des quantités de mouvement qui y ont été apportées, dans l'autre sens, par l'étranglement postérieur, et qu'ainsi cette même masse quittera la partie continue avec la vitesse exactement correspondante au mouvement général de translation. Mais il est clair que la compensation ne sera plus entière si les deux étranglements différaient à leurs naissances, si, par exemple, ils étaient inégaux en longueur: il résulte de la moindre durée de la transformation quand les divisions sont plus longues, et, par suite, quand les étranglements sont plus longs, que le plus allongé des deux étranglements dont il s'agit s'approfondira plus rapidement que l'autre; et comme, en vertu de son excès de longueur, il renferme plus de liquide, il enverra dans le renflement un plus grand afflux de matière avec des vitesses plus grandes, et conséquemment une plus grande quantité de mouvement. Si donc ce même étranglement est le postérieur, la masse quittera la partie continue avec un excès de vitesse, et si c'est l'antérieur, elle partira avec un déficit de vitesse. Ainsi, de petites différences de longueur dans les étranglements naissants auront pour résultat d'établir de petites inégalités entre les vitesses des masses isolées successives; mais dès lors ces masses parcourront nécessairement des paraboles d'inégale amplitude, et par conséquent s'éparpilleront dans un plan vertical, en formant la gerbe.

Cette explication suppose que les causes perturbatrices ne produisent, dans les étranglements, aucune irrégularité dans des sens perpendiculaires à l'axe de la veine; or on a vu (§ 359 et 413) que, pendant la transformation d'un cylindre liquide instable, la figure tend avec énergie à demeurer symétrique par rapport à son axe, et l'on comprend qu'il doit en être de même des étranglements et des renflements de notre veine courbe, de sorte que des irrégularités dans un sens normal à celle-ci ne sauraient persister.

D'après cette même explication, il est clair qu'il y a deux limites extrêmes pour lesquelles l'éparpillement est nécessairement nul, savoir lorsque la veine est lancée verticalement de haut en bas et lorsqu'elle est lancée verticalement de bas en haut, puisque, dans ces deux cas, toutes les masses isolées parcourent une même trajectoire rectiligne; si donc on passe du premier au second en faisant varier par degrés la direction suivant laquelle le jet est lancé, la gerbe ne pourra commencer à se montrer d'une manière bien distincte qu'à partir d'un certain angle entre cette direction et la verticale descendante, et elle devra cesser d'être bien apparente au delà d'un autre certain angle. De plus, tant que la veine sera lancée dans des directions obliquement descendantes, et même dans la direction horizontale, on comprend que les trajectoires décrites par les masses s'échappant avec des vitesses différentes ne s'écarteront pas assez les unes des autres pour que la gerbe se prononce nettement, en sorte que la première direction qui commencera à rendre la gerbe visible, sera obliquement montante. Toutes ces conclusions sont d'accord avec les faits du numéro que nous discutons.

Nous admettons, on le voit, que les inégalités entre les étranglements naissants ne dépendent point de la direction suivant laquelle le jet est lancé: et, en effet, il n'y a aucune raison plausible d'attribuer ces inégalités à l'obliquité montante du jet. Si nous n'en avons point parlé en traitant des veines verticales descendantes, c'est que, dans ces dernières veines, elles ne peuvent donner lieu à aucune apparence d'un genre particulier; elles ne font alors évidemment qu'augmenter un peu, dans l'axe de la veine, l'inexactitude de la superposition des systèmes individuels de ventres et de noeuds, et elles constituent ainsi simplement une influence à ajouter à celles qui sont mentionnées au § 455. Quant à la nature des causes perturbatrices qui produisent les inégalités en question, il serait sans doute bien difficile de la découvrir; mais, quelle qu'elle soit, l'éparpillement de la partie discontinue dans les veines lancées sous un angle

convenable nous révèle la présence de ces causes.

§ 470. Maintenant, une veine étant lancée sous un angle tel que la gerbe soit bien formée, soumettons-la à l'influence d'un instrument sonore. Le son qui raccourcira le plus la partie continue, sera encore évidemment celui dont les vibrations se succèdent aux mêmes intervalles que les passages, à la section contractée, des étranglements et des renflements dus aux forces figuratrices. Mais ces vibrations étant parfaitement régulières et isochrones, elles empêcheront, si elles ont, une intensité suffisante, les causes perturbatrices de modifier les étranglements naissants; en d'autres termes, en activant la transformation, elles y apporteront leur régularité, en sorte que tous les étranglements naissants auront même longueur, et qu'ainsi toutes les masses isolées suivront identiquement la même trajectoire (§ précéd.); sous l'influence de ce son, la gerbe devra donc disparaître, et la totalité de la veine se réduira à un jet unique présentant un système bien régulier de ventres et de noeuds.

§ 471. Quant aux effets singuliers de réduction de la gerbe à deux ou à trois jets sous l'influence d'autres sons, il fallait, pour en tenter l'explication, connaître les rapports des sons dont il s'agit avec le son principal, rapports que Savart n'indique point. D'après cela, comme ces phénomènes ne sont pas les moins curieux de ceux qui résultent de l'action des vibrations sur les veines liquides, je me suis décidé à essayer l'expérience.

L'orifice que j'ai employé avait un diamètre de 3 millimètres; il était percé au centre d'une plaque circulaire en laiton de 12 centimètres de diamètre²⁵⁸, inclinée de manière que le jet fût lancé sous un angle d'environ 35° au-dessus de l'horizontale; cette plaque formait l'une des bases d'un tambour cylindrique, lequel communiquait, par un tube horizontal large et court, avec la partie inférieure d'un grand vase de Mariotte; la charge était de 34 centimètres; enfin l'instrument sonore était un violoncelle, dont on faisait reposer la base sur les supports de l'appareil.

La gerbe étant bien formée, on a d'abord cherché par tâtonnement le son principal, ou, en d'autres termes, celui qui ramenait nettement la totalité de la veine à un jet unique avec un système bien régulier de ventres et de noeuds, et qui, en même temps, faisait naître le premier ventre très près de l'orifice. Ce point atteint, on a haussé le son de l'instrument par demi-tons successifs. Alors l'influence des vibrations a été en diminuant: le jet a commencé par perdre de sa régularité, puis la gerbe a graduellement reparu, après quoi elle s'est maintenue, sans se réduire à deux ni à trois jets. On est revenu ensuite au son principal, et l'on a fait descendre le son de l'instrument, à partir de là, par demi-tons aussi. Les mêmes effets, savoir l'altération de la régularité du jet et la réapparition progressive de la gerbe, se sont manifestés; mais, en approchant de l'octave grave, on a remarqué une tendance au changement de la gerbe en un double jet, et, lorsqu'on est arrivé à ce dernier son, la gerbe a été nettement remplacée par deux jets avec des systèmes réguliers de ventres et de noeuds. On a continué à abaisser le son, et les deux jets se sont montrés de même, jusqu'à la tierce au-dessous de l'octave grave; plus bas encore, et tant qu'on n'a pas atteint la double octave grave, on a obtenu tantôt deux, tantôt trois jets; seulement la quinte a donné quelquefois un jet unique; enfin, pour la double octave grave, on a observé constamment trois jets. Dans tous ces cas, les jets avaient toujours chacun leur système de ventres et de noeuds.

Ces faits sont moins restreints que ceux qui sont énoncés dans le n° 16 du § 448; en effet, d'après ce numéro, qui reproduit le sens des expressions de Savart, ce serait uniquement sous l'influence du son principal que la gerbe se contracterait en un seul

²⁵⁸ Ce grand diamètre a été motivé par la nécessité de laisser aux vibrations de la plaque une liberté suffisante.

jet, et il n'y aurait que deux autres sons déterminés et différents qui feraient apparaître respectivement deux jets et trois jets distincts. Mais l'absence d'indication des rapports entre ces sons et le son principal, suffit pour montrer que Savart n'a pas donné toute son attention aux phénomènes de ce genre, et qu'après les avoir observés dans des cas isolés, il n'a pas cherché s'ils étaient susceptibles d'extension.

§ 472. Voyons actuellement si la théorie peut rendre raison de ces mêmes phénomènes. Commençons par l'octave grave. Pour ce son, la durée d'une vibration est double de celle du passage d'un étranglement ou d'un renflement à la section contractée, d'où nous concluons sans peine que les divisions qui naîtraient sous l'action seule de l'octave grave du son principal, seraient doubles en longueur de celles que déterminerait de son côté l'action isolée des forces figuratrices. D'après cela, nous pouvons admettre que chacune des premières embrasse exactement l'ensemble de deux des secondes: car, de cette manière, à toutes les sections qui terminent ces ensembles ou couples, il y a évidemment concours absolu entre les deux genres d'action, les sections dont il s'agit constituant à la fois les milieux des étranglements qui résulteraient des vibrations, et des milieux d'étranglements dus aux forces figuratrices. Maintenant, examinons ce qui doit se passer, pendant la transformation, dans l'un quelconque de ces mêmes couples de divisions. Ce couple se composant de deux divisions entières, contient deux renflements qui comprennent entre eux un étranglement, et se termine par deux demi étranglements; or, tandis que les étranglements entiers auxquels ces terminaisons appartiennent sont, comme nous l'avons vu, favorisés par les vibrations, il est clair que l'étranglement intermédiaire est, au contraire, en lutte, puisque son milieu, qui est le milieu du couple, correspond au milieu de la division que les vibrations tendent à produire, et, par suite, au milieu du renflement de celle-ci; chacun des renflements que font naître dans la veine les forces figuratrices, est donc adjacent à deux étranglements inégalement sollicités. En outre, les étranglements favorisés par les vibrations doivent s'allonger sous l'influence de ces dernières, puisque les étranglements qu'elles produiraient à elles seules auraient une longueur deux fois plus grande, et comme la longueur de chacun des couples de divisions ci-dessus considérés demeure la même qu'en l'absence du son de l'instrument, il s'ensuit que les étranglements intermédiaires aux précédents, c'est-à-dire ceux qui occupent les milieux des couples et qui sont en lutte avec les vibrations, doivent être raccourcis. On peut donc admettre que les étranglements favorisés, bien que, dès leur naissance, ils soient déjà plus amincis que les étranglements en lutte, contiennent cependant alors, à cause de leur excès de longueur, plus de liquide que ces derniers; et comme, par la double raison qu'ils sont plus longs et qu'ils sont activés par les vibrations, ils arrivent plus rapidement à leur rupture, on voit qu'ils enverront dans les renflements plus de matière avec plus de vitesse, et, par suite, une plus grande quantité de mouvement. Tous les renflements se trouveront ainsi dans la condition que nous avons analysée dans le § 469, et conséquemment les masses isolées, en abandonnant la partie continue, auront les, unes un petit excès de vitesse, et les autres un petit déficit de vitesse. Mais ici les vibrations imprimant leur régularité aux phénomènes, rendent identiques entre eux, à leurs naissances, tous les étranglements favorisés, et rendent de même identiques entre eux tous les étranglements en lutte, en sorte que toutes les masses formées par les renflements qui, dans le parcours de la partie continue, avaient en arrière l'étranglement favorisé, partent avec un même excès de vitesse et décrivent conséquemment une même trajectoire, et que toutes celles qui proviennent des renflements pour lesquels l'étranglement favorisé était en avant, partent avec un même déficit de vitesse et décrivent une autre même trajectoire; donc, sous l'influence de l'octave grave du son principal, la gerbe doit être remplacée par

deux jets séparés.

Cependant il ne se pas impossible que le son considéré fit disparaître la gerbe; en effet, ce son étant déjà très grave, du moins à l'égard de la veine sur laquelle j'ai opéré, ses vibrations ont beaucoup d'amplitude, et pourraient agir avec assez d'énergie pour empêcher la formation des étranglements en lutte, et ne laisser ainsi dans la veine que les divisions qu'elles tendent à produire à elles seules, auquel cas toutes les masses isolées auraient nécessairement une même vitesse, savoir la vitesse normale.

Examinons, en second lieu, l'influence de la quinte grave du son précédent, ou, en d'autres termes, de la double quinte grave du son principal. Les vibrations de cette double quinte étant trois fois moins rapides que celles du son principal, on en conclut aisément que chacune des divisions qu'elles tendent par elles-mêmes à déterminer dans la veine, comprend exactement trois des divisions dues aux forces figuratrices. On voit, de plus, que, des trois renflements contenus dans cet ensemble de divisions, le postérieur a derrière lui un étranglement favorisé, et devant lui un étranglement en lutte, que l'antérieur a, au contraire, devant lui un étranglement favorisé, et derrière lui un étranglement en lutte, et enfin que l'intermédiaire se trouve entre ces deux étranglements en lutte, lesquels sont identiques entre eux à leurs naissances respectives. D'après cela, les quantités de mouvement se distribueront nécessairement, dans les masses isolées provenant de ces trois divisions, de telle manière que la postérieure quittera la partie continue avec une vitesse supérieure à la vitesse normale, que l'antérieure prendra une vitesse inférieure à cette vitesse normale, et que l'intermédiaire partira avec la vitesse normale elle-même; et comme, toujours à cause de la parfaite régularité des vibrations, les choses se passent identiquement de même dans chacun des systèmes de trois divisions, il ne pourra y avoir, dans la partie discontinue, que trois vitesses différentes. Si donc l'action des vibrations ne masque point entièrement celle qu'exerceraient librement, avant son influence, les forces figuratrices, la gerbe se résoudra en trois jets distincts; et si, au contraire, l'action des forces figuratrices est complètement dominée, ce qui doit avoir lieu plus aisément que pour l'octave grave, à cause de l'amplitude plus grande encore des vibrations, il n'y aura qu'un jet, ainsi que nous l'avons fait voir plus haut.

Quant à la séparation en deux jets sous l'influence aussi de la double quinte grave, résultat que l'expérience a donné également, on peut s'en rendre raison de la manière suivante. Lorsque l'action des vibrations est prépondérante, et qu'ainsi il ne naît à la section contractée que les divisions qu'elle détermine, celles-ci ont une grande longueur, puisque chacune d'elles tient la place de trois des divisions que dessineraient les forces figuratrices; or nous savons que toute figure liquide dont une dimension est considérable relativement aux deux autres, tend à se partager en masses isolées; on peut donc admettre que, dans les divisions dont il s'agit, si les vitesses transversales acquises ne sont pas suffisantes pour s'y opposer, il se développe de nouvelles forces figuratrices qui partagent chacune de ces mêmes divisions en deux autres, en creusant un étranglement en son milieu, et dès lors, comme tous les étranglements ainsi produits sont évidemment en lutte, le raisonnement employé à l'égard de l'octave grave montre que l'on doit obtenir deux jets.

Remarquons ici que les forces figuratrices anormales dont il vient d'être question ne sauraient former, dans chaque grande division, plus d'un étranglement; en effet, si elles en formaient deux, ce qui partagerait chaque grande division en trois petites, ces dernières auraient la même longueur que celles de la veine non soumise à l'influence de l'instrument sonore; mais, pour que cela fût possible, il faudrait que les nouvelles divisions n'éprouvassent pas plus de résistance à se dessiner qu'en l'absence de toute

action étrangère car on peut conclure de ce qui a lieu dans les cylindres, que, dans toute figure liquide plus ou moins analogue, la longueur des divisions augmente avec les résistances; or les vitesses transversales acquises déterminant, dans nos grandes divisions, une tendance à persévérer dans le mode de transformation imprimé par les vibrations, constituent une résistance à un partage ultérieur.

Passons, en troisième lieu, à la double octave grave. Ici chacune des divisions qui naîtraient sous l'action seule des vibrations, comprendrait évidemment quatre des divisions qui résulteraient des seules forces figuratrices; or, si ces deux actions se combinaient, il semble que l'on devrait avoir quatre jets distincts: car il est aisé de voir que, dans les trois étranglements qui se formeraient alors, la lutte serait inégale, qu'elle serait plus forte pour l'étranglement du milieu que pour les deux autres, en sorte que chacun des deux renflements compris entre ces trois étranglements recevrait des deux côtés des quantités de mouvement inégales, et enfin que les différences seraient plus grandes pour les deux renflements extrêmes, dont chacun, se trouverait compris entre un étranglement en lutte et un étranglement favorisé. Mais, d'une part, les vibrations dont il s'agit ayant une amplitude considérable, on conçoit que leur action doit toujours effacer celle des forces figuratrices, et, d'autre part, les divisions formées de cette manière étant très longues, on conçoit également, d'après ce que nous avons dit plus haut, qu'il doit s'y engendrer de nouvelles forces figuratrices qui en opèrent le fractionnement; or, par la raison de résistance indiquée de même plus haut, ce fractionnement doit donner ici au plus trois parties, ce qui, vu la distribution des luttes et des concours et la régularisation apportée par les vibrations, doit convertir la gerbe en trois jets seulement.

Reste, en quatrième lieu, l'action des sons compris entre l'octave grave et la quinte en dessous, et entre celle-ci et la double octave grave. Pour ces sons, il n'y a plus de rapport simple entre les longueurs des divisions qui résulteraient respectivement des vibrations seules et des forces figuratrices seules; mais on admettra sans peine que, sous l'influence de ceux qui avoisinent, soit en dessus, soit en dessous, la double quinte grave, et dans le cas où l'effet des vibrations ne se substitue pas complètement à celui des forces figuratrices, les divisions dues à ces dernières forces se raccourcissent ou s'allongent un peu, de manière à permettre, aux limites qui séparent les systèmes successifs de trois de ces divisions, le concours absolu des deux genres d'actions, et à rétablir ainsi le rapport simple de 3 à 1 appartenant à la double quinte; d'où la résolution en trois jets. Sous cette même influence, comme sous celle de la double quinte, si les vibrations sont prépondérantes, mais pas assez pour s'opposer à un développement ultérieur de forces figuratrices, chaque grande division ne pourra se partager qu'en deux, en sorte que la partie discontinue de la veine ne présentera que deux jets.

On admettra également que les sons plus rapprochés de l'octave grave feront prévaloir le mode relatif à cette dernière, et qu'ainsi la gerbe ne se changera jamais qu'en deux jets.

Enfin l'on admettra encore que, pour des sons qui ne s'éloignent pas trop de la double octave grave, les vibrations ont toujours assez d'amplitude, et, par suite, assez d'action, pour surmonter les forces figuratrices ordinaires, et qu'en même temps les divisions qu'elles font naître sont toujours assez longues pour que chacune d'elles doive nécessairement subir ensuite un fractionnement, lequel la partage au plus en trois, et pourra aussi ne la partager qu'en deux, s'il éprouve de la part des vibrations une plus grande résistance; d'où trois jets ou deux jets.

Quant aux systèmes de ventres et de noeuds qui s'observent dans chacun des jets, ils sont la conséquence évidente des vitesses transversales acquises qui proviennent de

l'action des vibrations.

§ 473. On peut se demander pourquoi, au-dessus du son principal et entre celui-ci et son octave grave, aucun son, à l'exception de ceux qui avoisinaient ces deux derniers, n'a occasionné, dans les expériences décrites au § 471, rien d'analogue aux phénomènes que nous venons d'étudier; en effet, pour la simple quinte grave du son principal, par exemple, on trouvera facilement que la longueur occupée par l'ensemble de deux des divisions dues aux vibrations seules serait égale à celle qu'occupe l'ensemble de trois divisions dues aux forces figuratrices, en sorte qu'en imaginant ces deux ensembles superposés et se combinant, il y aurait concours dans les deux étranglements dont les terminaisons du système feraient partie, et lutte dans les deux étranglements intermédiaires appartenant au second des deux ensembles considérés; et, comme ces deux luttes seraient égales, on pouvait s'attendre, d'après notre théorie, à voir la gerbe faire place à trois jets; enfin on pouvait s'attendre également, par des raisons analogues, à la manifestation de trois jets sous l'influence de la quarte aiguë et de deux jets sous celle de la quinte aiguë du son principal.

Mais, dans notre théorie, l'apparition d'un, de deux ou de trois jets au lieu, de la gerbe, suppose, comme on l'a vu, que les vibrations communiquées au liquide régularisent ce qui se passe dans la veine, et cela exige qu'elles aient une énergie d'action capable de neutraliser l'effet des causes perturbatrices qui tendent à établir, dans les étranglements naissants successifs, des inégalités de longueur non symétriquement distribuées; or, toutes choses égales d'ailleurs, l'action des vibrations sur la veine décroissant avec l'amplitude de ces vibrations, on comprend qu'au-dessus de l'octave grave du son principal cette action a pu être simplement insuffisante, et s'il eût été possible d'augmenter, par une transmission plus immédiate ou par une meilleure disposition du système de l'orifice, l'amplitude des vibrations communiquées, les trois Sons signalés plus haut auraient sans doute cessé de se montrer inactifs à l'égard de la gerbe. C'est ce qui deviendra évident, si l'on fait attention que les vibrations agissent sur les veines lancées obliquement de la même manière que sur les veines lancées verticalement de haut en bas, et si l'on se rappelle que, dans les expériences de Savart mentionnées dans le n^o 14 du § 448, expériences dans lesquelles tout était disposé de façon à donner une grande intensité aux vibrations communiquées, le mode de transformation imprimé par celles-ci se substituait complètement à celui des forces figuratrices, même pour des sons allant jusqu'à la quinte aigus du son principal.

Nous avons parlé de l'influence possible d'un changement au système de l'orifice; c'est qu'en effet l'orifice employé dans mes expériences était percé dans une plaque très mince²⁵⁹, et que, par suite, cette plaque vibrerait peut-être difficilement à l'unisson de sons qui n'avaient pas une certaine gravité.

§ 474. Nous n'avons plus maintenant, pour achever l'étude de l'influence exercée sur les veines liquides par les mouvements vibratoires, qu'à montrer la liaison de la théorie avec les faits du n^o 17 du § 448, et cette liaison paraît moins facile à établir:

Puisque le son principal est aussi celui pour lequel la durée d'une vibration est égale à celle du passage d'un étranglement ou d'un renflement à la section contractée, et puisque, d'après l'expérience de Savart, le nombre de vibrations correspondant à ce son diminue à mesure que la direction suivant laquelle le jet est lancé s'écarte de la verticale descendante, il doit en être de même du nombre d'étranglements et de renflements naissants, et, par suite, du nombre de divisions naissantes; mais comme la vitesse de sortie du liquide est sensiblement indépendante de la direction de cette sortie, le nombre des divisions qui naissent en un temps donné ne peut décroître notablement

²⁵⁹ Elle n'avait qu'environ un demi millimètre d'épaisseur.

que par une augmentation dans la longueur de ces divisions naissantes; ainsi, sous une même charge et avec un même orifice, les divisions naissantes doivent aller en s'allongeant à mesure que la direction d'émission de la veine s'éloigne davantage de la verticale descendante.

Nous avons vu (§ 454) que, sous une charge faible, la longueur des divisions naissantes d'une veine lancée verticalement de haut en bas est diminuée par la tendance de cette veine à l'effilement; elle doit donc, par la raison contraire, être augmentée dans une veine lancée verticalement, de bas en haut, et conséquemment, toujours sous une charge faible, elle doit aller graduellement en croissant de la première de ces directions à la seconde. Mais, dans l'expérience que rapporte Savart, l'orifice était de 3 millimètres, et la charge de 50 centimètres; cette charge doit être regardée comme forte, et, sous son action, le changement de longueur des divisions naissantes dû à la cause ci-dessus devait être insensible; or, dans cette même expérience, de la direction verticale descendante à une direction montante sous l'angle de 45° , le nombre de vibrations correspondant au son principal a paru s'abaisser de 600 à 355, c'est-à-dire devenir près de deux fois moindre. Il faut donc que, de l'une de ces directions à l'autre, la longueur des divisions ait presque doublé; ainsi la cause que j'ai rappelée est complètement insuffisante.

Disons ici que Savart ne parle qu'avec beaucoup de réserve du fait dont il s'agit; voici comment il s'exprime: « Toutefois je ne puis rien préciser à ce sujet, parce que, quand le jet est lancé de bas en haut, seulement sous un angle de 45° (la charge étant de 50 centimètres et l'orifice de 3 millimètres de diamètre), le choc de la partie trouble contre une membrane est déjà trop faible pour la mettre en vibration, de sorte qu'il ne reste plus, pour déterminer le nombre des pulsations, qu'à rechercher avec un instrument à cordes quel est le son qui modifie le plus fortement la forme et les dimensions de la veine, moyen qui étant sans contrôle, ne peut plus inspirer une entière confiance. »

Il est permis, on le voit, de concevoir quelques doutes à l'égard du phénomène; cependant, admettons-le dans toute sa plénitude, et essayons de découvrir une raison plausible au grand allongement des divisions.

Notre étude des cylindres liquides nous a révélé une cause capable de produire un semblable effet: c'est la présence de résistances qui gênent la transformation; voyons donc si, dans les conditions du phénomène, nous pourrions trouver l'origine d'une résistance de cette nature.

Remarquons d'abord que, dans la transformation spontanée des cylindres, et, par suite, dans celle des veines, les renflements n'ont, par eux-mêmes, aucune tendance à se former: ils ne se développent que parce que le liquide y est chassé par l'excès de pression capillaire des étranglements; ils sont purement passifs, les étranglements seuls sont actifs: Maintenant, si une veine lancée dans une direction descendante soit verticale, soit oblique, ne se divisait pas, elle s'effilerait graduellement dans son trajet, nous le savons, par l'accélération due à la pesanteur, de sorte que les molécules, en même temps qu'elles se mouvraient dans le sens de l'axe, iraient en se rapprochant progressivement de celui-ci. Par conséquent, dans une veine descendante, les étranglements qui tendent à se former, ne rencontrent point de tendance opposée; on comprend, en outre, qu'ils se formeront d'autant plus aisément que la veine sera plus près d'être verticale.

Mais il n'en est plus de même pour des directions montantes: ici la veine, abstraction faite de ses divisions, s'élargit à partir de la section contractée; en d'autres termes, les molécules, en même temps qu'elles obéissent au mouvement général de translation, tendent partout à s'éloigner de l'axe; or n'est-il pas rationnel d'admettre que de

là naît une résistance à la génération des étranglements, génération qui s'opère par un mouvement en sens contraire? et cette résistance sera nécessairement d'autant plus énergique que la direction d'émission de la veine se rapprochera davantage de la verticale ascendante. On ne peut objecter qu'avec la charge et l'orifice employés par Savart, les molécules tendent à s'éloigner très peu de l'axe; car, lorsque la transformation commence, les forces capillaires qui la produisent sont extrêmement faibles, et, dès lors, on conçoit que le mouvement transversal ci-dessus des molécules doit suffire malgré sa petitesse, pour gêner la production normale des étranglements, et pour forcer ainsi la veine à allonger ses divisions. Enfin l'opposition dont il s'agit n'ayant lieu qu'à l'égard des veines montantes, c'est seulement dans ces dernières que l'allongement sera considérable, ce qui est d'accord avec le résultat de Savart.

Ajoutons que notre explication pourra être soumise jusqu'à un certain point au contrôle de l'expérience; en effet, si elle est fondée, il faut évidemment que, pour un même orifice, le phénomène observé par Savart soit d'autant moins prononcé que la charge est plus forte.

CHAPITRE XII.

Historique de la constitution des veines liquides. Action de l'électricité sur des veines de petit diamètre. — Veines laminaires. — Constitution d'un courant gazeux qui traverse un liquide.

§ 475. Fidèle à la marche que nous avons suivie jusqu'ici, nous allons maintenant tracer une esquisse des recherches faites par les autres physiiciens avant 1870, du moins de celles que nous avons pu recueillir, sur la constitution des veines liquides lancées par des orifices circulaires.

Déjà en 1686, Mariotte²⁶⁰ avait entrevu, au moins dans un cas particulier, la résolution spontanée de la veine en masses isolées. Après avoir avancé que les jets lancés verticalement de bas en haut vont en s'élargissant par suite de la diminution progressive de la vitesse, il ajoute, à propos des veines verticalement descendantes :

« Par la même raison l'eau qui s'écoule par un trou de 5 ou 6 lignes, lorsqu'elle n'est dans le réservoir qu'à la hauteur de 3 ou 4 pouces, va toujours en s'étrécissant jusques à se réduire en gouttes quand le filet d'eau est devenu trop petit d'où l'on voit que le filet de l'eau deviendrait à la fin plus délié qu'un cheveu; mais avant que d'en venir jusqu'à ce point, elle se sépare et se divise en gouttes qui accélèrent toujours leur mouvement jusques à ce qu'elles aient acquis leur plus grande vitesse. »

Quant au fait général de l'aspect trouble que présente, sous des charges quelconques, la seconde partie de la veine, on l'attribuait, avant Savart, à un simple éparpillement produit par la résistance de l'air²⁶¹

Savart a montré que cette résistance n'est nullement la cause du phénomène; à l'aide de procédés ingénieux, il a étudié la véritable constitution de la veine, et en a fait connaître toutes les particularités telles que nous les avons rappelées dans le chapitre précédent.

Dans les circonstances ordinaires, c'est-à-dire lorsque la partie trouble est reçue dans un vase où le liquide s'accumule librement, Savart constate d'abord, par des moyens fort simples, la discontinuité de la portion qui s'étend au delà du milieu du premier ventre : quand, après avoir porté les yeux sur un point de la veine voisin de l'orifice, on les fait mouvoir rapidement de manière à suivre le mouvement de translation du liquide, on distingue très bien les masses isolées; une baguette qu'on fait passer rapidement à travers la partie trouble plus bas que le milieu du premier ventre, n'est presque jamais mouillée; enfin si le liquide est du mercure, cette portion de la veine est transparente, et les objets les plus déliés se voient parfaitement au travers.

Pour découvrir la cause des ventres et des noeuds, Savart dispose un appareil produisant un écoulement goutte à goutte; il voit cet écoulement donner lieu à l'apparence de ventres et de noeuds très réguliers, et, en observant la manière dont les gouttes se détachent, il reconnaît qu'elle a lieu par un effilement, après la rupture duquel les gouttes s'aplatissent dans le sens vertical.

Revenant ensuite à la veine résultant d'un écoulement continu, il parvient à montrer aux yeux ce qui se passe en réalité dans la moitié supérieure du premier ventre. Pour cela, il fait usage d'un procédé fondé sur la persistance des impressions dans l'oeil : un large ruban noir traversé de bandes blanches équidistantes se meut de bas en haut, avec une vitesse uniforme et convenable, derrière une veine d'eau rendue foncée par

²⁶⁰ *Traité du mouvement des eaux, 4me partie, 1r discours.* (Œuvres de Mariotte, La Haye, édition de 1740, p. 448).

²⁶¹ Voir CAVALLO, *The elements of natural or experimental philosophy*, Londres, 1803, vol. II, p. 191 ; BIOT, *Précis élémentaire de physique expérimentale*, t. I, chap. XIII, p. 116 de l'édition de 1824; etc.

une matière colorante. L'observateur placé devant ce système, voit la veine se projeter sur le fond grisâtre dû au passage rapide des bandes blanches, et, par des raisons trop longues à développer ici, distingue les masses isolées sous la forme de taches sombres occupant des positions fixes, ainsi que les renflements qui garnissent le bas de la partie continue.

Enfin, pour constater l'existence des renflements en des points plus rapprochés de l'orifice, Savart fait tomber sur la portion limpide de la veine une tranche mince et horizontale de lumière; la petite zone ainsi éclairée paraît alternativement monter et descendre, et ces oscillations, qui commencent à se montrer à peu de distance de l'orifice, acquièrent d'autant plus d'amplitude que la zone éclairée est plus rapprochée de la partie trouble.

Nous avons résumé, dans le § 448, les résultats des observations de Savart concernant l'action exercée sur la veine par les mouvements vibratoires, et, dans le § 447, nous avons donné une idée de l'hypothèse émise par le même savant pour rendre raison de la constitution de la veine.

§ 476. Dans un Mémoire dont il sera question au § 486, M. Fuchs rapporte une observation curieuse faite, dit-il, par hasard à Eperies en Hongrie, une vingtaine d'années avant son travail, ce qui correspond à l'année 1836 environ : on effectuait des expériences avec un électrophore, pendant qu'un petit jet d'eau jaillissait d'une fontaine de Héron, placée dans le voisinage; or on remarqua que ce jet, qui naturellement se séparait en gouttelettes avant d'atteindre son sommet, devenait continu dans toute sa longueur sous l'influence à distance du plateau de l'électrophore.

On connaissait, du reste, depuis longtemps l'expérience de l'arrosoir électrique: on savait que si de l'eau s'écoule de haut en bas par un orifice assez étroit pour qu'elle ne sorte que goutte à goutte, l'écoulement devient continu lorsqu'on communique directement au vase une électricité modérée.

§ 476bis. Mentionnons ici la curieuse expérience que M. Colladon a décrite²⁶² en 1842, et qui consiste à faire pénétrer dans une veine courbe d'eau un faisceau de lumière solaire suivant la direction d'émission du jet. L'orifice d'écoulement est percé dans la paroi latérale du réservoir, et une ouverture pratiquée dans la paroi opposée, vis-à-vis de l'orifice, est munie d'une lentille convexe dont le foyer coïncide avec cet orifice quand le réservoir contient l'eau; la lumière du soleil réfléchi horizontalement par un miroir sur la lentille, forme ainsi un faisceau conique allongé qui traverse l'eau du réservoir et s'introduit par l'orifice dans la veine; or les rayons dont il se compose frappent partout la surface intérieure de la veine sous des angles assez grands pour qu'ils éprouvent la réflexion totale, de sorte que la lumière reste emprisonnée dans toute la partie continue du jet, malgré la courbure de celui-ci. Mais si cette partie continue est reçue sur un obstacle solide, la lumière est mise en liberté et manifeste son éclat à l'endroit de la rencontre; de même, si la veine est suffisamment longue pour que sa portion inférieure se réduise en masses isolées, la lumière se fait jour vers le bas de la partie continue, et de là s'échappent de vives lueurs.

§ 476ter. En 1844, M. von Feilitzch a publié, sur l'écoulement des liquides par de petites ouvertures, un Mémoire²⁶³ où il s'occupe surtout de la contraction de la veine, de la vitesse initiale, et de l'influence des ajutages, mais où il présente quelques considérations sur la génération des masses isolées. Il attribue la formation des renflements vers le bas de la partie continue à une sorte de lutté entre, la tendance de la veine à

²⁶² *Sur les réflexions d'un rayon de lumière l'intérieur d'une veine liquide parabolique* (COMPTE RENDUS, t. XV, p. 800).

²⁶³ *Ueber den Ausfluss der Flüssigkeiten aus Oeffnungen in dünner Wand und aus kurzen Ansatzröhren* (ANN. DE M. POGGENDORFF, vol. LXIII, pp. 1 et 215).

constituer un conoïde allongé et une tendance à la conversion en gouttes: selon lui, la séparation s'effectue, et une goutte se détache, là où la section du conoïde continu placée entre deux renflements est la plus petite possible.

On voit que M. Von Feilitzch a approché plus ou moins de ma théorie, puisqu'il admet dans la veine une tendance spontanée à la transformation en masses isolées.

§ 477. L'appareil à bandes blanches parallèles imaginé par Savart altère, pour l'oeil de l'observateur, les dimensions verticales des renflements et des masses isolées, et ne peut montrer ces renflements et ces masses avec une grande netteté. En 1846, Matteucci²⁶⁴ a eu l'idée d'observer la veine en l'éclairant par une forte étincelle électrique, ou mieux par une suite de semblables étincelles; il a vu ainsi, d'une manière parfaitement distincte, les masses isolées dans les différentes phases de leurs oscillations de forme. Il pense qu'on pourrait, en disposant convenablement l'appareil, projeter l'image de la veine sur un écran au moyen d'une lanterne magique toujours en se servant des étincelles comme source de lumière.

§ 477bis. En 1848, M. Weisbach²⁶⁵ a pu étudier, dans une mine près de Freiberg, des veines d'eau lancées horizontalement sous une charge de 122 mètres. Je n'ai pas à m'occuper des résultats qu'il a obtenus avec des ajutages, ou avec un orifice carré; mais l'une de ces veines sortait d'un orifice circulaire, sans ajutage; or elle présentait cette particularité remarquable, qu'elle n'était continue que jusqu'à une petite distance; l'orifice avait environ un centimètre de diamètre, et la veine était déjà discontinuée à deux décimètres de cet orifice.

D'après les lois de Savart, la partie continue d'une veine lancée dans ces conditions aurait dû avoir, en l'absence de toute cause perturbatrice, environ 40 mètres de longueur; pour qu'elle se réduisît à deux décimètres, il fallait donc que la veine fût soumise à l'action d'une cause perturbatrice très puissante; or on comprend que, sous une charge aussi énorme, le frottement de l'eau contre le bord de l'orifice devait être extrêmement intense, et produire conséquemment, dans ce bord, des vibrations énergiques; ce sont sans doute ces vibrations qui déterminaient, le raccourcissement en question. Savart, il est vrai, a montré que le frottement au bord de l'orifice n'influe pas sur la constitution des veines qu'il observait; mais, dans ses expériences, la plus forte charge n'était en général que de 47 centimètres. Pour ne rien omettre, ajoutons que, dans le but de confirmer l'une de ses lois, Savart a mesuré les longueurs des parties continues de veines lancées, par un orifice de 3mm de diamètre, sous des charges allant de 51 à 459 centimètres; cette dernière était déjà très forte par rapport à l'orifice employé, et cependant la partie continue de la veine correspondante ne présentait pas de raccourcissement anormal, mais toutes les veines en question étaient reçues sur un corps sonore, et l'influence des vibrations de celui-ci masquait peut-être celle des vibrations du bord de l'orifice.

§ 478. Dans le Mémoire dont j'ai analysé une partie au § 153, Mémoire publié en 1849, M. Hagen s'occupe aussi de la veine liquide. Supposant une veine qui s'écoule verticalement de haut en bas, il considère deux tranches minces, ou sections transversales, peu éloignées l'une de l'autre à leur départ, tranches dont la distance mutuelle va en croissant à mesure qu'elles descendent; il démontre que la surface de la portion de la veine comprise entre elles va également en croissant, mais que l'accroissement devient d'autant moins rapide que la portion dont il s'agit a parcouru plus de chemin. Il conclut de là que les molécules de l'intérieur de la veine qui doivent se rendre à la

²⁶⁴ *Examen de la constitution de la partie trouble de la veine liquide* (COMPTE RENDUES, t. XXII, p. 260).

²⁶⁵ *Ueber den Ausfluss des Wassers unter sehr hohem Drucke* (POLYTECHNISCHES CENTRALBLATT, 14me année, p. 763).

surface pour satisfaire à l'augmentation progressive de celle-ci, le font de plus en plus facilement à mesure que la portion envisagée poursuit sa route, et qu'ainsi on ne peut attribuer la séparation des masses à ce que les molécules en question n'ont pas le temps d'arriver à la surface; il fait remarquer, en outre, que la résolution en masses isolées s'opère dans une veine lancée de bas en haut comme dans une veine lancée de haut en bas, bien que, dans la première, les sections transversales aillent en se rapprochant, au lieu d'aller en s'écartant.

Il emploie, pour l'observation des renflements de la partie continue, un procédé consistant à recevoir cette partie sur une plaque de verre, et à regarder de l'autre côté de celle-ci; l'expérience est surtout commode dans le cas d'une veine jaillissant de bas en haut et dont la partie continue vient frapper la concavité d'un verre de montre. M. Hagen ne dit pas d'une manière bien nette comment ce genre d'expérience rend manifeste l'existence des renflements; il ajoute qu'il n'a jamais pu poursuivre ces renflements jusqu'à l'orifice.

Il fait usage d'un autre procédé encore, applicable aussi à la partie discontinue: il reçoit, pendant un temps très court, une veine formée d'eau colorée sur un cylindre horizontal en carton recouvert de papier absorbant, et tournant avec une vitesse convenable qu'on peut évaluer.

Si c'est la partie discontinue qui l'a frappé, le cylindre porte l'empreinte de chacune des masses isolées, et l'on peut ainsi déterminer le nombre de ces masses qui se détachent dans un temps donné, leurs grosseurs relatives; et les distances qui les séparent. Si c'est la portion limpide, le cylindre présente l'empreinte d'une traînée où l'on ne distingue aucun renflement, d'où M. Hagen conclut que la formation des gouttes ne commence nullement à l'orifice, mais seulement au point de la veine où celle-ci perd l'aspect massif. Je n'ai pas besoin de faire remarquer que ce procédé est trop peu délicat pour qu'on puisse en tirer une semblable déduction; d'ailleurs la rencontre de la portion limpide et du cylindre tournant ne peut évidemment faire naître des vibrations notables, de sorte que la veine se trouve à peu près soustraite à toute influence étrangère; or, dans ce cas, comme je l'ai déjà exposé (§ 432), les renflements et les étranglements ne peuvent devenir perceptibles qu'à une assez grande distance de l'orifice.

Dans les veines que M. Hagen a soumises à ses observations, les masses composant la partie discontinue n'étaient pas très différentes en diamètre, et ne montraient sous ce rapport aucune régularité. La succession alternative régulière de deux diamètres inégaux ne s'est présentée que dans une seule circonstance, et ces deux diamètres étaient entre eux environ comme 4 à 3. J'ai donné, dans le § 431, la raison pour laquelle, dans les veines descendantes, les masses résultant de la transformation des filets ne sont pas, en général, de petites sphérules.

M. Hagen a essayé inutilement de vérifier la proportionnalité de la longueur de la partie continue à la racine carrée de la charge : il a fait plusieurs séries d'observations avec des orifices de différents diamètres, et en a représenté graphiquement les résultats, en prenant pour abscisses les charges successives, et, pour ordonnées, les longueurs correspondantes de la partie continue; il a toujours trouvé, même avec des orifices d'environ 3mm, que la ligne obtenue de cette manière au lieu d'appartenir à une parabole passant par l'origine, était sensiblement une droite dont le prolongement coupait l'axe des ordonnées à une certaine hauteur au-dessus de l'origine. On a vu (§§440 et 441) avec quelle netteté la loi de la proportionnalité à la racine carrée de la charge, loi que nous savons être liée à la théorie, s'est dans les observations de Savart avec un orifice de 3mm, même à partir de la faible charge de 4,5 centimètres; je ne

puis soupçonner la cause du désaccord ci-dessus.

Enfin M. Hagen, bien qu'il ne pût connaître ma théorie, celle-ci ayant paru dans la même année, arrive à la conclusion que la tension de la surface de la veine paraît exercer une grande influence sur la résolution en masses isolées.

§ 479. En 1851, M. Billet-Sélis²⁶⁶ a indiqué deux nouveaux procédés pour l'observation de la veine. Le premier consiste à regarder la veine à travers mon disque tournant percé d'une fente radiale; ce procédé lui a montré nettement les masses principales et les intermédiaires, et enfin les renflements qui, glissant le long de la partie limpide, préparent l'avènement des masses isolées; l'auteur le fait servir ensuite à rendre visibles les mêmes détails dans l'image de la veine projetée sur un écran au moyen d'une lentille.

Le second procédé est une modification ingénieuse de celui du ruban rayé de Savart: la veine s'écoule verticalement de haut en bas devant un grand miroir concave, en passant par le centre de courbure de celui-ci; l'image réelle de cette veine occupe donc alors le même lieu que cette veine, et le mouvement s'y produit avec une égale vitesse, mais en sens contraire.

En disposant les choses de manière que la coïncidence ait lieu, pour l'oeil placé en avant du système, entre la partie discontinue bien éclairée et son image, on voit distinctement les masses séparées et immobiles.

La Note de M. Billet-Sélis commence ainsi:

« Au moment où l'ingénieur Mémoire que M. Plateau vient de publier ajoute à l'intérêt qu'ont toujours inspiré les belles recherches de Savart sur l'écoulement des liquides, . . . »

On verra plus loin (§ 493) pourquoi je cite ce passage.

§ 480. En 1851 également, M. Tyndall a publié²⁶⁷ une Note concernant surtout un phénomène déjà étudié par Magnus, savoir l'introduction de bulles d'air sous la surface du liquide dans lequel une veine tombe. Ce phénomène ne se rapporte qu'indirectement à notre sujet; cependant je signalerai ici le procédé ingénieux qu'emploie M. Tyndall pour démêler ce qui se passe à l'endroit où la veine atteint la surface de l'eau : ce liquide est contenu dans un bassin blanc, il est vivement éclairé par une lampe munie d'une mèche plate dont le plan prolongé passe par la veine; les ombres des bulles d'air, quand ces bulles se produisent, et l'ombre de la portion plus ou moins déformée de la surface du liquide au lieu où la veine pénètre, se dessinent nettement sur le fond du bassin.

Pour manifester la continuité de la portion supérieure de la veine et la discontinuité de la portion inférieure, M. Tyndall place derrière la veine, dans l'obscurité, un mince fil de platine horizontal, maintenu au rouge blanc par un courant électrique; quand ce fil est derrière la partie limpide, il paraît interrompu par un intervalle obscur, mais s'il est derrière la partie trouble, on le voit briller dans toute sa longueur. M. Tyndall emploie aussi l'étincelle électrique, mais il ne donne aucun détail sur la disposition de l'expérience, et se borne à dire que cet éclaircissement instantané réduit la partie trouble en une file de globules transparents. Il croit que le son produit par la chute de la partie trouble de la veine dans l'eau qui la reçoit, a sa cause principale dans les petites explosions successives des bulles d'air qui viennent crever à la surface.

Disons, en outre, qu'au commencement de sa Note, M. Tyndall énonce une opinion singulière: selon lui, les masses isolées dans lesquelles se résout la partie inférieure d'une veine d'eau, s'atténuent de plus en plus (probablement en se subdivisant) pendant

²⁶⁶ *Sur les moyens d'observer la constitution des veines liquides* (ANN. DE CHIM. ET DE PHYS. DE PARIS, 3me série, t. XXXI, p. 326).

²⁶⁷ *Phenomena of a Water-Jet* (PHILOS. MAGAZ., 4me série, vol. I, p. 105).

leur descente, et si la veine tombait d'une hauteur suffisante, il n'y aurait plus, en bas, qu'une sorte de poussière liquide; il cite la cascade du Staubbach, en Suisse, comme fournissant, sur une grande échelle, un exemple de ce phénomène.

§ 481. En 1851 encore, M. Buff a exposé²⁶⁸ une suite d'observations sur la résolution de la veine en masses isolées. Il a répété l'expérience de l'éclairement par l'étincelle électrique, en employant un appareil d'induction muni d'un interrupteur dont il pouvait graduer la vitesse à volonté. Il observait l'ombre que la veine ainsi éclairée projetait sur un écran blanc, et cette ombre était parfaitement nette. C'est de cette manière, en effet, que l'expérience doit se faire; Magnus, qui, ainsi qu'on le verra (§ 487), a eu recours également à l'étincelle électrique, mais qui regardait la veine elle-même, n'a pu distinguer les formes des masses isolées, parce que, comme il le dit, chacune de ces masses n'est guère visible que par un point brillant; Matteucci, qui a le premier fait usage de l'étincelle (§ 477), n'indique pas comment il observait.

Le spectacle le plus surprenant, dit M. Buff en parlant de l'emploi de son procédé, est offert par une veine jaillissant obliquement de bas en haut: l'ombre produit alors l'impression d'une tige solide, qui, de son extrémité supérieure renflée, lance des sphères d'autant plus nombreuses que les étincelles se succèdent plus rapidement.

M. Buff a eu l'idée de recevoir dans de l'huile, à une distance convenable de l'orifice la partie continue d'une veine d'eau s'écoulant sous une charge très faible; l'huile ralentit encore beaucoup la vitesse de translation, déjà peu considérable, et, de cette façon aussi, on distingue les masses isolées successives. M. Buff conclut des résultats de ce procédé, que, sous de faibles charges, presque toutes les gouttes sont de même grandeur et se succèdent à des intervalles égaux.

M. Buff connaît ma théorie, et, pour la soumettre à une épreuve expérimentale, il reçoit, dans un verre plein d'eau, une veine du même liquide s'écoulant verticalement de haut en bas; il soulève ce verre, jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de bulles d'air entraînées, et constate qu'alors la veine s'écoule tranquillement, sans faire entendre aucun bruit; de plus; en observant l'ombre projetée par l'éclairement électrique, il trouve que, dans les conditions normales, le diamètre de la partie continue n'éprouve pas de variations périodiques jusque près de son extrémité. Il conclut de tout cela que la production des masses isolées ne peut dépendre de la rupture d'équilibre de la figure cylindrique, rupture dont les résultats devraient prendre leur origine à l'orifice même, et aller en se prononçant de plus en plus jusqu'à l'extrémité de la partie continue.

Mais d'abord, ainsi que je l'ai déjà fait remarquer, la vitesse avec laquelle s'effectue la transformation commençant par être excessivement minime, ce n'est une distance assez grande de l'orifice que le phénomène se prononce suffisamment pour produire des effets sensibles, tels qu'un bruit quand on reçoit la veine dans l'eau. En second lieu, la cessation de l'entrée des bulles d'air n'indique nullement qu'on se trouve à l'extrémité de la partie continue, elle indique seulement qu'en soulevant le verre, on a atteint un point où les renflements et les étranglements sont trop peu accusés. En troisième lieu, il suit des raisons ci-dessus rappelées, que, dans l'ombre de la veine on ne pourrait distinguer les renflements et les étranglements de la partie continue qu'au-dessous du point où cette partie observée directement à l'oeil nu semble commencer à s'élargir; on a vu, en effet, que, même dans le cas où la veine n'est pas soustraite aux petites actions étrangères, Savart n'a pu manifester l'existence des renflements et étranglements jusque près de l'orifice, qu'à l'aide du procédé très délicat de la mince tranche de lumière. Enfin, quant aux renflements et étranglements plus développés au

²⁶⁸ *Einige Bemerkungen ueber die Erscheinung der Auflösung des flüssigen Strahls in Tropfen* (ANN. DE CHIM. ET DE PHARMAC. DE MM. LIEBIG, WÖHLER ET KOPP, vol. LXXVIII, p. 162).

bas de la partie continue, M. Buff ne dit pas qu'il ait réglé son appareil électrique de manière que la période de succession des étincelles coïncidât, ou à peu près, avec celle de l'émission des masses; or si cette coïncidence approchée n'avait pas lieu, les ombres de ces renflements et étranglements devaient se projeter à des hauteurs différentes, et dès lors, par leur non superposition, devaient simplement produire l'apparence d'un élargissement de cette portion de la veine; c'est, d'ailleurs, ce que semble indiquer la description donnée par M. Buff de l'aspect de l'ombre dans le cas d'une veine lancée obliquement de bas en haut. Nous savons, du reste, que la présence de ces mêmes renflements et étranglements du bas de la partie continue a été nettement constatée par Savart au moyen du ruban rayé, et par M. Billet-Sélis au moyen du disque tournant; enfin, ainsi qu'on le verra (§ 487), Magnus les a également observés dans les veines soustraites à toute influence vibratoire.

M. Buff croit que la séparation de chaque masse s'effectue absolument comme dans l'expérience de Savart sur un écoulement goutte à goutte: selon lui, quand, par suite de l'accélération du mouvement, le poids de la goutte qui se forme à l'extrémité inférieure de la veine devient suffisant pour vaincre la cohésion du liquide, cette goutte, d'abord précédée d'un effilement, se détache, puis l'action capillaire faisant rebrousser en arrière ce qui est devenu alors l'extrémité de la partie continue, y détermine un renflement qui se détache de même sous forme de goutte, et ainsi de suite. On est en droit de se demander comment M. Buff, qui a pris plaisir à observer l'émission des masses isolées dans le cas d'une veine ascendante, où le mouvement est retardé, peut énoncer une semblable opinion.

§ 482. En 1855, M. Dejean a présenté à l'Académie des sciences de Paris un Mémoire²⁶⁹ qui, je pense, n'a pas été publié, et dont il donne un extrait; il y énonce, mais d'une manière trop succincte pour qu'on puisse les bien comprendre, des idées singulières sur la nature des liquides, et indique comment il en fait l'application au phénomène de la contraction de la veine et au calcul de la dépense avec des orifices quelconques; il explique, d'après les mêmes idées, mais toujours trop succinctement, les pulsations à l'orifice supposées par Savart, et avance qu'il parvient aux lois déduites de l'expérience à l'égard de ces pulsations, ou, ce qui revient au même, du nombre des vibrations correspondant au son propre à la veine. Enfin il ajoute qu'il rend raison de la formation des renflements qui se propagent le long de la partie limpide; qu'il démontre comment cette partie se raccourcit sous l'influence d'un son produit dans son voisinage; pourquoi la veine est d'autant plus sensible à cette influence que le liquide est plus compressible, et pourquoi cette sensibilité augmente avec le diamètre des orifices.

§ 483. En 1855 aussi, Magnus a fait paraître la première partie de ses *Recherches hydrauliques*²⁷⁰. Ce travail renferme, outre les faits curieux que j'ai rappelés aux § 234 et 333, des observations sur les veines liquides s'écoulant verticalement de haut en bas. L'auteur avance d'abord que, quelque soin qu'on donne à la régularité de l'appareil d'écoulement, le liquide qu'il contient prend toujours, après un certain temps, un mouvement de rotation, d'où résulte que la veine finit par se courber en une sorte d'hélice allongée. Magnus évite cet inconvénient en déposant sur le fond du vase un système composé de quatre grandes plaques métalliques verticales formant entre elles des angles droits, toutes dirigées vers l'axe de l'orifice, mais n'atteignant pas cet orifice²⁷¹.

²⁶⁹ *Nouvelle théorie de l'écoulement des liquides* (COMPTES RENDUS, t. XL, p. 46)

²⁷⁰ *Hydraulische Untersuchungen* (ANN. DE M. POGGENDORFF, vol. XCV, p. 1.)

²⁷¹ Une discussion s'est établie, au sujet de ce mouvement gyrotatoire du liquide du vase, entre Magnus et M. Laroque; de nombreuses expériences ont conduit ce dernier à la conclusion que le mouvement dont il s'agit existait inévitablement dans la masse liquide avant l'écoulement (Voir *Ann. de chim. et de phys. de*

Il traite d'abord des veines lancées par des orifices non circulaires de figures diverses; il décrit les aspects singuliers qu'elles présentent, et donne de ces phénomènes une théorie qui est évidemment la véritable. Je ne résumerai pas cette portion des recherches de Magnus; elle est étrangère au sujet de mon travail, sauf le cas d'un orifice en forme de fente rectiligne, cas dont j'ai dit quelques mots au § 238.

Magnus commence ensuite l'étude des veines sortant d'orifices circulaires. Quand l'orifice a un diamètre suffisant, tel que 12mm et qu'on produit dans le voisinage de la veine un ébranlement subit, par exemple en frappant du pied le plancher, la veine se désunit près de l'orifice; ce phénomène provient de ce que le vase est mis en vibration et que, par suite, le liquide prend, pour un instant, dans l'orifice, un mouvement opposé à celui qui le chasse au dehors.

Dans cette première partie, Magnus attribue la séparation des masses, lorsque toutes les influences étrangères sont écartées, à l'accélération de la vitesse de translation, d'où résulte un déchirement du liquide; il ajoute que des vibrations communiquées au vase favorisent ce déchirement, en ce qu'alors il y a dans la veine des sections voisines pour l'une desquelles la vitesse de translation est accrue, tandis que pour l'autre elle est diminuée.

A la fin de son Mémoire, Magnus reprend l'étude de l'introduction des bulles d'air dans le liquide qui reçoit la veine, phénomène dont il s'était déjà occupé dans un autre travail; enfin il examine le cas où de l'air s'introduit dans la veine elle-même, et il décrit le fait suivant: quand le liquide du vase est animé d'un mouvement de rotation, sa surface se creuse en entonnoir, et, après quelque temps, l'extrémité inférieure de cette excavation pénètre dans la veine à travers l'orifice, du moins quand celui-ci n'est pas trop petit; la veine se trouve alors transformée, quelquefois sur une longueur de plusieurs pieds, en un tube liquide.

J'avais pensé d'abord que ce tube constituait une veine laminaire; mais, dans le Mémoire dont j'ai parlé au § 344, M. Laroque décrit le même phénomène et le représente en coupe par une figure, laquelle montre que le diamètre de l'espace creux intérieur, là où il est le plus large, c'est-à-dire près de l'orifice, n'est pas le tiers de celui de la veine; dans l'expérience de M. Laroque, la paroi du tube liquide devait avoir, en cet endroit, 3mm d'épaisseur au minimum elle ne peut donc être considérée comme une lame, Je reviendrai plus loin (§ 505) sur ce curieux phénomène.

Cette première partie des Recherches hydrauliques ne fait aucune allusion à ma théorie; mais Magnus a repris plus tard l'étude de la veine, ainsi que nous le verrons (§ 487).

§ 484. Dans une lettre²⁷² adressée à Magnus en 1856, M. Buff s'occupe aussi des veines lancées par des orifices de formes polygonales; mais il rapporte une expérience curieuse relative à des orifices circulaires: quand de l'eau s'écoule par deux orifices de cette espèce situés l'un près de l'autre, les deux veines, au lieu de sortir normalement au plan de ces orifices, vont en se rapprochant, et peuvent même se rencontrer.

§ 485. Je dois mentionner ici le rapport fait par M. Maus, en 1856 également, à l'Académie de Belgique²⁷³ sur ma 3me série, dans laquelle j'applique ma théorie à l'action des mouvements vibratoires sur la veine. M. Maus énonce des doutes à l'égard de cette théorie; il s'exprime ainsi:

« J'ai peine à admettre avec M. Plateau que, dans un phénomène principalement produit par la gravité, cette force soit complètement écartée pour attribuer la configu-

Paris, 3me série, 1861, t. LXI, p.345, et 1863, t. LXVII, p. 484).

²⁷² ANN. DE M. POGGENDORFF, vol. C, p. 168.

²⁷³ *Bullet. de l'Acad. de Belgique*, t. XXIII, 1re partie, p. 4.

ration de la masse en mouvement exclusivement à la force moléculaire, fort inférieure à la gravité. »

« Mon hésitation s'est accrue lorsque j'ai remarqué que, pour justifier l'élimination de la gravité, M. Plateau considère cette force comme n'agissant sur la veine liquide qu'à partir de l'orifice d'écoulement, sans considérer son action sur le liquide contenu dans le vase, action qui, par la manière dont elle attire les molécules liquides vers l'orifice, exerce, sur la forme de la veine sortie du vase, un effet que les phénomènes connus sous la désignation de *contraction* et *inversion* de la veine ne permettent pas de révoquer en doute. »

Certes, c'est la gravité qui chasse le liquide et produit ainsi la veine; mais une fois le liquide animé de son mouvement de translation après son passage à la section contractée, les forces moléculaires, forces intérieures au système, peuvent évidemment, comme je l'ai déjà fait remarquer (§ 431), exercer librement leur action, qu'elles soient ou non moins énergiques que la gravité.

Je n'ai point eu à m'occuper de la contraction de la veine; je n'ai dû considérer l'action des forces moléculaires qu'à partir de la section transversale de la veine où finit la contraction, parce que c'est à partir de là seulement que la veine prend sa forme allongée.

Quant aux inversions qui se montrent dans les veines sortant d'orifices non circulaires, elles n'ont rien de commun avec les renflements et les étranglements qui préparent la séparation en masses isolées, puisque ceux-ci sont emportés par le mouvement de translation du liquide, tandis que les inversions conservent, dans la portion limpide de la veine, des positions fixes.

M. Maus préfère la théorie des pulsations à l'orifice; il essaie d'expliquer ces pulsations par des considérations différentes de celles de Savart, et qu'il me serait difficile de résumer avec clarté : concevant la veine prolongée au-dessus de l'orifice dans l'intérieur du liquide, il fait intervenir l'inertie de ce liquide ambiant entraîné dans l'écoulement, et la perte de force vive qu'éprouve la veine par cette communication de mouvement, et il cherche à montrer que le jeu de ces deux causes doit produire, dans la vitesse de sortie, des augmentations et des diminutions alternatives. Quant à la séparation en masses isolées, il l'attribue, comme Magnus dans le travail analysé plus haut, à un déchirement produit par l'accélération de la vitesse du liquide.

§ 486. En 1856 encore, M. Fuchs²⁷⁴ a répété l'observation de l'influence de l'électricité sur un jet d'eau de petit diamètre (§ 476). Il a reconnu qu'avec, un orifice assez étroit pour que, sous une charge de 26 pouces, le jet s'élevât à peine à 12 pouces de hauteur, l'action d'un bâton de verre frotté amenait la continuité du jet, même à la distance de quatre à cinq pas. Il essaie d'expliquer le phénomène par la considération que les gouttelettes séparées, dès qu'elles sont soumises à une influence électrique émanant d'une grande distance, se tournent de manière à présenter les unes aux autres leurs parties chargées d'électricités contraires, et qu'alors elles se réunissent par l'attraction de ces électricités.

Plus tard dans la même année²⁷⁵, il est revenu sur cette explication, et en a montré lui-même l'inexactitude : entre autres arguments, il fait remarquer que si l'explication dont il s'agit était vraie, il faudrait qu'on doublât l'effet en soumettant le jet à l'influence simultanée de deux corps chargés d'électricités contraires et placés de deux côtés opposés de ce jet, tandis que l'effet devrait être annulé si les deux corps étaient chargés

²⁷⁴ *Ueber das Verhalten eines feinen Springbrunnens innerhalb einer elektrischen Atmosphäre* (BULLET. DES TRAVAUX DE LA SOCIÉTÉ DES SC. NATUR. DE PRESBURG, t. I, p. 79).

²⁷⁵ *Mem. de la Société des Sc. natur. de Presburg*, p. 37.

de la même électricité; or il a trouvé que c'est précisément l'inverse qui a lieu.

Il constate que si, au moyen d'un petit écran, on intercepte l'action du corps électrisé sur l'orifice seul, la résolution en gouttes se reproduit, tandis que si l'action est interceptée sur la veine et non sur l'orifice, la continuité du jet se manifeste. Il fait observer que la continuité du jet s'établit aussi par une électrisation directe convenablement modérée.

Il attribue la résolution en gouttes à l'adhésion entre l'orifice et le liquide; pour appuyer cette opinion, il emploie un orifice en laiton mouillé d'huile, et voit alors le petit jet abandonné à lui-même demeurer continu dans toute sa longueur. Il en conclut que l'influence électrique agit simplement en détruisant l'adhésion du liquide avec l'orifice; mais, d'autre part, il s'étonne qu'une action si faible puisse annuler cette adhésion, tandis qu'elle ne paraît pas affecter la cohésion des molécules dans l'eau, cohésion qui est cependant, selon lui, beaucoup plus faible encore; il trouve, en outre, que les phénomènes sont les mêmes avec un orifice en métal ou avec un orifice en verre, c'est-à-dire conducteur ou non conducteur de l'électricité.

L'expérience, répétée par M. Logeman devant la Société provinciale d'Utrecht, a provoqué, entre les physiciens hollandais, une discussion²⁷⁶, mais qui ne nous apprend rien d'important.

§ 487. En 1859, Magnus a donné la deuxième partie de ses Recherches hydrauliques²⁷⁷. Il y continue ses observations sur les veines verticales descendantes sortant d'orifices circulaires; il répète les observations de Savart relatives à l'effet des sons, mais il constate que sous des charges très faibles, telles que de deux ou trois centimètres, la veine est influencée par tous les sons produits dans son voisinage, à l'exception des sons très aigus. Il montre, de plus, que l'action des sons sur la veine résulte surtout des vibrations du fond du vase; pour cela, il dispose les choses de la manière suivante: le fond est percé une ouverture assez large, d'où part un tube en caoutchouc mince descendant verticalement et fermé, à son extrémité inférieure, par une plaque métallique dans laquelle est pratiqué l'orifice; cette plaque est d'un diamètre beaucoup plus grand que celui du tube, et repose par son bord sur des coussins. Or, en employant ce système, qui rend l'orifice indépendant des vibrations du fond du vase, Magnus a reconnu que les sons n'agissaient plus.

Pour faire voir que les ventres sont formés par des masses isolées qui passent rapidement, Magnus introduit à une petite profondeur dans un ventre, l'extrémité d'un fil métallique qu'il tient à la main, et ressent alors l'impression d'un mouvement énergétique de vibration, tandis que lorsqu'il introduit l'extrémité du fil dans la partie limpide, il n'éprouve que le sentiment d'une pression uniforme; une flamme amenée près de cette partie limpide demeure tranquille, et se montre au contraire agitée quand on la maintient près d'un ventre. Magnus se sert, en outre, d'un miroir tournant; l'expérience se fait dans une chambre obscure; une portion de la veine est fortement éclairée, le miroir, placé à un mètre de distance, tourne autour d'un axe vertical, et l'on y observe l'image de la portion dont il s'agit. Si cette portion est un ventre, l'image se compose d'une série de lignes brillantes inclinées.

Enfin Magnus emploie encore l'étincelle électrique et mon disque tournant. Quand la veine est soustraite à toute action vibratoire, ce dernier procédé ne lui montre pas de renflements et d'étranglements dans la portion limpide; mais il lui fait reconnaître l'existence de semblables renflements et étranglements de plus en plus prononcés à

²⁷⁶*Verhouding van eene klein fontein in een electrische atmosfeer* (UTECHT, ANTEEK. PROV. GENOOTS. 1858-59, p. 18).

²⁷⁷*Ann. de M. Poggendorff*, vol. CVI, page 1.

partir du point où commence la portion trouble jusqu'à celui où les masses s'isolent. Il ajoute:

« La résolution de la veine en masses isolées a donc lieu d'une manière tout à fait semblable à celle qu'a déjà décrite M. Plateau. »

Toujours au moyen du disque tournant, Magnus trouve que, même dans la veine ci-dessus, les masses isolées sont les unes aplaties et les autres allongées, mais qu'elles ne s'isolent pas toutes à la même distance de l'orifice, et ainsi ne passent pas toutes aux mêmes points dans leurs maxima d'aplatissement et d'allongement, de sorte qu'il ne peut en résulter l'apparence de ventres. Il constate, de plus, dans les grosseurs de ces masses, les mêmes irrégularités que M. Hagen (§ 478). Quand la veine sort d'un orifice d'un diamètre très petit (moins d'un millimètre), et qu'elle est sous l'influence d'un son, Magnus voit les gouttes isolées se succéder par séries régulières d'un nombre déterminé, séries laissant entre elles des intervalles plus grands, et il dit que ces grands intervalles correspondent aux vibrations ascendantes du fond du vase. Enfin il s'arrange de manière à obtenir un écoulement par simples gouttes se succédant assez lentement, et alors il distingue la production des filets et leur conversion en sphérules.

Quand la veine est soustraite à toute influence vibratoire, et que Magnus en observe, à l'aide du miroir tournant, la portion limpide, il ne voit qu'un large espace lumineux; mais si la veine est sous l'influence d'un son, l'image présente une série de lignes brillantes obliques, ce qui montre alors l'existence de renflements et d'étranglements se propageant dans la portion de la veine située au-dessus du premier ventre.

En approchant de la portion limpide d'une veine un corps électrisé, Magnus la voit simplement déviée vers ce corps; mais si la veine a des ventres réguliers, de manière qu'on distingue, dans l'axe de ces ventres, l'apparence d'une veine plus mince (n° 12 du § 448), et si le corps électrisé est approché du milieu de l'un d'eux, la veine mince est seule déviée, à cause de la moindre masse des gouttes qui la composent, et se montre isolée à l'extérieur des ventres. Magnus s'occupe ensuite des veines ascendantes soit verticalement soit obliquement. Il constate d'abord, au moyen du disque tournant, que les choses se passent de la même manière que dans les veines verticalement descendantes; il remarque seulement que les renflements qu'on distingue vers l'extrémité de la partie continue sont alors plus rapprochés les uns des autres. Dans le cas des veines obliquement ascendantes, il attribue la formation de la gerbe à ce que le tube qui porte l'orifice exécute des vibrations normales à l'axe de la veine, vibrations qui se transmettent à celle-ci, et d'où résulte que les masses isolées successives quittent la partie continue suivant des directions un peu différentes; il affirme que, sous l'influence d'un son, on sent avec la main ces vibrations transversales du tube. Il regarde la séparation de la partie discontinue de la veine en deux ou en trois jets distincts comme due à la même cause, et il fait remarquer que ces effets ne peuvent nécessairement se produire que pour des rapports déterminés entre la période des vibrations transversales de l'orifice et celle de l'émission des masses isolées.

Enfin, lors de la séparation en deux jets, l'observation à travers le disque tournant lui fait reconnaître, dans les masses isolées, un arrangement tel que toutes les masses d'ordre impair décrivent l'une des deux trajectoires, et toutes les masses d'ordre pair l'autre trajectoire. Dans le cas de trois jets, il constate une disposition analogue. Il présente, on le voit, une explication de ces phénomènes toute différente de la mienne; j'y reviendrai dans le § 495.

Magnus termine ce travail remarquable en étudiant l'action des sons sur les veines

lancées par des orifices non circulaires.

§ 488. En 1860, M. Reitlinger²⁷⁸ a étudié, comme M. Fuchs, le phénomène de l'action de l'électricité sur un jet d'eau de petit diamètre. Il parle d'abord d'expériences anciennes de Desaguliers, du P. Gordon et de Nollet relatives à l'attraction exercée sur un petit jet d'eau par un corps électrisé, aux variations que subit la dépense lorsque le jet est électrisé directement, et à l'éparpillement du jet, soit par une électrisation directe, soit par une influence électrique suffisamment forte; nous n'avons pas à nous occuper ici de ces effets. L'auteur répète l'expérience de la continuité du jet amenée par une électrisation directe peu intense, et fait remarquer que cette expérience suffit pour montrer l'erreur de la première explication proposée par M. Fuchs, puisque ici il n'y a qu'une seule espèce d'électricité communiquée au jet, et qu'ainsi la polarité ne peut s'établir dans les gouttes qui se succèdent.

Il soumet, à l'action de l'électricité soit directe, soit par influence, un petit jet formé d'un liquide non conducteur, l'essence de térébenthine, et trouve que cette action ne modifie pas la résolution en gouttes.

Il adopte la dernière explication de M. Fuchs sur la manière dont agit l'influence électrique à l'égard du petit jet d'eau, et il essaie de résoudre la difficulté soulevée par ce savant lui-même, en admettant que, sous l'action de l'électricité, se produit une faible électrolyse de l'eau, d'où résulte, entre le liquide et la paroi intérieure de l'orifice, la formation d'une couche gazeuse très mince qui annule l'adhésion. Pour soumettre cette nouvelle hypothèse à l'épreuve de l'expérience, M. Reitlinger emploie le mercure, qui est à la fois conducteur de l'électricité et indécomposable, et il affirme que, même en l'absence de toute action électrique, le jet est parfaitement continu jusqu'à son sommet; il emploie un orifice amalgamé, et voit alors le jet se résoudre en gouttes comme dans le cas de l'eau; il constate, en outre, que l'électrisation soit directe, soit par influence, ne rend pas ce dernier jet continu. Je reviendrai (§ 494) sur ces expériences²⁷⁹.

§ 489. Nous avons, en 1866, des observations singulières du P. Lacouture une veine d'eau s'écoule verticalement de haut en bas par l'orifice d'un tube partant d'un vase de Mariotte, et les choses sont réglées de manière que l'écoulement ait lieu avec une très faible vitesse; l'orifice du tube a 7mm de diamètre, et la veine est reçue sur un plan résistant placé à une distance de l'orifice qui peut varier de 17mm à 25mm. Dans ces conditions, la veine, quoique limpide et continue, présente une suite de renflements et d'étranglements nettement accusés et occupant des positions fixes. Pour une distance moindre, savoir de 8mm environ, il arrive quelquefois que l'écoulement s'arrête tout à coup : « l'orifice », dit l'auteur, « se trouve alors comme fermé par une goutte qu'on est parvenu à isoler un moment, et dont la surface forme comme une membrane. Le contact d'un corps, même très délié, rompt la trame de ce réseau, et l'écoulement recommence. »

Ces curieux effets présentés par une veine animée d'une vitesse très petite, paraissent ne pouvoir se rattacher à aucun principe connu.

Déjà en 1819 Belli, dans le Mémoire dont il a été question au § 322ter avait signalé un fait plus ou moins analogue aux précédents. Ce fait consiste en ce que si l'on reçoit un filet d'eau, s'écoulant verticalement de haut en bas, dans une cuiller pleine du même liquide et tenue à un décimètre de l'orifice, on remarque, à la partie inférieure de la veine, des étranglements équidistants, très rapprochés et immobiles. En élevant

²⁷⁸ *Ueber die Entwicklung der Electricität Springbrunnen* (BULLET. DE L'ACAD. DE VIENNE, t. XXXIX, p. 390).

²⁷⁹ Voir l'article inscrit au § 508 sous le n° 17.

et abaissant successivement la cuiller, on voit s'élever et s'abaisser aussi les étranglements, lesquels en même temps augmentent et diminuent de longueur.

§ 490. En 1867, le *Philosophical Magazine* a donné²⁸⁰ un extrait de l'ouvrage de M. Tyndall sur le son; l'auteur y parle de la veine liquide et de l'action qu'exercent sur elle les vibrations sonores, mais il ne fait guère connaître de résultats nouveaux; notons cependant une curieuse expérience: une veine d'eau étant lancée obliquement de bas en haut de manière que la partie discontinue forme une gerbe, M. Tyndall fait résonner dans le voisinage deux diapasons choisis de façon à exercer une action énergique sur la veine et à faire entendre quatre battements par seconde; il voit alors la gerbe s'annuler et se reproduire périodiquement, en synchronisme avec les battements. Ajoutons que M. Tyndall adopte l'hypothèse des pulsations, et attribue celles-ci au frottement du liquide contre le bord de l'orifice.

§ 491. En 1867 également, M. Rodwell²⁸¹, après avoir exposé des faits étrangers à notre sujet, s'occupe de la constitution des veines liquides descendantes, et adopte pleinement ma théorie. Il insiste sur la génération des masses plus petites interposées entre les grosses dans la partie discontinue, et décrit une expérience propre à montrer d'une manière facile la production du filet et la transformation spontanée de celui-ci, lorsqu'une masse liquide se sépare en deux. Cette expérience consiste à introduire, dans un mélange d'eau et d'alcool ayant une densité très peu supérieure à celle de l'huile, une masse de ce dernier liquide formant une sphère de trois à quatre centimètres de diamètre; puis, quand la sphère est montée à la surface et s'y est changée en une sorte d'hémisphère ayant sa base au niveau du liquide ambiant (§ 11), à chauffer celui-ci; la masse alors s'allonge de haut en bas en une figure à peu près cylindrique à base inférieure hémisphérique, après quoi elle s'étrangle vers son milieu, le filet apparaît se convertit en sphérules, et la masse inférieure descend au fond du vase, tandis que la supérieure demeure adhérente à la surface du mélange alcoolique.

§ 492. Enfin, en 1869, M. Buff, dans un Mémoire²⁸² ayant surtout pour objet l'intensité du choc d'une veine liquide contre un obstacle, avance qu'une des causes qui diminuent la hauteur à laquelle parvient une veine jaillissant de bas en haut, est une pression capillaire qui s'exerce à l'extrémité de la partie continue chaque fois qu'une masse vient de s'en détacher. A l'appui de cette opinion, il dit avoir constaté, en observant l'ombre d'un semblable jet projetée par la lumière électrique (§ 481), que chaque fois qu'une masse s'isole, la partie continue éprouve un mouvement de recul.

Il ne dit pas que la veine de ses expériences fût soumise à l'influence d'un son qui aurait régularisé le phénomène de l'émission des masses, et dès lors les masses devaient sans doute s'isoler successivement à des distances de l'orifice un peu inégales; c'est ce qui résulte, en effet, quant aux veines verticalement descendantes, des expériences de Savart et de Magnus; et ce que j'ai exposé (§ 469) sur les causes de la formation de la gerbe dans les veines obliquement montantes, rend très probable que la même chose a lieu à l'égard de celles-ci; or, clans ces conditions, je me demande comment, au moyen de son éclaircissement électrique, M. Buff a pu reconnaître le recul dont il parle.

Du reste, nous savons qu'immédiatement avant la séparation d'une masse, celle qui la suit se trouvant encore entre deux filets, doit être plus ou moins allongée dans le sens de l'axe de la veine, et qu'à l'instant de la rupture du filet antérieur, elle s'aplatit pour se séparer ensuite à son tour; cet aplatissement produit donc effectivement un petit recul de la portion antérieure de la masse en question. En outre, comme l'étranglement

²⁸⁰ *On the action of sonorous vibrations on gaseous and liquid jets* (PHILOS. MAGAZ., 4me série, vol. XXXIII, p. 375).

²⁸¹ *it* On some effects produced by a fluid in motion (Ibid., p. 99).

²⁸² *Versuche ueber den Stoss des Wasserstrahls* (ANN. DE M. POGGENDORFF, vol. CXXXVII, p. 497).

qui a donné naissance au filet antérieur était à chaque instant dans une phase un peu plus avancée que l'étranglement postérieur, il a dû envoyer son liquide dans la masse considérée un peu plus rapidement que cet étranglement postérieur; de là un petit recul de cette masse entière, ou plutôt une légère diminution de sa vitesse de translation. Mais tous ces effets de recul doivent être fort minimes, et d'ailleurs ils sont exactement compensés par des effets opposés qui se produisent ensuite à la partie postérieure de la même masse; ainsi, abstraction faite des irrégularités de l'émission des masses, celle dont nous nous occupons quittera la partie continue avec la vitesse de translation du liquide, et la hauteur à laquelle elle parviendra, hauteur qui mesure celle du jet, ne pourra être nullement influencée par les reculs que j'ai mentionnés.

§ 493. On voit, par cet historique, combien de procédés ingénieux ont été imaginés pour étudier la constitution des veines liquides; mais on voit en même temps à quelles hypothèses inadmissibles on a eu recours afin d'expliquer la résolution de la veine en masses isolées: celle des pulsations à l'orifice, même lorsque la veine est sous l'influence d'un son et qu'ainsi ces pulsations existent en réalité, est complètement insuffisante pour rendre raison du développement progressif des divisions, et elle l'est bien plus encore lorsque la veine est soustraite à toute action vibratoire; quant à celle du déchirement occasionné par l'accélération de la vitesse de translation, elle est renversée par le fait que les veines ascendantes se résolvent en masses isolées tout aussi bien que les veines descendantes.

On voit, de plus, qu'à l'exception de M. Rodwell, peut-être de M. Billet-Sélys, et peut-être, aussi de Magnus dans la seconde partie de son Mémoire, les physiciens qui se sont occupés de la veine liquide depuis 1849, époque de la première publication de ma théorie, n'ont point adopté celle-ci; MM. Tyndall, Dejean, Fuchs et Reitlinger paraissent l'avoir ignorée, ce qui m'étonne peu, car on ne saurait en soupçonner l'existence d'après le titre de mes séries; MM. Buff et Maus la connaissent et la rejettent en s'appuyant sur des arguments faciles à réfuter. Du reste, mon premier exposé pouvait, à la rigueur, prêter plus ou moins aux objections de M. Buff; en outre, lorsque MM. Buff et Mauss ont écrit leurs articles, je n'avais pas encore établi par le calcul l'absolue nécessité de la transformation spontanée des cylindres liquides allongés, et ces deux savants ont pu ne pas regarder comme assez concluantes les expériences que j'avais décrites. Je suis tranquille sur l'avenir de ma théorie; telle que je la présente aujourd'hui, elle sera adoptée, parce qu'elle doit l'être quand on la connaîtra bien²⁸³.

§ 494. Mais je dois revenir sur quelques uns des travaux résumés dans ce qui précède, et d'abord sur ceux de M. Fuchs et de M. Reitlinger, dont les expériences semblent, au premier aperçu, s'accorder difficilement avec ma théorie.

En raisonnant d'après celle-ci, on pourrait croire que l'électricité agit par elle-même pour s'opposer à la transformation spontanée du jet; et l'idée qui se présente naturellement est que cette électricité, en se portant à la surface du liquide, détermine une répulsion entre les molécules de la couche superficielle, et diminue conséquemment les forces capillaires. Mais des expériences encore inédites de M. Van der Mensbrugghe prouvent que l'électricité statique ne change en rien la tension des surfaces liquides, et ainsi n'altère pas les forces capillaires qui émanent de ces surfaces; enfin j'ai cherché à m'assurer, par un moyen direct, si l'électricité statique peut modifier le phénomène de la transformation spontanée des cylindres liquides de petit diamètre: pour cela, on a répété l'expérience des §§361 à 363, en faisant communiquer avec le conducteur d'une machine électrique l'un des fils métalliques entre les extrémités amalgamées desquels s'étendait le cylindre mince de mercure; or, dès que les entraves

²⁸³Pour les recherches postérieures à 1869, voir les articles inscrits au § 508 sous les n° 14, 17 et 21.

latérales étaient enlevées, ce cylindre, qui avait un diamètre inférieur à 1mm se transformait tout aussi bien, et de la même manière, lorsqu'il était fortement électrisé, que lorsqu'il était à l'état naturel. Il faut donc reconnaître que l'électricité statique n'exerce pas d'action directe sur le phénomène.

Je crois exacte l'idée de MM. Fuchs et Reitlinger, d'après laquelle le fait qu'ils ont étudié serait dû à une destruction de l'adhésion du liquide au bord de l'orifice. Seulement je ne puis supposer, avec M. Reitlinger, que cette destruction provienne d'une faible électrolyse de l'eau, et je pense qu'elle résulte simplement de ce que, sous l'influence de l'électricité, le liquide et le solide se repoussent mutuellement. Reste maintenant à faire voir comment la destruction de l'adhésion détermine la continuité du jet d'eau.

La chose me paraît fort simple: remarquons d'abord que les orifices employés étaient très étroits; M. Van der Mensbrugge, qui a répété une partie des expériences, m'assure que leur pleine réussite exige un orifice ayant moins de 1mm de diamètre. Remarquons, en outre, que le frottement du liquide et l'adhésion au bord d'un orifice si petit ont une influence considérable, puis que le jet d'eau de M. Fuchs ne s'élevait pas même à la moitié de la hauteur de charge; or on admettra sans peine que ce frottement intense occasionne un mouvement vibratoire dans l'eau du jet, et dès lors la transformation doit être activée. Ainsi que je l'ai déjà rappelé, Savart, qui opérait sous des charges analogues, n'a pu constater, dans ses expériences, aucune influence de ce genre; mais l'orifice le plus étroit dont il ait fait usage avait 3mm de diamètre, et si l'on réfléchit que, plus l'orifice est petit, plus est grand le rapport de son contour à la surface de la section de la veine qui y passe, on comprendra que l'influence du frottement et de l'adhésion sur les veines de Savart peut avoir été trop faible pour produire un effet appréciable, tandis qu'il n'en est plus ainsi avec un orifice d'un très-petit diamètre. La veine de M. Weisbach (§ 477) nous a montré un premier exemple de l'influence probable du frottement du liquide; là l'orifice avait un assez grand diamètre, mais la charge était énorme.

Dans cette manière de voir, l'électricité ne déterminerait point par elle-même la continuité du petit jet d'eau; elle ne ferait que supprimer une cause étrangère qui accélère la transformation, et, dans le jet ainsi abandonné à ses seules forces figuratrices, la séparation des gouttes ne serait pas encore complètement effectuée quand les divisions atteignent le sommet.

C'est effectivement ce que prouvent les expériences de M. Reitlinger sur le petit jet de mercure : comme on l'a vu, quand l'orifice n'était pas amalgamé, et qu'ainsi il n'y avait point d'adhésion, le jet, bien que non soumis à l'influence électrique, se montrait continu dans toute sa longueur; c'était donc là son état naturel. Avec un orifice amalgamé, et conséquemment avec une forte adhésion, les vibrations occasionnées par celle-ci accélèrent la transformation, comme le font en général les mouvements vibratoires, et la discontinuité apparaissait; enfin l'influence électrique ne rétablissait pas la continuité de ce dernier jet, parce que, entre le mercure et l'orifice amalgamé, il y avait continuité métallique, et conséquemment impossibilité d'une répulsion entre le liquide et le solide.

Les mêmes considérations expliquent pourquoi le petit jet d'eau de M Fuchs était continu, en l'absence de l'électricité, quand il sortait par un orifice huilé: l'adhésion et le frottement étant beaucoup diminués, le jet prenait son état naturel, état dans lequel les divisions parvenaient au sommet avant leur transformation complète; avec l'orifice non huilé, au contraire, les vibrations résultant de l'adhésion rendaient la transformation plus rapide, de sorte que celle-ci était achevée à une moindre distance de l'orifice;

enfin, sous l'influence de l'électricité, l'adhésion étant détruite, le jet prenait encore son état naturel.

Il est également facile de rendre raison des singuliers effets que M. Fuchs a observés en interceptant l'influence électrique au moyen d'un écran; lors celui-ci ne garantissait que l'orifice en laissant tout le reste du jet sous l'influence de l'électricité, la discontinuité subsistait malgré cette influence, parce que les vibrations à l'orifice pouvaient librement se produire; lorsque, au contraire, l'écran abritait le reste de la veine, sans abriter l'orifice, le jet était continu, parce que les vibrations n'avaient plus lieu.

§ 495. Dans les §§469 à 473, j'ai exposé une théorie des phénomènes que présentent les veines obliquement ascendantes, en partant d'une hypothèse qui m'a paru toute rationnelle; or, à la fin de son Mémoire, Magnus, ainsi qu'on l'a vu (§ 487), explique les mêmes phénomènes à l'aide d'une hypothèse absolument différente; voyons donc si l'on peut décider entre les deux.

Suivant Magnus, la gerbe serait due, à des vibrations de l'orifice normales à l'axe de la veine, vibrations qui se transmettraient dans cette dernière; mais, comme Savart l'a observé, la gerbe est contenue tout entière dans un plan vertical, c'est-à-dire dans celui qui passe par la direction initiale de la veine; il faudrait donc, ce qui doit paraître bien peu probable, que les vibrations transversales de l'orifice eussent toujours lieu dans ce plan; il faudrait, en outre, qu'en supprimant les causes de vibrations, on supprimât la gerbe, ou, du moins, on en diminuât l'amplitude; or on a vu que, dans mes expériences, la gerbe est demeurée la même après qu'on avait pris toutes les précautions pour annuler les mouvements vibratoires. On pourrait, il est vrai, trouver encore une cause de vibrations dans le dégagement continu des bulles d'air amenées par le tube supérieur du vase de Mariotte, dégagement qu'on avait laissé subsister; mais, comme toutes les autres causes avaient été écartées, on aurait dû voir au moins la gerbe devenir plus étroite, ce qui n'a pas eu lieu. Enfin Magnus a reconnu que, dans les veines verticalement descendantes et complètement soustraites aux actions vibratoires, les masses ne s'isolent pas toutes à la même distance de l'orifice, ce qui montre que, dans une semblable veine, les divisions successives, et conséquemment les étranglements successifs, ne sont pas tout à fait identiques; or ce manque d'identité doit évidemment exister de même dans les veines obliquement ascendantes, et j'ai fait voir que la gerbe en est le résultat nécessaire.

Passons à la conversion de la gerbe en un, en deux, ou en trois jets distincts. L'hypothèse de Magnus conduit à cette conversion sous l'influence du son principal, de l'octave grave et de la double octave grave. En effet, dans l'orifice, les vibrations transversales supposées doivent correspondre aux vibrations suivant l'axe de la veine, et, d'autre part, abstraction faite de toute théorie, il résulte des expériences de Savart que le son principal est celui dont les vibrations doubles sont de même période que l'émission des masses isolées; si donc l'instrument sonore rend le son principal, et si une masse s'isole au commencement, par exemple, d'une vibration transversale de l'extrémité de la partie continue, il en sera de même de toutes les masses suivantes : toutes quitteront ainsi la partie continue dans une même direction, et il n'y aura qu'un jet unique. Sous l'influence de l'octave grave, on le voit sans peine, les masses seront lancées alternativement au commencement et à la fin de chaque vibration transversale simple, et il y aura conséquemment deux jets. Enfin on voit également que, sous l'influence de la double octave grave, les masses partiront alternativement au commencement, au milieu et à la fin de chaque vibration transversale simple, d'où trois jets.

Mais si l'on essaie d'appliquer la même théorie au cas des sons compris entre

l'octave grave et la double octave grave, on arrive à des résultats en désaccord avec ceux de l'expérience : rappelons-nous que, de l'octave grave à la tierce au-dessous, j'ai toujours obtenu deux jets, et qu'entre ce dernier son et la double octave grave, il y a eu tantôt deux, tantôt trois jets; or, en partant de l'hypothèse de Magnus, on trouvera qu'il devrait se produire, pour la seconde au-dessous de l'octave, dix-sept jets, pour la tierce sept jets, pour la quarte cinq jets, pour la sixte neuf jets, et pour la, septième dix-sept jets; pour la quinte seulement, on arrive à l'un des résultats de l'expérience, savoir à deux jets.

D'autre part, suivant mon hypothèse, les grandes divisions déterminées par les vibrations dans le sens de l'axe de la veine, se fractionnent, après leur séparation d'avec la partie continue, en deux ou en trois masses par l'action des forces figuratrices anormales; or la réalité d'un tel fractionnement est prouvée par l'expérience de Magnus sur la veine descendante, sortant d'un orifice de très petit diamètre et soumise à l'influence d'un son: cette veine étant extrêmement mince, le son principal qui lui correspondait devait être fort aigu; il est donc bien probable que les sons que Magnus faisait agir sur elle étaient relativement très graves, et qu'ainsi chacune des divisions formées sous l'influence de l'un de ces sons était fort longue. Or on a vu que la partie discontinue de la veine eu question se composait de séries comprenant chacune un même nombre de masses équidistantes, ces séries étant séparées par des intervalles plus grands, et il est clair que les milieux de ces grands intervalles correspondent aux milieux des longs étranglements des divisions dues aux vibrations; c'est ainsi, du reste, que Magnus interprète les mêmes intervalles, puisqu'il les attribue aux excursions ascendantes de l'orifice; il est clair également que les masses de chaque série résultent du fractionnement des divisions dont il s'agit. Ajoutons que, dans la figure qui accompagne le Mémoire de Magnus, chaque série comprend trois masses, ce qui s'accorde encore avec mon explication. Il n'y a d'ailleurs aucune raison pour que le fait observé dans une veine descendante et très mince, ne se produise pas également dans les veines plus épaisses et obliquement montantes.

Mais dès lors on est conduit pour ainsi dire forcément à ma théorie. En effet, les étranglements dus aux vibrations naissant sous une action plus puissante que celle des forces figuratrices, ils doivent se rompre avant ceux que ces dernières forces déterminent; or supposons notre veine oblique soumise à l'influence d'un son qui change la gerbe en deux ou en trois jets; la période d'émission des grandes divisions étant celle des vibrations doubles du son employé, toutes ces divisions s'échapperont nécessairement dans une même direction, qu'il y ait, ou non, des vibrations transversales, et puisque le fractionnement n'a lieu, dans chaque grande division, qu'après le départ de celle-ci, les masses qui résultent de ce fractionnement partiront aussi originellement suivant une même direction; si donc elles parcourent des trajectoires différentes, il faut bien que cela provienne de différences de vitesse.

A la vérité, les expressions dont se sert Magnus paraissent indiquer qu'il voyait, à travers le disque tournant, toutes les masses s'isoler à une même distance de l'orifice, tandis que, d'après moi, les points de séparation résultant du fractionnement des grandes divisions sont nécessairement plus éloignés de l'orifice que le point où s'isolent successivement ces grandes divisions; mais il est possible que le disque tournant ne permette pas d'observer aisément cette dernière circonstance, ou bien elle a pu échapper à l'attention de Magnus.

Je n'ai pas besoin de faire remarquer que la symétrie d'arrangement des masses isolées s'explique également bien dans les deux théories.

§ 496. On a vu au § 344, que M. Laroque a obtenu une sorte de veine laminaire :

or si l'on considère, d'une part, que les figures laminaires, consistant en une lame unique sont soumises, quant à leurs formes et à leur stabilité, aux mêmes lois que les figures pleines, et, d'autre part, que, par suite de l'exiguïté de leur masse, leur transformation spontanée, dans les cas d'instabilité, est extrêmement rapide, on comprendra qu'à moins d'une résistance particulière à la transformation, une veine laminaire ne peut avoir qu'une partie continue extrêmement courte, sauf le cas d'une vitesse de translation énorme. Dans les expériences de M. Laroque, où le liquide du vase était animé d'un mouvement de rotation, la cause de résistance est évidente, c'est la force centrifuge du liquide de la veine laminaire; cette veine présentait, il est vrai, des renflements et des étranglements; mais ils occupaient des positions fixes, au lieu de descendre avec le liquide comme le font les divisions d'une veine pleine. Je reviendrai bientôt sur la veine de M. Laroque.

§ 497. J'ai essayé d'obtenir une veine laminaire avec un liquide qui n'était animé d'aucun mouvement de rotation, en faisant simplement écouler ce liquide par une fente circulaire étroite. Le vase, de forme cylindrique, était construit en fer-blanc; il avait une hauteur de 40 centimètres, et un diamètre de 10; au milieu de son fond était percée une ouverture circulaire de 30mm de diamètre; une pièce dont je parlerai plus bas maintenait dans cette ouverture un disque de fer-blanc de 29mm de diamètre, dont le plan coïncidait avec celui du fond, et le centre avec celui de l'ouverture; de cette façon régnait, entre les bords respectifs de l'ouverture et du disque, un espace annulaire continu de 0mm,5 de largeur. La pièce qui soutenait le disque dans l'ouverture était un tube coudé à angle droit, dont une extrémité s'ouvrait dans la paroi latérale du vase, et l'autre au centre du disque; ce tube permettait ainsi un libre accès à l'air dans l'intérieur de la veine. Enfin, pour éviter toute rotation du liquide, le vase contenait un système de quatre plaques à angles droits, semblable à celui qu'a employé Magnus (§ 483); seulement, comme la fente devait demeurer entièrement libre, ces plaques ne descendaient pas jusqu'au fond.

Je m'attendais à ce que, ce vase étant fixé sur un support convenable, puis rempli d'eau et maintenu plein, le liquide sortant par la fente circulaire formât une veine laminaire qui opérerait sa transformation à une petite distance de cet orifice, de manière à donner, à partir de là, une succession continue de bulles creuses de plusieurs centimètres de diamètre. Mais il n'en a pas été ainsi: l'eau constituait simplement un sac laminaire de 6 centimètres de longueur, dont la ligne méridienne avait une courbure convexe assez faible, et de la pointe duquel descendait une veine pleine. Le phénomène demeurait le même quand on bouchait le tube qui aboutissait au centre du disque.

Je me suis dit alors qu'on allongerait sans doute le sac, et qu'on arriverait peut-être à réaliser la conversion en bulles, si l'on substituait à l'eau un liquide ayant une tension beaucoup moindre, et dans lequel, par conséquent, les pressions capillaires qui naissent des courbures et qui déterminent la fermeture, du sac, seraient beaucoup plus faibles; à cet effet, on a employé l'alcool; mais il n'y a eu d'autre modification qu'un accroissement de la longueur du sac, longueur qui a atteint 9 centimètres.

Ainsi, bien que la charge fût assez forte; bien que le diamètre de la veine, à sa sortie, fût considérable, et que la pression capillaire due à la courbure transversale fût conséquemment peu intense; enfin bien que la lame fût très épaisse comparée aux lames liquides ordinaires, et que, par suite, la faible pression capillaire dût agir sur une masse relativement grande, cette pression, en l'absence de toute force centrifuge, suffisait pour fermer la veine à 6 ou à 9 centimètres de l'orifice, suivant le degré de tension du liquide.

§ 498. J'ai voulu savoir ce qui se produirait si, en se servant du même appareil, on

imprimait un mouvement de rotation au liquide du vase. On a donc enlevé le système des quatre plaques, et, le vase étant plein d'eau, on y a introduit une baguette qu'on y a fait tourner, d'abord avec une vitesse d'environ deux tours par seconde. Dans ces conditions, on a obtenu un résultat analogue à celui de M. Laroque: le sac partant de la fente avait une longueur de 7 centimètres, et, au des sous de sa pointe, qui n'était pas fermée et constituait ainsi un étranglement, s'étendait un fuseau laminaire d'environ 13 centimètres de longueur et 2 de largeur équatoriale; enfin, au-dessous de la pointe inférieure de ce fuseau, le liquide s'éparpillait en gouttes divergentes.

On a doublé ensuite la vitesse de tournoisement de la baguette; alors l'étranglement a pris un diamètre équivalent à peu près à la moitié de celui de la fente, et le fuseau s'est ouvert à sa partie inférieure, du bord de laquelle des gouttes partaient en s'éparpillant; la longueur totale de la figure était de 23 centimètres.

§ 499. Essayons d'expliquer ces résultats. Si le mouvement gyrotoire du liquide n'est pas assez intense pour que, à la sortie de l'orifice, la force centrifuge contrebalance les pressions capillaires dues aux courbures transversales, la veine ira d'abord en se resserrant, et les molécules liquides, qui tournent autour de l'axe pendant qu'elles descendent, décriront des hélices allant en se rapprochant de l'axe. Or, pendant ce trajet, la composante horizontale de la vitesse, celle qui constitue le mouvement de rotation, peut être considérée comme gardant la même intensité et conséquemment la force centrifuge ira en augmentant puisque, pour une vitesse absolue constante, elle est en raison inverse de la distance à l'axe. D'autre part, la pression capillaire augmentera aussi, par l'augmentation de la courbure transversale, et si l'on fait abstraction de la faible courbure méridienne, on voit sans peine que cette pression sera également en raison inverse de la distance à l'axe. Il semblerait donc que, les deux forces opposées croissant suivant la même loi, la seconde, qui l'emportait sur la première à la sortie de l'orifice, doit continuer, à l'emporter, et qu'ainsi le sac doit se fermer complètement; mais, à mesure que la lame se resserre, elle augmente en épaisseur en même temps qu'elle diminue en surface; et comme les pressions capillaires ne s'exercent qu'aux deux couches superficielles, si l'on considère celle qui correspond à un élément de la lame, on voit que, sollicitant une masse de plus en plus grande, son action croîtra, en réalité, moins rapidement que ne l'indique la loi ci-dessus; au contraire, la force centrifuge s'exerçant aussi bien sur les molécules de l'intérieur de la lame que sur les molécules superficielles, son action croîtra, dans chaque élément, par l'augmentation de la masse, plus rapidement que ne le veut la loi en question. Conséquemment, à moins que le mouvement gyrotoire ne soit trop lent, les deux actions opposées deviendront, à une certaine distance de l'orifice, égales entre elles; mais, dans son mouvement vers l'axe, le liquide, en vertu de son inertie, dépasse le point d'équilibre, de façon que l'action centrifuge est alors en excès, et, lorsque cet excès a détruit l'effet de l'inertie, il écarte graduellement le liquide de l'axe, pour former la moitié supérieure du fuseau; or, dans cet écartement, des effets inverses des précédents se produisent la lame diminue d'épaisseur, l'action centrifuge décroît, par suite, plus que l'action capillaire, l'équilibre est atteint, puis dépassé en vertu de l'inertie, de sorte que l'action capillaire reprend le dessus et rapproche de nouveau le liquide de l'axe, pour former la moitié inférieure du fuseau. Enfin on comprend que, sous des conditions convenables, les mêmes causes peuvent déterminer la génération d'autres fuseaux au-dessous du premier, et c'est ainsi, je pense, qu'on doit se rendre raison du phénomène observé par M. Laroque.

Si le mouvement gyrotoire est tel qu'à la sortie de l'orifice, la force centrifuge neutralise exactement la pression capillaire, l'équilibre continuera à subsister plus bas; car, en vertu de ce qui précède, si le liquide se rapprochait notablement de l'axe, l'action

centrifuge l'emporterait, et s'il s'écartait notablement de l'axe, l'action capillaire deviendrait prépondérante. Si donc, dans la seconde expérience, on avait pu augmenter encore la vitesse de rotation, il est bien probable qu'on aurait obtenu une veine à peu près cylindrique. Seulement, dans ce cas de l'égalité entre l'action centrifuge et l'action capillaire, l'accélération de la descente du liquide tend évidemment à rendre la lame de plus en plus mince à mesure qu'on s'éloigne de l'orifice, d'où résulte une diminution progressive de l'action centrifuge, et conséquemment une prépondérance graduelle de l'action capillaire; une semblable veine devrait donc aller en se resserrant quelque peu, afin de maintenir dans la lame l'épaisseur qui convient à l'équilibre des deux actions; elle devrait ainsi constituer non un cylindre, mais une sorte de cône très allongé.

§ 500. Revenons à l'écoulement sans mouvement gyrotoire. Je me suis dit qu'on obtiendrait vraisemblablement la résolution de la veine laminaire en bulles si l'on insufflait de l'air dans son intérieur; j'ai donc fait adapter, à l'orifice latéral du tube qui soutient le petit disque dans l'appareil du § 497, une grosse vessie pleine d'air; on a maintenu dans le vase une charge de 20 centimètres, et, pendant que le liquide sortait par la fente, on a comprimé la vessie. Le sac liquide s'est allongé, et l'on a constaté, en effet, une succession de bulles d'environ 5 centimètres de diamètre, qui se sont incessamment renouvelées tant qu'a duré l'insufflation. Quand on regardait la veine de face, ces bulles passaient avec trop de rapidité pour qu'on pût s'assurer nettement de leur existence; mais on les distinguait fort bien en regardant la veine de haut en bas sous une grande obliquité. Une fois ces mêmes bulles reconnues, on a cherché, par l'observation de face, à déterminer à quelle distance de la fente elles s'isolaient, et l'on a trouvé, pour autant que l'oeil pouvait en juger, que cette distance était comprise entre 15 et 20 centimètres.

Je me suis demandé alors s'il serait possible d'arriver au même résultat sans insufflation, en augmentant considérablement la charge; mais je suis arrivé à une conclusion négative.

D'abord, ainsi qu'on l'a vu, sous une charge de 40 centimètres, le sac laminaire d'eau, en l'absence de rotation du liquide et d'insufflation, a une longueur de 6 centimètres; en réduisant la charge à 20 centimètres, c'est-à-dire à la moitié de la précédente, la longueur du sac n'était plus que de 4,5 centimètres; or le rapport de 4,5 à 6 est 0,75, et celui des racines carrées de deux charges est à fort peu près 0,71; ces deux rapports ne différant guère l'un de l'autre, et les mesures du sac n'étant nécessairement qu'approximatives, on peut admettre que la longueur du sac est proportionnelle à la racine carrée de la charge.

D'autre part, si nous désignons par h la charge, par θ le temps qu'emploie une division de la veine laminaire à se convertir en bulle, et par e l'espace que parcourt le liquide pendant ce temps, nous aurons, par la formule connue

$$e = \theta\sqrt{2gh} + \frac{g}{2}\theta^2 ;$$

Mais, pour $h = 0m,20$, e est, on l'a vu, compris entre 0m,15 et 0m,20 et, pour nous placer dans les conditions les plus favorables, nous prendrons $e = 0m,15$. Si nous substituons ces valeurs de h et de e , ainsi que la valeur connue de g , dans la formule ci-dessus, nous en tirons

$$\theta = 0,065,$$

et cette valeur doit être sensiblement constante, c'est-à-dire indépendante de la charge; elle donne, pour le terme $\frac{g}{2}\theta^2$, la valeur également constante 0,021.

Maintenant, à cause de la petitesse de ce dernier terme, on voit que e , c'est-à-dire l'espace parcouru pendant la formation d'une bulle, est aussi à peu près proportionnel à

la racine carrée de la charge; or, sous une charge de 20 centimètres, et sans insufflation, le sac, dont la longueur n'est que de 4,5 centimètres, est beaucoup plus court que l'espace de 15 centimètres nécessaire, sous cette charge, pour la résolution en bulles; si donc, toujours sans insufflation, on augmente progressivement la charge, la longueur du sac et la distance parcourue pendant le temps θ demeurant l'une et l'autre à peu près proportionnelles à la racine carrée de la charge, la seconde l'emportera de plus en plus sur la première, et ainsi l'on ne pourra jamais arriver à la résolution en bulles. On n'aurait guère à espérer la réussite en rendant la lame plus mince, ce qui diminuerait θ et, par suite, e ; car on diminuerait en même temps, et sans doute dans une proportion aussi forte, la longueur du sac produit sans insufflation.

Notre veine laminaire, quand on y insufflait de l'air, avait, d'après ce qui précède, une partie continue de 15 à 20 centimètres, sous une charge de 20 centimètres; mais cette veine avait, à l'orifice, un diamètre de 3 centimètres; si la fente annulaire n'avait eu que le diamètre des veines liquides ordinaires, 6mm par exemple, il suit des lois de la transformation des cylindres (§ 384) que, sous la même charge, la partie continue n'aurait été que 3 à 4 centimètres; et si la lame, au lieu d'être épaisse, avait eu la minceur des lames qui constituent les bulles de savon, cette partie continue aurait été bien plus courte encore.

§ 501. La file de petites bulles de résine qu'un enfant montra à Morey (§ 323), peut être considérée comme une veine laminaire dans laquelle on insuffle de l'air et qui se solidifie pendant sa transformation. Si l'on veut se figurer d'une manière plus précise comment un semblable collier a pu se façonner, on doit admettre qu'au moment où l'extrémité du tube est sortie de la résine fondue et où l'on commence à souffler, une bulle se développe; mais que, saisie par le froid extérieur et ne pouvant dès lors continuer à grossir, elle tend, chassée par l'air qui lui arrive, à se détacher du tube, en laissant d'abord derrière elle un effilement; que celui-ci est solidifié à son tour avant d'avoir pu se rompre, de sorte qu'une seconde bulle se forme, laquelle est saisie de même par le froid, puis une troisième, et ainsi de suite. Il est clair, du reste, que, pour amener un bon résultat, le souffle doit être bien régulier et d'une intensité convenable.

§ 502. Une veine liquide pleine qui s'écoule dans l'air est un courant liquide qui traverse un gaz; or on peut prendre les conditions inverses: on peut se demander quelle est la constitution d'un courant gazeux qui traverse un liquide, et chercher si la théorie la fait prévoir ou en rend raison. C'est ce que je vais examiner.

Concevons que d'un tube aboutissant verticalement de bas en haut au fond d'un liquide, se dégage abondamment un gaz que ce liquide ne dissout point, comme, par exemple, dans le procédé dont se servent les chimistes pour recueillir certains gaz sous une cloche primitivement pleine d'eau. Les molécules de ce gaz étant, à leur sortie du tube, animées d'un mouvement vertical de bas en haut, tendent à conserver ce même mouvement, et conséquemment le courant gazeux tend à traverser le liquide sous la forme d'un cylindre vertical continu, s'étendant de l'orifice du tube à la surface supérieure de ce liquide. Mais deux causes distinctes s'opposent à ce que le courant prenne cette forme: la première est la pression hydrostatique latérale du liquide, pression qui va en augmentant à partir du niveau jusqu'à l'orifice du tube; la seconde consiste dans les actions figuratrices moléculaires s'exerçant à la paroi liquide qui limite le courant.

Faisons d'abord abstraction de cette seconde cause, et cherchons quelle serait la forme du courant sous la seule influence combinée de la force qui pousse le gaz de bas en haut et de la pression hydrostatique du liquide. Le gaz tend, comme nous l'avons vu, à se creuser dans le liquide un canal cylindrique vertical; mais le liquide, en vertu

de sa pression hydrostatique, devrait resserrer ce canal, tout en lui laissant, sa forme de révolution, en sorte que la paroi liquide qui limite le courant serait, à partir du contour de l'orifice du tube, inclinée de tous les côtés vers l'axe. D'après cela, dans l'hypothèse où nous nous sommes placés de l'absence des forces figuratrices moléculaires, si, en un point quelconque de la paroi liquide, on décompose, dans un plan méridien, la force verticale des molécules gazeuses en deux autres forces, l'une tangente et l'autre normale à la ligne méridienne, il suffira évidemment, pour l'équilibre de figure, que cette dernière composante soit égale à la pression hydrostatique du liquide au même point. Or cette pression va en diminuant de l'orifice au niveau supérieur, et conséquemment, pour que la composante normale de la force ascensionnelle diminuât comme la pression, il faudrait que la paroi liquide se redressât graduellement à partir de l'orifice du tube, jusqu'à devenir tout à fait verticale au niveau supérieur, où la pression étant nulle, la composante normale devrait être également nulle.

On le voit donc, si les forces figuratrices moléculaires n'existaient pas, le canal à paroi liquide présenterait en creux, et de bas en haut, une forme analogue à celle que présente en relief, et de haut en bas, la partie en apparence lisse d'une veine liquide s'écoulant par un orifice circulaire percé en mince paroi dans le fond horizontal d'un vase, et nous savons que, dans toute l'étendue de cette partie lisse, l'effet des forces figuratrices demeure très prononcé; en outre, de même que la partie lisse d'une veine liquide approche d'autant plus d'être cylindrique que la vitesse d'écoulement est plus grande, de même aussi notre canal approcherait d'autant plus de constituer un cylindre creux que la vitesse du gaz serait plus considérable.

§ 503. Mais comme les forces figuratrices moléculaires exercent leur action, les choses ne peuvent se passer de cette manière. Ainsi que je l'ai déjà fait remarquer plusieurs fois, les conditions de l'équilibre et de la stabilité, au point de vue des forces moléculaires, sont les mêmes pour une figure liquide en creux et pour une figure liquide en relief; or, nous le savons, sous l'empire des forces moléculaires, le liquide qui constitue une veine passe graduellement, pendant son mouvement de translation, à l'état de masses séparées les unes des autres; donc, en vertu de l'analogie de forme que j'ai signalée, la figure liquide en creux qui servirait de canal au courant de gaz doit passer à l'état d'espaces creux séparés par du liquide. En d'autres termes, notre courant gazeux doit, pendant son mouvement ascensionnel, se convertir en bulles isolées, et c'est en effet ce qui a lieu, comme chacun le sait.

Pendant les circonstances des deux phénomènes présentent une différence essentielle, qui altère la similitude de ces phénomènes eux-mêmes dans une veine liquide pleine, un étranglement ne s'approfondit qu'en chassant dans les deux renflements adjacents le liquide qui le constitue; or ce transport dans les deux sens exige des déplacements relatifs considérables des molécules, et le liquide, en vertu de sa viscosité, résiste plus ou moins à ces déplacements relatifs; de là résulte qu'il s'écoule un temps notable entre la naissance de chaque étranglement à la section contractée et la rupture du filet dans lequel cet étranglement se convertit, et que, pendant ce temps, l'étranglement parcourt un assez grand espace, de sorte que la veine présente une partie continue assez longue.

Maintenant, dans notre veine gazeuse, un étranglement s'approfondit en chassant dans les deux renflements adjacents non du liquide, mais du gaz, et celui-ci oppose aux déplacements relatifs de ses molécules une résistance incomparablement plus faible, d'où il suit que le temps qui s'écoule entre l'instant de la naissance de cet étranglement près de l'orifice et celui de sa rupture, doit être aussi incomparablement plus court; A la vérité, les modifications de l'étranglement ne s'effectuent que par un mouvement du

liquide ambiant; mais il est visible que ce mouvement s'accomplit avec des déplacements relatifs beaucoup moindres, et, par suite, avec beaucoup moins de résistance que celui qui a lieu à l'intérieur d'un étranglement de la veine liquide. Conséquemment l'espace parcouru dans le mouvement de translation, pendant ce même temps, sera bien plus petit, à égalité de diamètre d'orifice et de vitesse de sortie, pour le courant gazeux que pour la veine liquide, de sorte qu'à moins d'une vitesse énorme, le premier ne présentera pas notablement de partie continue.

§ 504. Pour soumettre ces déductions à l'épreuve de l'expérience, j'ai fait passer un courant d'air à travers de l'eau contenue dans le vase à parois planes en verre qui sert aux expériences avec l'huile et le liquide alcoolique. Le courant était amené par un tube en verre de 5mm environ de diamètre intérieur, partant d'un gazomètre et recourbé de manière à descendre au fond du vase, puis à se relever verticalement jusqu'à quelques centimètres de ce fond; le niveau de l'eau dans le vase était à 15 centimètres au-dessus de l'orifice du tube; enfin l'air, dans le gazomètre, était soumis à une pression de 130 centimètres d'eau.

Avec ces conditions, qui devaient donner une vitesse considérable au courant gazeux, celui-ci, dans son passage à travers l'eau du vase, paraissait continu à l'oeil; mais il était loin d'offrir la forme décrite dans le § 502; celle qu'il présentait était assez peu régulière; cependant on pouvait y observer des espèces de ventres et de noeuds, à peu près comme dans la partie trouble d'une veine liquide; enfin un bouillonnement continu avait lieu à l'endroit où il perçait la surface de l'eau.

Ce bouillonnement permet de conclure que le courant gazeux, malgré sa grande vitesse, n'atteignait la surface de l'eau qu'en bulles isolées; de plus, sa figure apparente, si éloignée de celle qu'il aurait offerte s'il avait été réellement continu sur une partie notable de sa longueur, devait porter à croire que les bulles, se formaient déjà très près de l'orifice, et que l'aspect continu du courant dans toute son étendue était une simple illusion due au passage rapide de ces bulles, absolument comme l'aspect continu de la partie trouble d'une veine liquide est dû au passage rapide des masses isolées.

Pour rendre la chose plus certaine, on a abaissé le niveau de l'eau dans le vase jusqu'à ce qu'il ne fût plus qu'à environ 2 centimètres au-dessus de l'orifice du tube, et le bouillonnement n'a aucunement disparu; les bulles isolées se forment donc en réalité très près de l'orifice, même pour de grandes vitesses; en d'autres termes, la veine gazeuse n'a pas de partie continue. Quant à l'apparence de ventres et de noeuds, dont j'ai parlé plus haut, elle provient probablement de ce que chaque bulle qui se développe à l'orifice, rencontrant la résistance de l'eau du vase, s'aplatit d'abord dans le sens vertical, puis, pendant son mouvement à travers le liquide, exécute des oscillations de forme analogues à celles des masses isolées d'une veine liquide.

Un dernier fait particulier au courant gazeux, c'est l'absence de petites bulles accompagnant les grosses; ces petites bulles, si elles se produisaient, seraient rejetées en dehors du courant, par suite de la résistance plus grande qu'éprouverait leur mouvement ascensionnel à travers l'eau, et deviendraient ainsi visibles; or on n'en distingue que rarement, d'où il suit que lorsqu'une grosse bulle s'isole près de l'orifice, l'étranglement au moyen duquel s'opère la séparation se ferme sans donner naissance à un filet gazeux; c'est que cet étranglement est trop court, et l'absence de filet et de sphérules constitue le second des exemples auxquels j'ai fait allusion dans le § 383.

§ 505. Revenons pour un instant au tube liquide à paroi épaisse obtenu par Magnus et par M. Laroque dans le cas d'un mouvement de rotation modéré du liquide (§ 483). Il suit de ce que nous venons d'exposer au sujet du courant gazeux, que, sans l'intervention de la force centrifuge, l'air qui pénètre dans la veine devrait, dès

son entrée, se convertir en bulles isolées, lesquelles descendraient entraînées par le mouvement de translation du liquide en se renouvelant sans cesse près de l'orifice. L'absence de cette conversion s'explique, je pense, par les principes développés dans le § 499 à l'égard des veines laminaires: si un étranglement se dessinait, le liquide qui affluerait vers l'axe, pour former cet étranglement, apporterait dans celui-ci sa vitesse absolue de rotation en même temps qu'une augmentation de masse, en sorte que l'action centrifuge y deviendrait prépondérante, et éloignerait de nouveau le liquide de l'axe. L'étranglement ne peut donc naître, et c'est ainsi que l'air s'étend, dans l'intérieur de la veine, en une longue traînée continue, traînée qui constitue, en apparence, une exception aux lois de l'équilibre des figures allongées en creux ou en relief.

Cependant le maintien de la traînée gazeuse exige évidemment que le mouvement gyroïde ne soit pas trop lent; on comprend, en effet, qu'au delà d'une certaine diminution de ce mouvement, les variations de l'action centrifuge ne peuvent plus suffire pour s'opposer aux forces figuratrices; aussi M. Laroque a-t-il observé, lors d'un affaiblissement ultérieur de la rotation, que la traînée se façonnait en une suite de renflements et d'étranglements.

§ 506. Retournons au courant gazeux qui traverse un liquide en repos. Son fractionnement en bulles successives à partir de l'orifice même, explique le glouglou qui se produit lorsqu'on incline un flacon plein de liquide pour en faire sortir celui-ci: un échange s'établit alors entré le liquide qui s'écoule et l'air qui le remplace; mais dès qu'une portion d'air s'introduit dans le goulot, les forces figuratrices commencent à l'arrondir, elles en resserrent rapidement la partie voisine de l'orifice, l'étranglement ainsi formé se rompt, et la portion d'air se trouve séparée, à l'état de bulle complète, de l'air qui tendait à la suivre; le liquide occupe donc alors tout l'orifice, en sorte que l'échange avec l'air extérieur est interrompu, et que, par suite, l'écoulement est momentanément arrêté; puis les mêmes phénomènes se reproduisent, une seconde portion d'air entre dans le goulot pour remplacer une égale portion de liquide qui sort, cette portion d'air est façonnée en bulle comme la première, l'écoulement éprouve une nouvelle interruption par la fermeture de l'étranglement, pour recommencer de la même manière, et ainsi de suite. Les saccades que présente l'écoulement d'un liquide dans les circonstances dont il s'agit, résultent donc encore de l'action des forces qui tendent à donner à la surface liquide en contact avec le gaz une figure d'équilibre stable. Sans cette action, l'échange entre le liquide et l'air s'opérerait d'une manière tranquille: le premier sortirait par la partie la plus basse du goulot sous la forme d'un courant continu, tandis que le second entrerait par la partie la plus haute, également sous la forme d'un courant continu, et traverserait, sans se diviser, le liquide renfermé dans le corps du flacon: c'est ainsi, par exemple, que, dans l'expérience du passe vin, l'échange des deux liquides à la petite ouverture se fait sans saccades, et qu'on voit un filet rouge continu à partir de cette ouverture jusqu'au niveau de l'eau, parce que, à cause du peu de différence de nature de ces deux liquides, il ne se développe point, à la surface par laquelle ils se touchent, de forces figuratrices sensibles.

§ 507. Il me reste maintenant à payer un juste tribut de reconnaissance aux personnes qui, dans cette longue suite de recherches, ont bien voulu m'aider, en effectuant, sous ma direction, les expériences ou les calculs. Aux noms que j'ai cités dans le § 8, j'ajoute ici ceux de M. Kekule, alors professeur de chimie à l'Université de Gand, et de M. Rottier, répétiteur de chimie industrielle au même établissement; tous deux ont bien voulu préparer pour moi certaines substances qui m'étaient nécessaires.

Grâces soient donc rendues à ces amis dévoués, dont le bienveillant concours a per-

mis au physicien frappé de cécité, de poursuivre sa route d'un pas ferme, et d'apporter son contingent de matériaux à l'édifice de la science.

§ 508. Je termine en énumérant ici les Notes et Mémoires publiés depuis la fin de 1869, époque où s'arrêtent mes Historiques, sur des sujets ayant trait au mien.

1° M. Tomlinson: *On the motions of certain liquids on the surface of water* (PHILOS. MAGAZ., 4me série, 1870, vol. XXXIX, p. 32).

Il y est question de la viscosité superficielle des liquides.

2° M. Quincke: *Ueber Capillaritäts-Erscheinungen an der gemeinschaftlichen Oberfläche zweier Flüssigkeiten* (ANN. DE M. POGGENDORFF, 1870, vol. CXXXIX, p. 1).

C'est, in-extenso, le Mémoire dont j'ai analysé un extrait au § 169.

3° M. Paul du Bois-Reymond : *Ueber den Antheil der Capillarität an den Erscheinungen der Ausbreitung der Flüssigkeiten*. (Ibid., p. 262).

4° Sir W. Thomson: *The size of atoms*. (Journal NATURE, 1870, vol. I, p. 551).

5° M. Van der Mensbrugge: *Sur la viscosité superficielle des lames de solution de saponine* (BULLET. DEL L'ACAD. DE BELGIQUE, 1870, 2me série, t. XXIX, p. 368).

6°. M. Lütge: *Ueber die Spannung flüssiger Lamellen* (ANN. DE M. POGGENDORFF, 1870, vol. CXXXIX, p. 620).

7° M. Luvini : *Alcune sperienze e consicerazioni intorno all' adesione tra solidi e liquidi* (ATTI DELLA REAL ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO, vol. V, 1870).

8° M. Van der Mensbrugge: *Sur un principe de statique moléculaire avancé par M. Lütge* (Bullet. de l'Acad. de Belgique, 1870, 2me série, t. XXX, p. 322).

9° Sir W. Thomson: *On the equilibrium of vapour at a curved surface of liquid* (PROCEEDINGS OF THE ROYAL SOCIETY OF EDINBURGH FOR 1869-70).

10° M. Duclaux: *Sur la tension superficielle des liquides* (Ann. De Chim. et de Phys. de Paris, 1870, 4me série, t. XXI, p. 378).

11° M. Marangoni: *Sulla proprietà che hanno varj liquidi d'impedire o far cessare talune reazioni tra acidi e metalli* (Nuovo Cimento, série 2, vol. IV, Déc. 1870).

12° M. Mousson: *Bemerkungen über die Theorie der Capillarerscheinungen* (ANN. DE M. POGGENDORFF, 1871, t. CXLII, p. 405).

13° M. Schwarz: *Bestimmung einer speciellen Minimalfläche* (MÉMOIR COURONNÉ PAR L'ACADÉMIE DE BERLIN en 1867, et publié en 1871).

C'est le Mémoire dont j'ai parlé au § 143.

14° M. l'abbé Laborde: *Caléfaction, faits nouveau* (LES MONDES, 1871, 2me série, t. XXV, p. 379).

15° M. Norris : *Soap-bubble experiments* (Journ. NATURE, 1871, vol. III, p. 395).

16° Sir W. Thomson: *Ripples and waves* (Ibid., 1871, vol. V, p. 1).

17° M. Beetz: *Ueber die Einwirkung der Elektrizität auf Flüssigkeitsstrahlen* (ANN. DE M. POGGENDORFF, 1871, vol. CXLIV, p. 443).

18° M. Bosscha: *LEERBOEK DER NATUUREUNDE EN HARE VOORNAAMSTE TOEPASSINGEN* (4me livraisons. Ire partie, Leyde, 1871).

19° M. Mach : *Eine akustische Mittheilung* (TAGEBLATT DER 44STE VERSAMMLUNG DEUTSCHER NATURFORSCHER UND AERZTE, 1871, p. 53).

Le travail est relatif à l'oreille. L'auteur, à propos d'une question concernant les vibrations du tympan, a observé celles de petites lames de liquide glycérique.

20° Mellberg: *Om utspänningen hos vätskor etc.* (Sur la tension superficielle des liquides etc.). Helsingfors, 1871.

21° M. Bosscha : (PROCÈS-VERBAUX DE LA SECTION DE PHYSIQUE DEL L'ACAD. D'AMSTERDAM, 1871-1872, n° 3 et 5).

22° M. Valson : *Sur une relation entre les actions capillaires et les densités dans les solutions salines* (COMPTES RENDUS, 1872, t. LXXIV, p. 103).

23° M. Van der Mensbrugge: *Note préliminaire sur une fait remarquable qu'on observe a contact de certains liquides de tensions superficielles très-différentes* (BULLET. DE L'ACAD. DE BELGIQUE, 2me série, 1872, t. XXXIII, p. 223).

24° M. Schwarz : *Fortgesetzte Untersuchungen ueber specielle Minimalflächen* (BULLET. DE L'ACAD DE BERLIN, 1872, p. 3).

25° M. Marangoni: *Sul principio della viscosità superficiale dei liquidi stabilito dal signor J Plateau* (NUOVO CIMENTO, 2me série, vol. V-VI, Avril 1872).

26° M. Mach: *Die Gestalten der Flüssigkeit*. Prague; 1872 (Conférence donnée en 1868).

27° MM. Tomlinson et Van der Mensbrugge: *On a relation between the surface tension of liquids and the supersaturation of saline solutions* (PROCEEDINGS OF THE ROYAL SOCIETY OF LONDON, n° 135, 1872).

28° M. Moutier. *Sur la tension superficielle des liquides* (JOURN. DE PHYS. DE M. D'ALEMÉIDA, 1872, t. I, p 98).

29° M. Duclaux : *De l'influence de la tension superficielle des liquides sur les mesures aréométriques* (Ibid., p 197).

30° M. Mach : *Optisch-akustische Versuche. — Die spectrale und stroboskopische Untersuchung tönender Körper*. Prague, 1872²⁸⁴, p 92-94.

31° M Van der Mensbrugge : *Sur la tension superficielle des liquides* (JOURN. DE PHYS. DE M. D'ALEMÉIDA, t I, 1872, p 321).

32° M Gernez : *Sur les propriétés des lames minces élastiques* (Ibid. ibid., p 324).

33° M Duclaux : *Sur la capillarité* (Ibid. ibid., p. 350).

34° M Gernez : *Note relative à l'action prétendue des lames minces liquides sur les solutions sursaturées* (COMPTES RENDUS, 1872, t. LXXV, p 1705).

35° J. Plateau : *Réponse aux objections de M. Marangoni contre le principe de la viscosité superficielle des liquides* (Bullet. de l'Acad. de Belgique, 1872, 2me série, t. XXXIV, p 404).

36° M. Duclaux: *Théorie élémentaire de la capillarité, fondée sur la connaissance expérimentale de la tension superficielle des liquides*, 1872, Paris.

37° M. Schwarz: *Beitrag zur Untersuchung der zweiten Variations des Flächeninhalts von Minimalflächen im Allgemeinen und von Theilen der Schraubenfläche im Besonderen* (BULLET. DE L'ACAD. DE BERLIN, 1872, p. 718).

38° MM. Marangoni et Stefanelli: *Monografia sulle bolle liquide* (NUOVO CIMENTO, 1872, 2me série, t. VII-VIII, p. 301, et 1873, t. IX, p. 236).

39° M. Van der Mensbrugge: *Réponse à la communication précédente de M. Gernez* (COMPTES RENDUS, 1873, t. LXXVI, p. 45).

40° M. Gernez: *Note relative à l'action prétendue des liquides à faible tension superficielle sur les gaz dissous dans les liquides à forte tension superficielle* (Ibid., p. 89).

41° M. Moutier : *Sur la tension superficielle des liquides* ((JOURN. DE PHYS. DE M. D'ALEMÉIDA, t. II, 1873, p. 27).

42° M. Gernez: *Sur un nouveau moyen de déterminer la position des surfaces nodales dans les masses gazeuses vibrantes* (COMPTES RENDUS, 1873, t. LXXVI, p 771).

43° M. Lissajous: *Méthode pour étudier la propagation des ondes* (JOURN. DE PHYS. DE M. D'ALEMÉIDA Mars 1873, p. 99).

²⁸⁴ Le Mémoire porte par erreur la date de 1873.

44° M. Van der Waals: *Over de continuïteit van den gas- en vloeïstofloestand* (Dissertation inaugurale, Leyde, 1873).

45° M: Van der Meùsbr : *Sur la tension superficielle des liquides considérée a point de vue de certains mouvements observés à leurs surface* 2me Mémoire (ACAD. DE BELGIQUE, t. XXXVII des Mém. couronnés et Mém. des savants étrangers).

46° M. Gernez: *Expériences de capillarité* ((JOURN. DE PHYS. DE M. D' ALEMÉIDA, t. II, 1873, p. 326).

47° M Tomlinson : *On the motions of camphor and of certain liquids on the surface of water* (PHILOS. MAGAZ., 4me série, vol. XLVI, 1873, p 376).

48° M Lippmann : *Beziehungen zwischen, den capillaren und elektrischen, Erscheinungen* ANN. DE M. POGGENDORFF, 1873, vol. CXLIX, p. 546).

NOTA. Les trois derniers articles ci-dessus ont été publiés depuis l'impression de mes Historiques relatifs a la tension et aux lames liquides, il faut, en conséquence, ajouter les n° 47 et 48 à l'énumération contenue dans la troisième note du § 169, et le n° 46 à celle que donne la deuxième note du § 354bis. D'autre part, j'ai trouvé tout récemment la mention d'un article concernant la veine liquide; mais, n'ayant pu le consulter, j'ignore s'il a trait à la constitution de la veine ; je l'inscris ici simplement d'après son titre. Il est indiqué dans un résumé des travaux de l'Académie de St Pétersbourg pour l'année 1870 (voir le journal *Les Mondes*, t. XXXII, 1873, p. 378). L'auteur de ce résumé s'exprime ainsi: « Nous avons, en outre, inséré dans nos publications les recherches de M. Popow *Sur la surface libre du courant constant d'un liquide homogène soumis à l'action de la pesanteur et coulant d'un orifice horizontal et circulaire.* »

FIN.

TABLE ANALYTIQUE
DES
MATIÈRES DU TOME SECOND.

CHAPITRE VII.

Recherche des causes principales d'où dépendent le facile développement et la persistance des lames liquides: viscosité superficielle; influence du rapport entre cette viscosité et la tension.

Préambule	§241
M. Gladstone : tous les liquides peuvent, par l'agitation, donner des calottes laminaires à leur surface; la faculté de certains liquides de se recouvrir d'une mousse abondante et permanente, paraît ne dépendre d'aucune propriété connue	§242
Les lames liquides n'ont, par elles-mêmes, pas plus de tendance à se rompre lorsqu'elles sont très minces que lorsqu'elles sont épaisses	§243
Procédé pour la comparaison des lames des différents liquides: observation des petites calottes. Dispositif des expériences	§244
Les liquides peuvent se partager, au point de vue de leurs lames, en trois catégories principales. Caractères de ces catégories	§245
Faits particuliers présentés par les calottes de la première catégorie	§246
Idem par celles de la deuxième catégorie	§247
Idem par celles de la troisième catégorie	§248
Idem par celles de deux liquides intermédiaires. Premier exemple d'un liquide ne se laissant pas gonfler en bulles quoique fournissant une mousse volumineuse et persistante	§249
Examen de ce qui se produit dans la lame qui constitue une calotte, par la descente graduelle du liquide; trois cas possibles: 1° augmentation d'épaisseur du sommet à la base, 2° uniformité d'épaisseur, 3° décroissement d'épaisseur du sommet à la base	§250
Expérience à l'appui de l'explication du troisième cas	§251
Les lames de la première catégorie et celles de la troisième ne s'amincissent que très lentement; les lames de la deuxième s'amincissent, au contraire, avec une extrême rapidité. On conclut de là que la couche superficielle des liquides de la première catégorie et de la troisième possèdent une viscosité propre très forte	§252
Cause probable de la rupture spontanée des calottes de la première catégorie. Influence de l'atmosphère environnante. Influence de l'évaporation. Pourquoi les liquides de cette catégorie ne se laissent pas gonfler en bulles	§253
La même cause de rupture n'existe pas pour les calottes de la deuxième catégorie. Pourquoi les liquides de celle-ci ne se laissent pas non plus gonfler en bulles	§254
Considération sur le phénomène de l'inversion des teintes	§255

Hypothèse proposée par M. Van der Mensbrugge pour rendre raison de cette inversion .	§256
La rupture spontanée des calottes de certains liquides de la deuxième catégorie, avant la fin de la phase blanche, paraît dépendre de la grande tendance de ces liquides à s'évaporer . .	§257
Pour qu'un liquide se laisse gonfler aisément en bulles, il faut que sa tension soit faible relativement à sa viscosité superficielle; c'est le cas des liquides de la troisième catégorie	§258
Dans deux liquides fournissant des bulles de même diamètre maximum, le rapport entre la viscosité superficielle et la tension est moins grand à l'égard de celui où cette viscosité est moindre	§259
Phénomènes curieux que présentent les calottes de solution de savon de Marseille qui deviennent entièrement noires	§260
Mode d'expérience pour la constatation directe de la viscosité superficielle et de ses différences: temps qu'emploie à décrire un angle déterminé, d'abord sur la surface, puis à l'intérieur du liquide, une aiguille aimantée écartée du méridien magnétique	§261
Application aux liquides de la première catégorie:	
1° Eau distillée: les résultats manifestent une viscosité superficielle beaucoup plus forte que la viscosité intérieure	§262
2° Glycérine de Price: même conclusion	§263
3° Solution saturée de carbonate de soude: même conclusion	§264
4° Solution saturée d'azotate de potasse: même conclusion	§265
5° Solution saturée de chlorure de calcium: même conclusion, après avoir écarté une cause perturbatrice	§266
Application du même mode aux liquides de la deuxième catégorie:	
1° Alcool: les résultats montrent que, dans ce liquide, la viscosité superficielle n'excède nullement la viscosité intérieure	§267
2° Essence de térébenthine : même conclusion; en outre, probabilité que, dans ce liquide au moins, la viscosité superficielle est plus faible que la viscosité intérieure; excès négatif	§268
3° Huile d'olive: cause perturbatrice due à la forte viscosité intérieure, comment on s'en garantit. Ce liquide paraît avoir aussi un excès négatif	§269
4° Ether sulfurique: absence d'excès positif	§270
5° Sulfure de carbone : même conclusion. Explication, par M. Van der Mensbrugge, des mouvements des petits corps flottants sur ce liquide et sur l'éther	§271
Expérience qui met en évidence un excès négatif dans l'alcool	§272
Application des formules du pendule aux expériences faites avec l'aiguille aimantée sur les liquides de la deuxième catégorie	§273
Résultats qu'on en déduit à l'égard de quatre de ces liquides. Probabilité que tous les liquides de la deuxième catégorie ont des excès négatifs	§274
Emploi de l'aiguille à l'égard des liquides de la troisième catégorie:	

1° Solution de savon de Marseille à excès positif, peu différent de celui de l'eau distillée. Pourquoi on ne peut gonfler de bulles avec une solution alcoolique de savon de Marseille.....	§275
2° Solution de savon mou de ménage à 1/30 : même conclusion.....	§276
3° Solution de savon de colophane à base de potasse: excès positif encore	§277
4° Solution de saponine à 1/100, puis à 1/60 : viscosité superficielle énorme. Expériences diverses à ce sujet	§278
Une solution de saponine à 1/4000 offre un second exemple d'un liquide donnant une mousse abondante et durable, et ne se laissant pas gonfler en bulles. Cause d'inexactitude dans une formulé de Dupré	§279
Preuves que le facile développement en bulles n'est point dû à la viscosité intérieure. Cette viscosité a cependant une petite influence	§280
Essai de la solution d'albumine : viscosité superficielle extrêmement énergique, quoique moindre que celle de la solution de saponine. Etendue de 10 fois son volume d'eau la solution d'albumine offre un troisième est à ajouter à ceux des §§249 et 279.....	§281
Enoncé du principe général relatif à la viscosité superficielle	§282
Historique de la viscosité superficielle. Descartes: première mention de cette viscosité à l'égard de l'eau.....	§283
Petit: la cause qui fait flotter les aiguilles est la présence d'une couche d'air adhérente à leur surface. Rumford: influence nulle de la couche d'air, hypothèse d'une pellicule résistante à la surface de l'eau; expériences.....	§284
Link: la pellicule existe sur tous les liquides; hypothèse sur sa cause; singulière théorie de la solidité	§285
Prechtl : expérience à l'appui de l'existence de la pellicule à la surface de l'eau. Pichard, Gilhieron, de Maistre	§286
M. Artur: dans tous les liquides, la couche superficielle est plus dense et plus cohérente que l'intérieur; le phénomène des aiguilles flottantes ne peut s'expliquer par les seules lois de l'hydrostatique.....	§287
M. Hagen : densité plus grande et résistance à la surface de tous les liquides; fait à l'appui	§288
M. Marangoni : expérience qui montre, dans le mercure, une viscosité énergique	§288bis
M. Nägeli la viscosité superficielle est la cause de la résistance qu'opposent les colonnes capillaires divisées.....	§289
M. Stanislas Meunier: excès de densité dans la couche superficielle de tous les liquides; faits à l'appui	§290
Recherche d'un procédé pour la mesure de la viscosité superficielle. L'emploi des résistances que présentent les colonnes capillaires divisées, est sujet à trop d'incertitudes	§291
Autre procédé, qui donne, mais seulement d'une manière approchée, les valeurs relatives de cette viscosité dans les liquides soumis aux expériences avec l'aiguille aimantée; il est fondé sur la comparaison des durées respectives du parcours de l'aiguille sur la surface et à l'intérieur du liquide. Valeurs fournies par ce procédé	§292
Discussion de ces valeurs. Correction que doit subir celle qui appartient à la glycérine ..	§293

Contradictions apparentes; elles proviennent d'une petite influence de la viscosité intérieure	§294
Nouvelles raisons à l'appui de la légitimité du procédé	§295
Rapport des viscosités superficielles aux tensions des lames, en représentant par 100 la viscosité superficielle de l'eau	§296
Discussion de ces rapports; ils confirment la théorie	§297
Nouveaux exemples de la petite influence de la viscosité intérieure	§298
Détermination approximative de la viscosité superficielle du liquide glycérique; tension du même liquide; rapport de ces deux éléments : accord avec la théorie	§299
Etude théorique du fait que la lame qui constitue une bulle de liquide glycérique va d'abord en s'amincissant, puis reprend une épaisseur croissante	§300
Expérience à ce sujet	§301
Causes de la grande persistance des lames de liquide glycérique	§302
Pourquoi le maximum de persistance des bulles de liquide glycérique réalisées en vase clos exige que ce vase ait de grandes dimensions et que son atmosphère ne soit pas trop desséchée	§303
Pourquoi certains liquides donnent, par l'agitation, une mousse volumineuse et durable, et ne se laissent cependant pas gonfler en bulles à l'orifice d'une pipe	§304
Conclusion	§305

CHAPITRE VIII.

Causes accessoires qui influent sur la persistance des lames liquides. Figures laminaires de très grande durée. Historique concernant les lames liquides.

Première cause accessoire qui influe sur la persistance des lames: les petites agitations de l'air ambiant, et les vibrations propagées par le sol	§306
Deuxième cause : l'évaporation, quand le liquide en est susceptible; elle diminue la persistance des lames formées des liquides de la troisième catégorie. Procédé du Dr Reade pour réaliser des lames d'eau de savon très persistantes	§307
Troisième cause, particulière au liquide glycérique : la température	§308
Quatrième cause : l'action de la pesanteur, et, par suite, le plus ou moins d'inclinaison des lames; expériences. Pourquoi les lames d'huile, si peu durables dans l'air, persistent au contraire long temps dans le liquide alcoolique	§309
Cinquième cause: la combinaison des lames en systèmes; ces assemblages se maintiennent toujours beaucoup moins longtemps que les figures formées d'une lame unique; pourquoi	§310
Sixième cause: la grandeur des lames; les plus petites persistent en général le plus longtemps; expériences	§311
Septième cause: la nature du solide auquel adhère une lame, et l'état de la surface de ce solide; faits à l'appui	§312
Ensemble des conditions de la plus grande persistance	§313

Essais tentés pour obtenir des figures laminaires indéfiniment persistantes ou d'une très grande durée; réussite approchée avec un mélange fondu de colophane et de gutta-percha.....	§314
Historique concernant les lames liquides. Les anciens connaissaient les bulles laminaires complètes obtenues par insufflation.....	§315
Vapeur vésiculaire.....	§316
Boyle: il paraît avoir appelé le premier l'attention sur les couleurs des lames liquides ...	§317
Hooke: idées singulières sur les taches noires des bulles.....	§318
Newton: emploi de la mousse pour une expérience sur la recombinaison de la lumière; emploi des calottes laminaires dans ses recherches sur les couleurs des lames minces .	§319
Gray: il constate qu'une bulle de savon soumise à l'influence électrique attire les corps légers	§320
Leidenfrost: étude détaillée et curieuse des bulles de savon. Ces bulles sont solides et non liquides; leur élasticité, leur grande persistance en vase clos; influence de leur grosseur sur leur durée; force contractile, son siège; force explosive, son siège; constitution de la lame; siège des couleurs; lames planes; les taches noires des bulles sont nettement terminées à leurs bords; conséquence; mesure de l'épaisseur de la lames; limite supérieure des diamètres d'une molécule d'eau et d'une molécule d'huile; pores de grandeur notable dans les bulles; l'air atmosphérique est un assemblage de petites lamelles aqueuses; les animaux et les végétaux sont formés de petites bulles de savon et de petits tubes de la même matière	§321
Wilke: effet d'une température très basse sur les bulles de savon	§322
Cavallo: bulles de savon gonflées avec de l'hydrogène	§322bis
Belli: lame liquide dans la concavité d'un jet lancé obliquement de bas en haut.....	§322ter
Morey : bulles de résine solidifiées; on en obtient en général un plus ou moins grand nombre la suite les unes des autres, unies entre elles par des effilements	§323
Fusinieri: étude détaillée des phénomènes de coloration et de mouvement dans les lames liquides; grandes lames planes d'eau de savon; lames planes du même liquide entièrement noires; petites lames d'autres liquides, soit sous forme de calottes, soit planes dans des cadres métalliques, particularités qu'elles présentent; dans une lame cunéiforme, une force répulsive, qui ne peut naître que d'un développement de calorique, chasse les molécules liquides vers l'arête du coin, et cela avec d'autant plus d'énergie que le coin est moins aigu; de la l'explication de l'inversion des teintes dans certaines calottes; explication des têtards et de leur mouvement ascensionnel; explication de la disparition instantanée des lames qui se brisent; phénomènes curieux que présente une lame d'eau de savon verticale et de peu de hauteur, placée en vase clos.....	§324
Pfaff: effet de la congélation sur des lames planes horizontales d'eau de savon réalisées en vase clos; grande persistance de ces lames	§325
Dr Hough: voir au § 149. Il signale la petite masse qui garnit le bas des calottes laminaires, et constate que ces calottes manifestent les attractions et répulsions des corps légers flottants.	
Savart: voir aux §§230 et 232	§326
Frankenheim: opinion singulière sur le développement des lames liquides.	

Le François: voir au § 239.	
Dr Reade: voir au § 307.	§327
M. Draper: endosmose de certains gaz à travers les lames d'eau de savon.	
Dr Reade: voir au § 307. Les couleurs îles lames ne sont pas due à des différences d'épaisseur.	§328
Brewster: lames liquides observées à l'aide de la lumière polarisée.	
M. Böttger: voir au § 314.	§328bis
Marianini: bulle flottant sur le gaz acide carbonique; phénomène d'endosmose.	§329
M. Henry : voir aux §§116 , 118 et 151. Mesure, par les bulles, de la cohésion de l'eau de savon; valeur élevée de la cohésion de l'eau.	§330
M. Melsens: bulles laminaires de mercure. Théorie de leur génération.	
M. Hagen: voir au § 153.	§331
M. Eisenlohr: grands anneaux colorés obtenus par la rotation rapide d'une lame horizontale. Hypothèse sur la limitation brusque de l'espace noir dans une lame d'eau de savon.	
M. Tyndall: voir au § 230.	§332
Magnus : voir au § 234. Ses recherches sur les disques liquides de Savart.	
M. De Tessan : voir au § 118.	§333
M. Gladstone: voir au § 242. La mousse produite sur un liquide coloré est toujours d'une teinte plus claire, et, dans certains cas, tout autre que celle du liquide lui-même.	§334
M. Tyndall : sensation de chaleur sur la main plongée dans l'écume de la mer.	§335
M. Van der Willigen : hypothèse sur la constitution des lames d'eau de savon.	§336
Sir W. Thomson: voir au § 156. Lorsqu'une lame liquide se développe, elle se refroidit, bien que d'une quantité extrêmement petite.	§337
M. Graham : explication des faits d'endosmose apparente que présentent les lames liquides.	§338
M. Faye : production de petites sphères laminaires d'eau de savon pleines d'huile et nageant dans ce dernier liquide.	
M. Van Rees : voir aux §§202 et 203.	§339
M. Florimond : voir au § 312. Influence du diamètre de l'orifice sur celui des bulles.	
MM. Minary et Sire : Voir au § 237.	§340
M. Mach: voir au § 314. Interprétation erronée; mesure de l'épaisseur de petites lames de colophane, et d'autres obtenues avec une solution d'un silicate alcalin.	§341
M. Kaul: essai d'une théorie des systèmes laminaires des charpentes.	
M. Félix Plateau: voir au § 235.	§342
M. Sire: expériences curieuses sur la pression des bulles.	
M. Van der Mensbrugge : voir au § 235.	§343
M. Laroque : veine laminaire résultant d'un mouvement de rotation imprimé au liquide du vase.	

M. Lamarle : voir aux §§204 et 210.	
M. Marangoni: voir au § 160bis pour une expérience sur une lame d'eau de savon	§344
M. Tait : voir au §118; de quelle manière une bulle se détache d'un orifice; réunion de deux bulles en une seule, et fractionnement d'une bulle en deux ou plusieurs autres; projection agrandie sur un écran des couleurs d'une bulle; bandes d'interférence de Wrede obtenues au moyen de l'image du soleil réfléchie par une bulle	§345
M. Broughton: examen, à l'aide du microscope, de la noire du sommet d'une bulle; procédé particulier pour la mesure de l'épaisseur moyenne de la lame qui constitue une bulle	§346
Dupré : voir au § 161. Expérience curieuse.	
M. Van der Mensbrugge : voir aux §§ 139 et 162	§347
M. Bottger : grosses bulles d'une décoction de bois de Panama, par l'emploi d'un très large orifice	§348
Brewster : étude détaillée des couleurs des lames ; lame plane verticale dont on fait tourner le contour solide; effets du souffle sur les couleurs d'une lame horizontale; hypothèse sur l'origine des couleurs des lames; voir aux §§187 et 206. Mouvement des lames dans les tubes coniques ; phénomènes observés sur de petites lames verticales de différents liquides	§349
M. Chautard : emploi des bulles pour constater le magnétisme de l'oxygène	§350
M. Tait : démonstration, par les bulles, d'un théorème de mathématiques pures.	§351
M. Cauderay : emploi des bulles pour manifester les attractions et répulsions électriques	§352
M. L. Dufour : moyen d'étudier la constitution des flammes en coupant celles-ci par une nappe d'eau mince et horizontale	§353
M. Boussinesq : calcul des lignes méridiennes des lames du § 230.	
MM. Quincke, Lüdgtge et Van der Mensbrugge : voir a §§165 à 168.	§354
M. Kessler: procédé simple pour l'expérience de la bulle de savon flottant sur le gaz acide carbonique.	§354bis
Pourquoi je n'ai parlé le qu'incidence des lames minces résultant de l'extension d'un liquide sur un autre	§355
Examen de l'opinion qu'il se produit, dans les lames d'eau de savon, une separation de l'un des ingrédients du liquide	§356

CHAPITRE IX.

Stabilité des figures d'équilibre, étude purement expérimentale.

Les figures d'équilibre ont, pour la plupart, des limites de stabilité ; la sphère est une figure stable dans son état complet, et, a plus forte raison, toute portion du sphère est stable.	§357
Le plan n'a pas non plus de limites de stabilité	§358

Recherche approximative, par l'expérience avec une masse d'huile dans le mélange alcoolique, de la limite de stabilité du cylindre, celui-ci étant terminé par des bases circulaires à cette limite, le rapport entre la longueur et le diamètre est compris entre les nombres 3 et 3,6	§359
Recherche grossière de la même limite au moyen d'un cylindre de mercure de petit diamètre réalisé dans l'air.	§360
Emploi d'un cylindre de cette nature pour reconnaître que le résultat de la transformation spontanée quand la longueur est considérable relativement au diamètre, le cylindre alors se convertit en une série de sphères isolées	§361
Phases successives par lesquelles passe cette transformation	§362
Description détaillée de l'appareil et des opérations du § 361	§363
La transformation régulière d'un cylindre très long terminé à des bases solides, peut se disposer, relativement aux masses qui, après le phénomène, adhèrent aux bases, suivant deux modes différents	§364
Je nomme <i>divisions</i> d'un cylindre, les portions de celui dont chacune fournit une sphère; calcul de la longueur d'une division d'après le résultat de la transformation; ce que j'entends par la longueur normale des divisions,	§365
Résultat de l'expérience au § 361 avec des cylindres de 1mm,03 de diamètre et de 90mm et 100mm de longueur; discussion; valeur de la longueur d'une division dans la transformation régulière de ces cylindres	§366
Autres exemples de la transformation d'un long cylindre; procédé proposé par M. Donny, pourquoi les fils de verre, les fils d'araignée, etc. peuvent se former	§367
Le phénomène de la transformation en sphères isolées n'appartient pas exclusivement au cylindre: il se produit à l'égard de toute figure dont une dimension est considérable relativement aux deux autres; expérience	§368
Toutes choses égales d'ailleurs, la longueur normale des divisions d'un cylindre est proportionnelle au diamètre de celui-ci; preuve expérimentale avec un cylindre de mercure double en diamètre de ceux du § 366	§369
Expérience qui montre que le rapport entre la longueur normale des divisions et le diamètre du cylindre augmente quand des résistances extérieures gênent la transformation	§370
Le rapport entre la longueur des divisions et le diamètre du cylindre ne peut être inférieur à celui qui représente la limite de la stabilité	§371
La viscosité intérieure doit, comme des résistances extérieures, augmenter le rapport entre la longueur des divisions et le diamètre du cylindre, mais son action est sans doute faible; il en est de même de la viscosité superficielle quand elle est à excès positif	§372
En l'absence complète de toute résistance, le rapport serait très probablement égale à la limite même de la stabilité; on peut adopter, en moyenne, le nombre comme valeur approximative de ce rapport dans les différents liquides	§373
Tant que la longueur d'un cylindre demeure comprise entre une fois et une fois et demie celle qui correspondrait à la limite de la stabilité, la transformation ne peut s'effectuer que par un seul renflement et un seul étranglement	§374
A la fin de la transformation d'un cylindre, les masses, avant de se séparer, restent unies deux à deux par un filet sensiblement cylindrique, lequel se transforme à son tour en	

donnant lieu à des sphérules; sauf de rares exceptions, de semblables filets se produisent toutes les fois qu'une masse liquide, quelle que soit sa figure, se divise en masse partielles; exemple	§375
Théorie de la génération de ces filets	§376
Le phénomène a lieu aussi bien dans les figures laminaires que dans les figures pleines . .	§377
Extension, au cas des figures laminaires, de la théorie du § 376	§378
Recherche de la loi suivant laquelle, toutes choses égales d'ailleurs, la durée de la transformation d'un long cylindre varie, avec le diamètre de celui-ci ; mode d'expérience; remarques	§379
Détails de l'expérience; elle conduit à la conclusion que la durée de la transformation comptée jusqu'à l'instant de la rupture des filets, est exactement ou sensiblement proportionnelle au diamètre du cylindre	§380
Quant à la valeur absolue de cette durée pour un liquide et un diamètre donnés, l'expérience du § précédent ne fournit, à l'égard de l'huile, qu'une limite supérieure fort éloignée .	§381
Expérience avec le long cylindre de mercure du § 369; elle donne, pour ce liquide, une limite inférieure	§382
Le filet auquel donne lieu un étranglement quand une figure quelconque va se désunir, est d'autant moins mince, et conséquemment fournit des sphérules d'autant plus grosses, que l'étranglement est plus allongé	§383
Récapitulation des faits et des lois concernant les cylindres instables	§384
Recherche expérimentale du rapport entre la hauteur limite du caténoïde et le diamètre des bases, au moyen d'une masse d'huile plane dans le liquide alcoolique; particularités de l'expérience	§385
Discussion; on en conclut que le recherché est, à fort peu près, égal à 2/3	§386
Pourquoi un caténoïde limite plein est permanent, bien qu'on doive le considérer comme étant à sa limite de stabilité	§387
Dans l'onduloïde partiel dont le milieu est occupé par un étranglement, la limite de stabilité ne peut s'énoncer d'une manière générale; pour le cas où le milieu de la figure est occupé par un renflement, voir au § 52	§388
Dans le nodoïde partiel engendré par une portion du noeud de la ligne méridienne, la limite de la stabilité ne peut s'énoncer d'une manière générale	§389
Il en est de même à l'égard du nodoïde partiel engendré par un arc convexe vers l'extérieur; on trouve seulement, dans ce cas, que la limite est en deçà des circonférences où les éléments sont perpendiculaires à l'axe	§390
Dans ce cas aussi, comme dans celui du caténoïde limite plein, la figure, à sa limite de stabilité, est parfaitement permanente; explication	§391
Si, au lieu de terminer un caténoïde par deux bases circulaires égales, on prend pour l'une des bas le ce de gorge, le caténoïde n'a plus de limite de stabilité; démonstration; vérification expérimentale	§392
Les figures d'équilibre qui ne sont pas de révolution ont aussi, pour la plupart sans doute, leurs limites de stabilité; exemples. L'hélicoïde gauche à plan directeur formé à l'état laminaire, dans une charpente du système décrit au § 130, n'a pas de limites de stabilité	§393

CHAPITRE X

Stabilité des figures d'équilibre; étude théorique et vérifications expérimentales.

M. Hagen a cherché, par une méthode théorique approximative, la limite de stabilité du cylindre	§394
Imperfection de cette méthode	§395
Principe servant de base une méthode rigoureuse	§396
Application du calcul à ce principe: on trouve ainsi qu'à la limite exacte, le rapport entre la longueur et le diamètre du cylindre est la quantité π , c'est-à-dire le rapport de la circonférence au diamètre	§397
Beer est arrivé à la même valeur, mais sa démonstration est incomplète	§398
Marche à suivre pour vérifier expérimentalement cette valeur au moyen de cylindres d'huile dans le liquide alcoolique	§399
Appareil et expériences	§400
Discussion de ces expériences; elles donnent, pour valeur très approchée de la limite, le nombre 3,15	§401
Particularité en apparence singulière; explication	§402
Les expériences du § 400 vérifient le principe du § 396	§403
Dans un cylindre à sa limite de stabilité, la transformations s'effectue comme si elle avait pour origine un onduleïde infiniment peu différent de ce cylindre, et composé d'un seul renflement et d'un seul étranglement	§404
Dans un cylindre indéfini, entièrement libre, et formé d'un liquide exempt de toute viscosité, la transformation s'effectuerait très probablement comme si partait d'un onduleïde indéfini différant infiniment peu de ce cylindre	§405
Le calcul montre pourquoi les résistances allongent les renflements et les étranglements .	§406
Preuve expérimentale que les forces qui produisent la transformation augmentent avec la longueur des renflements et des étranglement	§407
Le calcul du § 403 fournit une deuxième démonstration de la limite exacte de la stabilité du cylindre	§408
Un onduleïde partiel dont le milieu est occupé par un renflement, est exactement à sa limite de stabilité quand il est terminé aux cercles de gorge de deux étranglements adjacents à ce renflement ; démonstration	§409
Troisième méthode rigoureuse d'arriver à la valeur précise de la limite de stabilité du cylindre	§410
Vérification expérimentale, au moyen d'un caténoïde laminaire, de la limite de stabilité de cette figure	§411
Les principes rigoureux que nous avons appliqués à la recherche des limites de stabilité du cylindre et de l'onduleïde partiel renflé, ne peuvent être employés à l'égard du nodoïde	§412
Stabilité des figures d'équilibre envisagée sous un point de vue général, en partant du fait de la tension. Dans une figure instable, la surface n'est minima que par rapport à certains modes de petite déformation, tandis qu'elle est maxima par rapport à d'autres	§413

Confirmation de ce principe par l'étude du cylindre: la surface de celui-ci est un minimum par rapport à toutes les petites déformations qui n'altèrent pas les aires des sections parallèles aux bases	§414
Application du calcul au cas où la petite déformation partage la figure en portions de même longueur alternativement renflées et étranglées; quand la somme des longueurs d'un renflement et d'un étranglement excède la circonférence du cylindre originaire, la surface de la figure déformée est moindre que celle de ce cylindre	§415
On en déduit la conséquence qu'il y a plusieurs petites déformations à l'égard desquelles la surface d'un long cylindre est un maximum	§416
Conséquences du calcul du § 415 à l'égard d'un cylindre instable assez court pour qu'il ne s'y forme qu'un seul renflement et un seul étranglement	§417
Résumé de la discussion précédente; extension aux figures d'équilibre autres que le cylindre; restriction du principe admis par les géomètres à l'égard des surfaces à courbure moyenne constante	§418
Point de départ de l'application du calcul au problème général. Pourquoi la sphère et le plan sont stables	§419
Dans une figure d'équilibre instable, il y a une condition théorique qui détermine le choix de cette figure parmi toutes les petites déformations qui diminueraient la surface; le mode qu'adopte la figure n'est pas celui qui rendrait cette diminution la plus grande, .	§420
Quelle est probablement la vraie condition théorique	§421
Application au cylindre	§422
Suite; opinion de Beer	§423
Limites de stabilité dans des cas où la pesanteur joue un rôle: résumé d'un travail de M. Duprez	§424

CHAPITRE XI.

Applications des propriétés des cylindres liquides instables, ou, plus généralement, des figures liquides dont une dimension est considérable relativement aux deux autres: théorie de la formation des gouttes au bord de certaines lames; théorie de l'explosion des bulles; théorie de la constitution des veines liquides lancées par des orifices circulaires.

Opinion de Magnus sur la cause de la génération des gouttes au bord des disques liquides de Savait; réfutation	§425
Théorie de cette génération; comparaison les faits observés; expérience	§426
Toutes les fois qu'une lame, présente un bord libre, il se forme à ce bord un bourrelet, lequel se en masses isolées	§427
Théorie de l'explosion des bulles	§428
Confirmation expérimentale	§429
M. van der Mensbrugghe explication, par le principe de la transformation des figures allongées, d'un fait qui se manifeste dans certains cas d'étalement d'un liquide sur un autre	§430

Théorie de la constitution des veines liquides lancées par des orifice circulaires, une semblable veine s'écoulant verticalement de haut en bas, tend à constituer une sorte de cylindre très allongé; la transformation doit conséquemment s'y produire, et les divisions doivent passer graduellement pendant leur descente, à l'état de masses isolées; de là la constitution de la veine, telle qu'elle a été étudiée par Savart	§431
Explication de l'aspect que présente, à la simple vue, une veine soustraite toute influence étrangère	§432
La longueur de la partie continue de la veine doit croître avec la charge et avec le diamètre de l'orifice; lois de Savart	§433
Avec des charges suffisamment fortes, la première de ces lois doit être sensible satisfaite	§434
Démonstration plus rigoureuse	§435
Sous une charge suffisante, la seconde des lois de Savart doit également être satisfaite . . .	§436
Sous de charges assez faibles, deux influences opposées agissent sur la loi suivant laquelle la longueur de la partie continue varie avec la charge	§437
A cause de la neutralisation partielle de ces deux influences, la première loi de Savart doit commencer à se vérifier à partir d'une charge fort inférieure à celles indiquées au § 434; cette charge est d'autant plus faible que l'orifice est plus petit	§438
La seconde loi de Savart doit commencer à se manifester lorsqu'on donne à la charge commune la valeur pour laquelle la veine sortant par le plus grand des orifices commence à se trouver dans les conditions effectives de la première loi	§439
Les observations de Savart sur des veines d'eau soustraites à toute action étrangère vérifient les conclusions des deux paragraphes précédents. par Les observations du même savant relatives à des veines d'eau laissées sous l'influence des actions étrangères, vérifient aussi les mêmes conclusions	§441
Lois de Savart concernant les sons rendus par les veines; sous des charges suffisamment fortes, ces lois doivent être satisfaites	§442
Vérification, au moyen des expériences de Savart, d'un résultat énoncé au § 373	§443
Toutes choses égale d'ailleurs, la longueur de la partie continue doit varier avec la nature du liquide; observations de Savart	§444
Extension de ma théorie aux veines lancées dans des directions autres que la verticale descendante	§445
Constitution singulière du bourrelet qui garnit le bord supérieur de la lame du § 239	§446
Hypothèse proposée par Savart pour expliquer la constitution des veines	§447
Théorie de l'action des mouvements vibratoires sur la veine. Résumé des faits observés par Savart	§448
La durée de chacune des vibrations correspondantes au son propre à la veine est égale à celle du passage d'un étranglement ou d'un renflement à la section contractée	§449
Quand des vibrations de même période que celles du son propre à la veine sont communiquées au vase, elles concourent avec les forces moléculaires qui produisent la transformation spontanée, de sorte que chaque division quitte la section contractée dans une phase plus avancée de sa transformation	§450
En outre, la vitesse de cette transformation est accrue par un effet d'inertie	§451

Remarques sur la direction des vibrations à l'orifice, et sur l'établissement de la coïncidence entre l'action des vibrations et celle des forces figuratrices	§452
Les principes des §§450 et 451 expliquent le raccourcissement de la partie continue, l'augmentation apparente de l'épaisseur de la portion limpide, et les oscillations de forme qu'exécutent les masses isolées	§453
Pourquoi la longueur et le diamètre des ventres ainsi que le diamètre des noeuds augmentent avec la charge et avec le diamètre de l'orifice	§454
Explication des apparences que présente la veine lorsqu'elle n'est point sous l'influence d'un instrument sonore, et qu'elle est reçue dans un vase sans précautions particulières	§455
Idem des effets produits sur une veine tombant encore librement dans le liquidé du vase inférieur, par un son excité près d'elle et à l'unisson de celui qui lui est propre	§456
Examen des effets que doivent produire les sons qui s'écartent de l'unisson. Cas d'un son très voisin de l'unisson	§457
Cas des sons qui s'écartent davantage de l'unisson	§458
Indications de Savart	§459
Cas où la partie discontinue de la veine tombe sur un corps qui ne peut rendre qu'un son déterminée	§460
Suite de ce cas	§461
Influence de l'unisson lorsque l'instrument sonore est mis en contact avec les parois du vase	§462
Aspect produit, dans cette circonstance, par le passage des sphérules principales. Difficulté apparente	§463
Aspect produit par les très petites sphérules	§464
Cas où l'instrument, en contact avec les parois du vase, rend un son différent de l'unisson	§465
Suite de ce cas	§466
Difficulté apparente	§467
Pourquoi les sons exercent une influence analogue sur les veines lancées dans des directions autres que la verticale descendante	§468
Explication de la gerbe signalée par Savart dans les veines lancées sous certaines obliquités	§469
Explication de la disparition de la gerbe sous l'influence du son principal	§470
Recherche expérimentale des rapports entre le son principal et ceux qui réduisent la gerbe à deux ou à trois jets distincts	§471
Théorie de ces phénomènes	§472
Pourquoi, dans les expériences du § 471, au-dessus du son principal et entre celui-ci et son octave grave, aucun son, à l'exception de ceux qui avoisinaient ces deux derniers, n'a modifié la gerbe	§473
Essai d'explication du fait signalé par Savart que le son principal baisse à mesure que la direction initiale du jet s'éloigne davantage de la verticale descendante	§474

CHAPITRE XII.

Historique de la constitution des veines liquides. Action de l'électricité sur des veines de petit diamètre. Veines laminaires. Constitution d'un courant gazeux qui traverse un liquide.

Historique de la constitution des veines liquides lancées par des orifices circulaires.

- Mariotte: premier aperçu de cette constitution, dans le cas de charges très faibles. Savart: étude expérimentale détaillée dans le cas de charges quelconques §475
- Effet de l'influence électrique sur un jet d'eau de très petit diamètre §476
- M. Colladon: faisceau de lumière emprisonné dans une veine liquide courbe §476bis
- M. von Feilitzsch : considérations sur la résolution de la veine en masses isolées §476ter
- Matteucci: nouveau procédé pour l'observation de la veine §477
- M. Weisbach : veine lancée sous une charge énorme §477bis
- M. Hagen : on ne peut attribuer la résolution de la veine en masses isolées à ce que les molécules de l'intérieur n'ont pas le temps d'arriver à la surface pour satisfaire à l'augmentation progressive de celle-ci. Deux procédés nouveaux pour l'observation de la veine; dans les veines soumises à cet examen, les masses successives ne différaient pas considérablement en diamètre. Expériences dont les résultats ne se sont pas accordés avec l'une des lois de Savart §478
- M. Billot-Sélis: deux procédés nouveaux pour l'observation de la veine §479
- M. Tyndall : nouveau procédé. Opinion singulière §480
- M. Buif: nouvelles observations; expériences dont les résultats lui paraissent ne pas s'accorder avec ma théorie, son opinion sur la cause de la résolution de la veine en masses isolées §481
- M. Dejoan : idées particulières sur la nature des liquides, et application de ces idées à la constitution de la veine §482
- Magnus: torsion de la veine par suite d'un mouvement spontané de rotation du liquide du vase; moyen d'écartier cet inconvénient. Effet d'un ébranlement subit dans le voisinage de la veine. Hypothèse du déchirement produit par l'accélération de la vitesse. Introduction de l'air dans la veine par suite d'un mouvement de rotation du liquide du vase §483
- M Buif: phénomène curieux que présentent deux veines sortant d'orifices rapprochés . . . §484
- M. Maus doute à l'égard de ma théorie. Hypothèse particulière sur la cause des pulsations supposées par Savart ; la conversion en masses isolées résulta du déchirement dû à l'accélération de la vitesse §485
- M. Fuchs: hypothèse relative à l'influence de l'électricité sur un jet d'eau de très petit diamètre; objections; autre hypothèse et expérience à l'appui §486
- Magnus: sous des charges très faibles, la veine est influencée par tous les sons produits dans son voisinage, à l'exception des sons très aigus; l'action des sons résulte surtout des vibrations du fond du vase; expérience. Nouveaux procédés pour l'observation de la veine. Même dans une veine soustraite à toute action étrangère, les masses isolées exécutent des oscillations de forme. Effet produit par les sons sur les veines sortant d'orifices très petits. Observations sur un écoulement goutte à goutte. Effet curieux de l'attraction électrique exercée sur une veine à ventres parfaitement réguliers. Observation sur les veines ascendantes; la gerbe est due à des vibrations transversales de

l'orifice; la réduction de la gerbe à deux ou à trois jets résulte de la même cause; dans ces jets distincts, les masses isolées ont un arrangement symétrique	§487
M. Reittinger: modification à la seconde hypothèse de M. Fuchs relative à l'influence de l'électricité sur un jet d'eau de petit diamètre; expériences à l'appui	§488
Le P. Lacouture: faits curieux que présente une veine d'eau animée d'une très faible vitesse, et reçue à peu de distance de l'orifice sur un plan résistant.	
Belli: observation analogue	§489
M. Tyndall : effet exercé sur la gerbe par l'ensemble de deux diapasons produisant des battements	§490
M. Rodwell : expérience relative à la génération des filets et à leur conversion en petites masses dans la partie discontinue des veines	§491
M. Buff: l'une des causes qui diminue la hauteur des jets liquides, est une pression capillaire qui s'exerce à l'extrémité de la partie continue chaque fois qu'une masse vient de s'en détacher	§ 492
Résumé relatif à l'historique précédent remarques	§493
Le phénomène étudié par M. Fuch et par M. Reitlinger n'est pas dû à une diminution de la tension de la surface du jet. Comment l'idée émise par ces physiciens peut rendre raison de toutes les particularités, ont observées	§494
Discussion comparative des théories proposées par Magnus et par moi à l'égard de jets obliquement ascendants	§495
Remarques sur la question des veines laminaires	§496
Essais infructueux de réalisation d'une veine laminaire	§497
On réussit en imprimant au liquide du vase un mouvement de rotation; formes qui prend la veine suivant la vitesse de ce mouvement	§498
Explication de ces formes	§499
On obtient, sans mouvement de rotation, une veine laminaire qui se résout en bulles, en insufflant de l'air à l'intérieur; il est très probable qu'on ne pourrait arriver au même résultat par une forte augmentation de la charge	§500
Explication de la file de petites bulles dont parle Morey	§501
En l'absence des forces figuratrices, la forme d'un courant gazeux sortant d'un orifice circulaire et traversant de bas en haut un liquide, serait analogue à celle de la partie lisse d'une veine liquide pleine lancée verticalement de haut en bas par un semblable orifice	§502
Mais, à cause de l'action des forces figuratrices, le courant gazeux ne peut à moins d'une vitesse énorme, présenter de partie continue notable	§503
Expériences qui vérifient cette déduction : les bulles isolées se forment très-près de l'orifice, et il ne se produit ni filet ni sphérules	§504
Pourquoi, lorsque le liquide qui fournit une veine est animé d'un mouvement modéré de rotation, l'air qui s'introduit dans cette veine ne s'y divise pas en bulles	§505
Explication du glouglou qui se produit lorsqu'on incline un flacon plein de liquide pour en faire sortir celui-ci	§506

Remerciements aux personnes qui ont bien voulu me prêter leur concours.....	§507
Titres des Notes et Mémoires ayant trait au sujet de l'ouvrage et publiés depuis le commencement de 1870.....	§508

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

LISTE ALPHABÉTIQUE
DES
AUTEURS CITÉS DANS L'OUVRAGE.

Les nombres indiquent les paragraphes.

Artur, 287.
Bède, 116, 117, 291.
Beer, 84 à 87, 398, 413, 423.
Beetz, 508.
Belli, 322ter, 489.
Berthoud, 315.
Billet-Sélis, 479.
Biot, 475 (deuxième note).
Bjorling, 134.
Bois-Reymond (du), 508.
Bonnet, 135.
Bosacha, 508.
Bottger, 107, 245, 311, 314, 348.
Bouasinesq, 354.
Boyle, 3 (note), 6 (note), 317.
Brewster, 187, 206, 328bis, 349, 356.
Broughton, 346.
Buff, 481, 484, 492.
Catalan, 129, 137.
Caudey, 352.
Cavallo, 322bis, 475 (deuxième note).
Chautard, 350.
Colladon, 476bis.
Coulomb, 274 (note).
Dejean, 482.
Delaunay, 82, 83.
Descartes, 283.
D'Henry, 93, 94.
Donny, 8, 98, 211, 367.

Draper, 328.
Duclaux, 508.
Dufour, 93, 353.
Dupré, 127, 161, 164, 299, 347.
Dupré, fils, 164.
Duprez, 8, 424.
Dutrochet, 167.
Eisenlohr, 332.
Enneper, 140bis, 143bis
Faraday, 331.
Faye, 339.
Feilitzsch (von), 476ter.
Florimond, 312, 340.
Frankenheim, 117, 327.
Fucha, 476, 486, 488, 494.
Fusinieri, 324.
Gernez, 508.
Gifféron, 286.
Gladstone, 240, 242, 334.
Goldschmidt, 80.
Graham, 338.
Gray, 320.
Hachette, 486 (note). 170, 211, 258,
Hagen, 152, 153, 233, 288, 394, 408, 426, 478.
Halley, 316.
Henry, 116, 118, 151, 171, 211, 330, 428.
Hooke, 318.
Hough, 118, 149, 326.
Jamin, 289, 291.
Jellett, 34.
Kaul, 342.
Kekule, 507.
Kêssier, 354bis.
Laborde, 508.
Lacouture, 489.

- Lamarle, 8, 82, 83, 88 (deuxième note), 129, 181, 132, 158, 160, 16 171, 204, 210, 212, 390, 395.
- Langberg, 156bis.
- Laplace, 1, 20, 148, 171.
- Laroque, 344, 483, 496, 505.
- Le François, 239.
- Leidenfrost, 147, 321, 356.
- Lindelöf, 81 ,82, 89, 91, 392 ,409.
- Link, 285.
- Lissajous, 508.
- Logeman, 486.
- Lüdtge, 166, 167, 508.
- Luvini, 162bis, 508.
- Mach, 210bis, 314, 341, 508.
- Magnus, 234, 238, 333, 425, 480, 481, 483, 487, 495, 505.
- Maistre (de), 123, 286.
- Mannheim, 88.
- Marangoni, 160bis, 288bis, 429 (note), 508.
- Marianini, 329.
- Mariotte, 475.
- Mathet, 140.
- Matteucci, 94, 477.
- Maus, 485.
- Mellberg, 508.
- Melsens, 331.
- Mensbrugge (van der), 8, 139, 143, 162, 167, 168, 178, 235, 256, 258, 271, 299 (première note), 307, 324, 355, 430, 494, 508.
- Meunier, 290.
- Meusuier, 129, 133.
- Mile, 150.
- Minary, 237.
- Moigno, 81.
- Monge, 133,147.
- Morey, 314, 323, 501.
- Mossotti, 150bis.
- Moussop, 508.
- Moutier, 508.

- Nägeli, 289, 291.
Newton, 319, 356
Norris, 508.
Petit, 284.
Pfaff, 325, 356.
Pichard, 286.
Plateau (F.), 8, 172,235,367, 446.
Plateau (J.), 508.
Poisson, 1, 79, 150bis, 171.
Popow, 508.
Prechtl, 286.
Quincke, 127, 163, 165, 169, 341, 508.
Reade, 307, 313,328.
Rees (van), 202, 203.
Reitiinger, 488, 494.
Riemann, 14-2.
Rodwell, 491.
Rottier, 103, 104, 314, 507.
Ruimford, 284, 286.
Saussure, 316.
Savart, 153,230 à 233, 240, 354, 426, 431 à 434, 436,438 à 445,447, 448, 452, 455 à 461, 463 à 469, 471, 473, 474, 475, 477bis, 478.
Scherk, 133,135,137, 138, 143 bis
Schondorif, 143.
Schwarz, 138 (note), 141, 143, 143bis, 314, 393, 508.
Segner, 3 (note), 146.
Serret, 136.
Sire, 237, 343.
Stefanelli, 429 (note), 508.
Steiner, 88 (deuxième note).
Tait, 118, 245, 351, 383.
Tessan (de), 118.
Thomson (J.), 155.
Thomson (W.), 156, 337, 508.
Tomlinson, 430,508.
Tyndali, 230, 335, 480, 490.

Valson, 508.

Waals (van der) 508.

Weisbacll, 477bis, 494.

Wertheim, 157.

Vilhelmy, 157.

Wilke, 322.

Willigen (van der), 336, 256.

Wrede, 245.

Young, 146, 148, 171.